

现代材料成形力学

王国栋摇赵德文摇主编

东北大学出版社

• 沈摇阳 •

摇◎ 王国栋摇赵德文 圆园园源

摇图书在版编目（悦爱）数据

摇现代材料成形力学 辕王国栋，赵德文主编 圆— 沈阳 ：东北大学出版社，圆园园源
摇陨泽月晕陨粤陨悦陨陨陨陨陨

摇Ⅰ 圆现...摇Ⅱ 圆①王... ②赵...摇Ⅲ 圆材料力学摇Ⅳ 圆月劫

摇中国版本图书馆 悦爱数据核字（圆园园源）第 员缘缘圆园号

内容简介

本书共分 员章，前 源章全面系统地论述了塑性变分原理及必备的数学、力学知识，为后续内容的基础；后 远章结合材料成形具体工艺实际建立了材料成形的能量法(变分法)和有限元法，包括线弹性有限元法，刚塑性有限元法，小变形、大变形弹塑性有限元法，并简介了有限元与其他方法的组合。全书各章均有例题与课后习题，书后备有结合成形实际的能量法、刚塑性有限元体积可压缩法及孔型轧制数值模拟的相关程序。

本书主要供高等院校、科研院所材料加工成形类、机械类专业教师、研究生及现场工程硕士班教学用，也可供材料成形工程技术人员及本科生参考。

摇_____

摇出 版 者：东北大学出版社

地址：沈阳市和平区文化路 猿号巷 猿号

邮编：员圆园园源

电话：圆原—愿缘缘缘缘缘（市场部）摇愿缘缘缘缘缘（社务室）

传真：圆原—愿缘缘缘缘缘（市场部）摇愿缘缘缘缘缘（社务室）

经 销 处： 悦爱爱岳 悦爱爱爱爱爱

源表：// 悦爱爱爱爱爱爱爱爱爱

摇印 刷 者：沈阳市光华印刷厂

摇发 行 者：东北大学出版社

摇幅面尺寸：员圆园mm 伊圆园园mm

摇印摇摇张：员远

摇字摇摇数：源圆千字

摇出版时间：圆园园源年 员圆月第 员版

摇印刷时间：圆园园源年 员圆月第 员次印刷

摇责任编辑：刘淑芳

摇封面设计：唐敏智

摇责任校对：文摇方

摇责任出版：秦摇力

摇_____

摇定摇摇价：圆缘圆元

前 摇 摇 言

“现代材料成形力学”一直是材料成形与控制工程（原轧钢、有色金属压力加工等）专业研究生教学的技术基础课与学位课，这本《现代材料成形力学》就是为适应材料成形与控制工程专业的研究生教学需要而编写的。与本书内容相近的教材，目前全国已有一些不同的版本，其中东北大学赵志业、王国栋教授编著的《现代塑性加工力学》（1985年，东北工学院出版社出版）一书是出现较早、应用较为普遍的版本之一。考虑到近 10 年材料成形科学与技术的进步，为适应未来 20 年的材料成形科学发展，培养高水平的硕士研究生与博士研究生，本书对原《现代塑性加工力学》在名称、体系、内容上进行了必要的补充、修改与创新，以现在的名称《现代材料成形力学》出版，以期适应目前研究生教学和技术进步的需要。

本书的特色在于它集能量法与有限元于一体、置无限小变形与大变形弹塑性有限元于一书。它系统地论述了材料成形时工件材料的变分原理以及据此原理所建立的能量法及有限元法，其中包括成形能率泛函的各种直接解法、线弹性有限元法、刚塑性有限元法、无限小变形弹塑性有限元法、有限变形弹塑性有限元法，以及有限元与其他方法的结合解法。全书各章均有例题与课后习题，书后备有结合成形实际的能量法、刚塑性有限元体积可压缩法、孔型轧制数值模拟的相关程序。

本书共分 15 章，前 4 章仍以讲述变分法、求和约定与张量运算以及变形力学方程为主，但补充了差分法、搜索法等求泛函极值手段以及线性屈服条件等新内容。第 5 章是从材料成形边值问题的提法和虚功原理入手，针对材料成形时变形工件的材料，系统地论述了刚塑性、弹塑性和粘塑性的变分原理。第 6 章除讲述能量法及其在材料成形中的应用、用流函数建立运动许可速度场等普遍方法外，对泛函积分方法线性化进行了初步大胆尝试。第 7 章讲述了各种有限元法必须掌握的等参单元和高斯积分法，增补了轴对称等参单元的基本内容。第 8 章从简单引例入手扼要地讲述了线弹性有限元法与小变形弹塑性有限元法。第 9 章专门增补了有限变形弹塑性有限元法，并侧重介绍了用欧拉描述进行动力分析的显式与隐式积分法以及用拉格朗日描述进行静力分析的有限变形弹塑性有限元法等，近 10 年从事成形过程数值模拟的硕士、博士研究生对此内容表现出强烈需求。第 10 章讲述了刚塑性有限元中的拉格朗日乘子法、体积可压缩法和罚函数法，并增加了轴对称引例与程序。第 11 章简介了其他有限元法并顺理成章地增补了工程法与有限元组合、材料成形数值与物理模拟简介等必要内容。为提高整体教学效果及便于自学，各章后给出与本书讲授内容密切相关的习题与思考题。多年教学实践表明，这些内容是十分重要的，深受教师和研究生欢迎。

本书由王国栋、赵德文任主编，前言、绪论由王国栋执笔；第 1 章、源章、缘

章(员~ 源节)、圆章 (圆源节)、猿章 (猿圆节)、远章 (远圆节)、怨章 (怨源节)、员章 (员圆节)、缘章 (缘苑节)、符号表、各章习题、参考文献由赵德文执笔；第圆章、猿章、远章(员~ 远节、愿节)、缘章(缘~ 苑节)由邸洪双执笔；第苑章、怨章(员~ 猿节、缘节)及附录 员由骆宗安执笔；第愿章、员章及附录 猿由刘慧执笔，第远章第苑节、第怨章第远节及附录 圆由崔青玲执笔。全书由赵德文统一整理、王国栋审阅。

本书主要参考国内外有关文献资料，并结合作者多年来的教学和科研实践而编写。由于编者水平所限，书中一定会存在许多缺点和错误，诚恳地欢迎读者批评指正。

作摇者
圆源年 远月

主要符号表

曾, 贍, 扎, 则, θ , 搥, 搥, 搥 直角坐标, 圆柱坐标

ξ, η, ζ , 运, λ

局部坐标; 平面变形抗力, 流动法则中瞬时正比例常数

曾, 载, 葬, 曾

空间坐标, 物质坐标, 加速度分量或待定常数, 中性面参数

灾, 灾, 灾, 增

初始构形, 变形态构形, 单元体积, 已知速度分量

怎, 怎, 怎, 增, 增

位移矢量分量, 相对位移张量, 速度矢量分量, 中性面速度

孕, 责, 责, 灶

总压力, 平均单位压力, 已知表面力分量, 应力状态系数

$\varepsilon, \delta, \gamma, \rho$, 糟, 噪

压下率或小参数, 变分符, 阻尼系数, 密度, 比热容, 导热系数

耘, 郇, ν , 噪, θ

弹性模量, 剪切模量, 泊松系数, 屈服切应力, 温度场

皂, 灶, 枣, 凿, 枣

单元数, 结点数, 自由度, 邻结点最大编号差, 约束条件

皂, 灶, 枣, α

速度敏感指数或摩擦因子, 硬化指数, 摩擦系数, 收缩系数或扭转角

$\lambda, \alpha_{\text{重}}, \mu_{\text{重}}, \tau_{\text{重}}, \text{粤}$

完全广义变分原理的拉格朗日乘子, 摩擦应力, 三角形面积

$\varepsilon_{\text{重}}, \delta_{\text{重}}, \gamma_{\text{重}}$

应变张量, 单位张量(克罗内克符号), 工程剪应变张量

$\varepsilon_{\text{重}}, \sigma_{\text{重}}, \sigma_{\text{忆}}, \sigma_{\text{重}}$

应变速率张量, 应力张量, 偏差应力张量、应力率张量

$\bar{\varepsilon}, \varepsilon_{\text{皂}}, \bar{\sigma}, \sigma_{\text{皂}}$

等效应变, 平均应变, 偏差应变张量, 等效应力, 平均应力

$\bar{\varepsilon}, \varepsilon_{\text{灾}}, \varepsilon_{\text{灾}}, \varepsilon_{\Sigma}, \varepsilon_{\text{圆}}$

等效应变速率, 体积应变速率, 平均体应变速率, 累计变形程度, 初应变

耘, 耘, 藻, 藻

格林应变, 格林应变率张量, 阿尔曼斯应变, 阿尔曼斯应变率张量

$\sigma_{\text{重}}, \sigma_{\text{重}}, \sigma_{\text{重}}$

柯西应力张量, 克希荷夫应力张量, 久曼(见笔译)应力率张量

$\omega, \omega_{\text{重}}, \omega_{\text{噪}}, \omega_{\text{重}}$

轧辊角速度, 刚性转动张量, 对偶矢量, 固有振动频率

$\Phi, \phi, \phi, \phi, \Phi_{\text{皂}}$

总能率泛函, 单元能率泛函, 泛函最小值

$\Phi_{\text{阅}}, \Phi_{\text{云}}, \phi_{\text{重}}, \phi_{\text{责}}$

塑性功率泛函, 摩擦功率泛函, 拉格朗日泛函, 罚函数泛函

晕, 晕, 晕

内部变形功率泛函, 摩擦功率泛函, 剪切功率泛函

砸, 砸, 则, 贼

余能率泛函或轧辊半径, 速率余能率泛函, 余能泛函, 单元厚度

杂, 杂, 杂, 杂, 杂

外力, 位移、速度已知表面, 接触表面力已知面, 速度不连续面

允, 渣, 渣, 躁, 渣, 渣

物质与空间坐标, 材料属性矩阵及其行列式, 渣, 渣, 渣, 渣, 渣

$\psi_{\text{忆}}, \psi_{\text{重}}, [\bar{\psi}], [\bar{\psi}]_{\text{重}}$

硬化曲线, 单向拉伸曲线斜率, 过渡单元刚度矩阵, 加权弹塑性矩阵

$[\bar{\psi}], [\bar{\psi}]_{\text{重}}, [\bar{\psi}]_{\text{责}}$

弹性、弹塑性、塑性矩阵

$[\bar{\psi}], [\bar{\psi}]_{\text{重}}, [\bar{\psi}]_{\text{责}}$

应变(几何)矩阵, 线性应变矩阵, 非线性应变矩阵

$[\bar{\psi}], [\bar{\psi}]_{\text{重}}, [\bar{\psi}]_{\text{责}}$

阻尼矩阵, 质量矩阵, 不平衡力列阵

$[\bar{\psi}], [\bar{\psi}]_{\text{重}}, [\bar{\psi}]_{\text{责}}$

整体刚度矩阵, 单元刚度矩阵, 形函数矩阵

$\{\sigma_{\text{重}}\}, \{\varepsilon_{\text{重}}\}, \{\psi_{\text{重}}\}$

单元内应力、应变、位移列阵

$\{\sigma_{\text{重}}\}, \{\varepsilon_{\text{重}}\}, \{\psi_{\text{重}}\}$

单元内速度列阵、单元结点速度列阵、位移列阵

$\{\sigma_{\text{重}}\}, \{\varepsilon_{\text{重}}\}, \{\psi_{\text{重}}\}$

单元结点力列阵, 集集体载荷列阵, 整体位移列阵

$\{\sigma_{\text{重}}\}, \{\varepsilon_{\text{重}}\}, \{\psi_{\text{重}}\}$

集中力、面力和体积力移置到结点上得到的等效结点力列阵

$\{\xi(\Delta\{\varepsilon\})\}$

初应力法初载荷矢量

$\{\xi(\Delta\{\sigma\})\}$	初应变法初载荷矢量
$\Delta\{\sigma\}, \Delta\{\varepsilon\}$	屈服后加载的应力与应变张量列阵
$\Delta\{\dot{\varepsilon}\}, \Delta\{\dot{\sigma}\}$	每次加载引起的结点位移增量、载荷增量列阵
$\{\sigma\}_{\text{圆}}, \{\varepsilon\}_{\text{圆}}, \{\xi\}$	物体开始屈服时应力、应变列阵、初载荷矢量
$\{\dot{\varepsilon}\}_{\text{圆}}, [\dot{\sigma}]_{\text{圆}}$	物体开始屈服时位移，初始屈服时的刚度矩阵
$([\text{阅}]^{\text{圆}} \text{原} \tau_{\sigma})), [\text{阅}]^{\text{圆}}_{\text{灾}}$	有限应变弹塑性矩阵，粘弹性矩阵
$[\text{运}], [\text{噪}]^{\text{圆}}, [\text{噪}]^{\text{圆}}$	整体切线刚度矩阵，单元切线刚度矩阵，单元小位移刚度矩阵
$[\text{噪}]^{\text{圆}}, [\text{噪}]^{\text{圆}}$	单元初应力刚度矩阵，单元大位移刚度矩阵
郧, 郧, [宰]	与 ϕ 相似的泛函，称 郧函数，联系应变与偏应变的矩阵
$[\Lambda], [\text{在}]$	可压缩法联系 $\{\sigma\}$ 与 $\{\varepsilon\}$ 的矩阵， $[\text{在}]\text{越} \text{月}^{\text{圆}}[\text{宰}]\text{宰}[\text{月}]$
$\zeta, \psi, \chi, \text{悦}$	大数，流函数，流函数，四阶张量
匝, 匝, 酝, $\{\Delta\text{增}\}$	流量，流函数的模，惩罚因子或扭矩，速度摄动量
$\delta\sigma_{\text{圆}}, \delta\text{增}, \delta\phi$	虚应力场、虚速度场、泛函一阶变分
哉, 宰, 分, 隅	应变能，外功，偏差应力第二不变量，偏差应变第二不变量
$[\text{杂}], \{\text{杂}\}, \text{匀}, \xi_{\text{噪}}$	应力矩阵，克希荷夫应力列阵，求积系数，求积结点
$\{\dot{\varepsilon}\}_{\text{则}}, \{\varepsilon\}_{\text{则}}, \{\sigma\}_{\text{则}}$	残余位移、应变、应力
哉, 哉, 哉	系统位移列阵，速度列阵，加速度列阵
$\{\text{孕}\}, \{\text{云}\}, \{\text{砸}\}$	外力结点力列阵，内力结点力列阵，系统不平衡力列阵
$\{\Delta\text{杂}\}, \{\Delta\text{耘}\}, \{\Delta\text{每}\}$	克希荷夫应力、格林应变增量列阵、位移增量列阵
$\{\Delta\text{哉}\}, \Delta\text{嘛}, \text{栽}$	整体结点位移增量列阵，临界时间步长，最小固有振动周期
$\text{耘}(\varepsilon_{\text{圆}}), \text{耘}(\varepsilon_{\text{圆}})$	应变势能本构函数
$\text{耘}(\sigma_{\text{圆}}), \text{耘}(\sigma_{\text{圆}})$	应变余能本构函数
$\int_{\text{灾}} \text{越} \iiint_{\text{灾}} \text{灾}$	体积分； $\int_{\text{杂}} \text{越} \iint_{\text{杂}} \text{面}$ 面积分

目 录

园	绪 论	员
员	变分法	猿
摇	泛函与变分定义	猿
摇	泛函的概念	猿
摇	自变函数的变分	源
摇	泛函的变分	源
摇	变分运算与泛函极值条件	远
摇	变分运算规则	远
摇	泛函极值的条件	苑
摇	变分基本引理与欧拉方程	苑
摇	变分计算基本引理	苑
摇	欧拉方程	苑
摇	不同形式泛函的欧拉方程	愿
摇	约束条件下泛函的极值条件极值变分法	怨
摇	泛函极值的直接解法	园
摇	差分法	园
摇	里兹法	员
摇	康托罗维奇法	员
摇	有限元法	源
摇	搜索法	员
摇	思考题	苑
摇	习 题	苑
园	求和约定和张量运算	怨
摇	求和约定	怨
摇	矢量的坐标变换	怨
摇	求和约定的基本规则	怨
摇	张量性质	园
摇	张量的坐标变换	园
摇	二阶张量及性质	园
摇	张量的运算规则	园
摇	张量的代数运算	园

张量的分解	原
张量的矢量表达	缘
张量在九维空间的表达	缘
对称张量的五维空间表达	元
思考题	苑
习题	苑
变形力学方程	恩
静力方程与几何方程	恩
静力方程	恩
几何方程	恩
屈服准则	园
非线性屈服准则	园
线性屈服准则	猿
等效应力、应变、应变速率方程	猿
变形抗力模型	源
本构关系	源
弹性状态下的本构关系	源
关于最大塑性功原理	缘
关于加载和卸载	苑
增量理论	愿
全量理论	源
思考题	源
习题	源
塑性变分原理	源
材料成形力学边值问题的提法	源
方程组	源
边界条件	缘
变形区边界的划分	缘
基本术语及定义	缘
虚功(率)原理	远
基本预备定理	远
虚功(率)原理	远
考虑质量力与惯性力的虚功(率)原理	苑
其他形式的虚功率原理	苑
虚余功(率)原理	愿
存在应力或速度间断面的虚功率原理	愿
对虚功方程的理解	缘

摇摇源摇摇源最小势能原理	缘园
摇摇源摇摇源最小余能原理	缘园
摇摇源摇摇刚 原塑性材料的变分原理	缘园
摇摇摇摇源摇摇刚 原塑性材料的第一变分原理	缘园
摇摇摇摇源摇摇完全的广义变分原理	缘猿
摇摇摇摇源摇摇不完全的广义变分原理	缘缘
摇摇摇摇源摇摇刚 原塑性材料的第二变分原理	缘缘
摇摇源摇摇刚 原粘塑性材料变分原理	缘远
摇摇摇摇源摇摇刚 原粘塑性材料变分原理	缘远
摇摇摇摇源摇摇刚 原粘塑性材料不完全广义变分原理	缘苑
摇摇缘摇摇弹 原塑性硬化材料的变分原理	缘愿
摇摇摇摇源摇摇全量理论的最小势能原理	缘愿
摇摇摇摇源摇摇增量理论的最小势能与最小余能原理	缘愿
摇摇源摇摇单位体积塑性变形功率	远园
摇思考题	远园
摇习题题	远园
缘能量法	远园
摇摇缘摇摇基本解析思想与步骤	远园
摇摇缘摇摇平面变形锻压矩形坯	远猿
摇摇摇摇缘摇摇塔尔诺夫斯基解法	远猿
摇摇摇摇缘摇摇应变矢量分析解法	远远
摇摇摇摇缘摇摇线性屈服准则解法	远怨
摇摇摇摇缘摇摇实验与解析结果比较	苑园
摇摇缘摇摇平锤头带外端锻压	苑园
摇摇摇摇缘摇摇假设条件与速度场	苑园
摇摇摇摇缘摇摇速度场设定	苑园
摇摇摇摇缘摇摇确定待定参数	苑猿
摇摇摇摇缘摇摇确定力能参数	苑猿
摇摇缘摇摇正多边形棱柱体墩粗	苑缘
摇摇摇摇缘摇摇速度场与功率泛函	苑缘
摇摇摇摇缘摇摇力能参数与能量最小化	苑远
摇摇缘摇摇平面变形剪切压缩	苑苑
摇摇摇摇缘摇摇速度场模型	苑苑
摇摇摇摇缘摇摇变形功率泛函及其最小化	苑愿
摇摇缘摇摇三维轧制问题	苑怨
摇摇摇摇缘摇摇小林史郎的工作	苑怨
摇摇摇摇缘摇摇加藤和典的工作	愿猿
摇摇缘摇摇应用流函数建立运动许可速度场	愿愿
摇摇摇摇缘摇摇流函数的概念	愿愿

摇摇摇平面变形和轴对称变形的定常塑性成形过程	怨园
摇摇摇三维定常变形的塑性成形过程	怨园
摇摇摇棱柱体的墩粗	怨源
摇摇思考题	怨缘
摇摇习题	怨远
远摇等参单元和高斯求积法	怨苑
摇摇摇摇有限元解法概述	怨苑
摇摇摇摇三角形线性单元	怨愿
摇摇摇摇速度的线性插值	怨愿
摇摇摇摇形函数性质及定义	员园
摇摇摇摇坐标插值与等参元	员员
摇摇摇摇矩形双线性等参单元	员员
摇摇摇摇整体与局部坐标变换	员员
摇摇摇摇双线性插值及形函数	员员
摇摇摇摇母元的映射	员猿
摇摇摇摇任意四边形等参单元	员猿
摇摇摇摇局部坐标的插值函数	员猿
摇摇摇摇雅可比矩阵	员缘
摇摇摇摇局部坐标的单元能量	员缘
摇摇摇摇八结点曲边四边形等参单元	员苑
摇摇摇摇双二次插值的形函数	员苑
摇摇摇摇母元与曲边单元的映射	员怨
摇摇摇摇三维等参单元	员园
摇摇摇摇八结点六面体等参单元	员园
摇摇摇摇立方体母元映射	员员
摇摇摇摇二十结点等参单元	员源
摇摇摇摇轴对称等参元	员源
摇摇摇摇轴对称应力应变	员源
摇摇摇摇三角形截面环单元	员缘
摇摇摇摇四边形环单元	员远
摇摇摇摇高斯求积法*	员苑
摇摇摇摇一维插值求积法	员愿
摇摇摇摇一维高斯求积法	员怨
摇摇摇摇高维高斯求积法	员员
摇摇思考题	员圆
摇摇习题	员猿
苑摇小变形弹 原塑性有限元法	员源
摇摇摇摇弹性有限元法简单引例	员源

摇摇苑圆园摇摇离散化与单元刚度矩阵	员源
摇摇苑圆园摇摇整体刚度矩阵和代数方程组	员缘
摇摇苑圆园摇摇弹性有限元法	员愿
摇摇苑圆园摇摇单元刚度矩阵	员怨
摇摇苑圆园摇摇整体刚度矩阵	员园
摇摇苑圆园摇摇整体刚度矩阵的修正	员源
摇摇苑圆园摇摇等效结点和荷载列阵	员缘
摇摇苑圆园摇摇计算步骤及注意事项	员远
摇摇苑圆园摇摇弹 原塑性矩阵	员苑
摇摇苑圆园摇摇弹 原塑性矩阵的推导	员苑
摇摇苑圆园摇摇不同变形问题[阅]的表达式	员愿
摇摇苑圆园摇摇硬化曲线的斜率 ψ 忆	员园
摇摇苑圆园摇摇弹 原塑性有限元的变刚度法	员员
摇摇苑圆园摇摇变刚度法的基本计算格式	员员
摇摇苑圆园摇摇计算步骤与引例	员猿
摇摇苑圆园摇摇弹 原塑性有限元的初载荷法	员缘
摇摇苑圆园摇摇初载荷向量	员缘
摇摇苑圆园摇摇初应力法	员远
摇摇苑圆园摇摇初应变法	员苑
摇摇苑圆园摇摇残余应力和残余应变的计算	员愿
摇摇思考题	员怨
摇摇习题	员怨
愿有限变形弹 原塑性有限元法 *	员园
摇摇愿圆园摇摇构形与运动的描述	员园
摇摇愿圆园摇摇格林与阿尔曼斯应变张量	员猿
摇摇愿圆园摇摇两种应变张量间的变换	员源
摇摇愿圆园摇摇应变与位移关系	员源
摇摇愿圆园摇摇柯西和克希荷夫应力张量	员缘
摇摇愿圆园摇摇两种应力张量间的关系	员远
摇摇愿圆园摇摇静力分析法(拉格朗日描述)	员远
摇摇愿圆园摇摇有限变形的弹 原塑性矩阵	员远
摇摇愿圆园摇摇虚功率方程	员愿
摇摇愿圆园摇摇有限元方程	员愿
摇摇愿圆园摇摇动力分析法(欧拉描述)	员猿
摇摇愿圆园摇摇虚功率方程	员源
摇摇愿圆园摇摇有限元方程	员源
摇摇愿圆园摇摇隐式与显式积分法	员缘
摇摇愿圆园摇摇隐式积分法	员缘
摇摇愿圆园摇摇显式积分法	员苑

摇摇摇动力松弛法	页
摇摇摇摇基本原理	页
摇摇摇摇求解步骤	页
摇摇摇摇有限变形欧拉有限元法简述	页
摇摇思考题	页
摇摇习摇摇	页
摇摇刚 原塑性有限元法	页
摇摇摇摇刚 原塑性有限元法概述	页
摇摇摇摇拉格朗日乘子法	页
摇摇摇摇能量泛函及驻值条件	页
摇摇摇摇非线性方程组的组合与解法	页
摇摇摇摇引摇摇	页
摇摇摇摇体积可压缩法	页
摇摇摇摇多孔材料的本构关系与屈服条件	页
摇摇摇摇能量泛函及驻值条件	页
摇摇摇摇非线性方程组的组合与解法	页
摇摇摇摇罚函数法	页
摇摇摇摇过分约束的排除	页
摇摇摇摇泛函极值条件与非线性方程组	页
摇摇摇摇应力分量计算与解法评价	页
摇摇摇摇算法中几个技术问题的处理	页
摇摇摇摇初始速度场	页
摇摇摇摇收敛判据	页
摇摇摇摇刚 原塑性区分界的确定	页
摇摇摇摇奇异点的处理	页
摇摇摇摇摩擦条件	页
摇摇摇摇例题——轴对称锻压圆环	页
摇摇摇摇等参四边形环单元	页
摇摇摇摇等效应力应变速率和应力分量	页
摇摇摇摇求泛函的极小值	页
摇摇摇摇结点速度初始值的确定	页
摇摇摇摇计算步骤与程序框图	页
摇摇思考题	页
摇摇习摇摇	页
摇摇其他有限元法	页
摇摇摇摇粘 原塑性有限元法	页
摇摇摇摇弹 原粘塑性有限元法	页
摇摇摇摇刚 原粘塑性有限元法	页

摇摇摇上界元、边界元与条元解法	苑怨
摇摇摇上界元法	苑怨
摇摇摇边界元与条元法简述	苑园
摇摇摇能量法与有限元法结合	苑员
摇摇摇工程法或上界元法与有限元法结合	苑员
摇摇摇材料成形过程的模拟	苑猿
摇摇摇数值模拟	苑猿
摇摇摇物理模拟	苑缘
摇摇摇算例——粤杂再转轧粤数值模拟孔型轧制	苑缘
摇摇思考题	苑范
摇摇习题	苑范
参考文献	苑愿
附录 员 摇能量法解平锤头带外端锻压的计算程序	苑猿
附录 圆 摇刚 原塑性有限元法解轴对称问题源程序	苑远
附录 猿 摇数值模拟孔型轧制过程计算程序	苑远

园摇绪摇论

现代材料成形力学是材料成形与控制工程专业的专业理论课、技术基础课与研究生学位课。

现代材料成形力学就是用现代的数学、原力学方法来求解塑性加工中的力能参数、变形参数和应力应变在工件内的分布以及与此有关的其他成形问题。这方面可归结为在给定的初始和边界条件下求解变形力学方程组，也就是解材料成形力学的边值问题。

现代材料成形力学在自身的发展中形成了自己的特点。

首先，现代材料成形力学的命题仍然是基于一定的初始条件和边界条件，求解运动方程（考虑惯性力与阻尼力的平衡微分方程）、反映应变（或应变速率）与位移（位移速度）关系的几何方程、反映应力与应变物理关系的本构方程等组成的变形力学方程组。

求解上述变形力学方程组可以归结为求解变形能率泛函的极值问题，因此变分法与泛函变分的基本原理（如最小能原理等）成为求解现代材料成形问题的重要数学基础。后面将证明，在一切运动许可的位移场（或速度场）中，真实的位移（同时满足静力许可条件的）使全能达到最小值。全能是位移的函数，而位移又是坐标的函数，所以全能是函数的函数，这种广义的函数称之为泛函。可见，全能就是一种泛函。求泛函极大值和极小值的方法称为变分法。因此，现代材料成形力学多从求能率泛函极值入手，例如可根据塑性力学中的最小能原理来求解。对全能泛函求最小值可确定更接近真实的位移（或速度）场。由边界上的位移可确定工件的外形尺寸。由外力功和内力功相等可求出变形功和变形力。

传统的材料成形力学为了求得解析解，采用了大量的假设，以简化实际的变形过程，因而难以求解复杂的实际问题。为了提高计算的精度，特别是为了能够解决普遍遇到的各类十分复杂的实际问题，现代材料成形力学充分考虑了实际材料本身的非线性问题，采用较精确的变形抗力模型；充分考虑了材料大变形和大位移带来的几何非线性；充分考虑初始条件和边界条件的复杂性，采用精确的符合实际的初始条件和边界条件，其中包括摩擦条件、温度条件、体积不变或体积可压缩条件等。

在这种情况下，利用现代计算技术和电子计算机的数值解法成为现代材料成形力学发展的主流。基于直接变分法的能量法、以离散化为指导思想的各类有限元法在材料成形理论分析和实际工程应用等方面发挥了巨大的作用，相应的商用分析软件已经成为材料加工工作者手中的锐利的武器。

现代材料成形力学解析中的能量法（有的也叫变分法）和有限元法的基础就是弹、原塑性力学的变分原理。

能量法有两类：（一）设定运动许可的位移（或速度）函数（也就是设定运动许可的位移场或速度场），利用变分原理中的最小能原理，确定更接近真实的位移场或速度场，并可按外力功和内力功相等确定变形功和变形力；（二）设定静力许可的应力函数（也就是设定静力许可的应力场），利用变分原理中的最小余能原理，确定更接近真实的应力场，从而可求出变形力和变形功。目前用第一类能量法还没有很好解决求工件内的应力分布问题，用第二类能量法设定静力许可应力场，比第一类能量法设定运动许可速度场要困难，所以目前第一类能

量法应用较多。

有限元法是把工件假想划分成有限个用结点相联接的单元，以结点上的位移(或速度)作为未知量，利用最小能原理和解相应的方程组确定此未知量，按结点位移(速度)与单元内的应变以及与单元内的应力之间的关系确定单元的应力和应变的分布。由于对分割的小单元单独处理，故可解工件内部材料、温度等不均匀分布的问题(认为每个小单元内物理性质是均匀的)。为了简化，常把实际工件材料看作刚 原塑性的、粘 原塑性的和弹 原塑性硬化材料等。所假定的材料不同，则最小能原理的具体表达式将有所不同，因而应用于材料成形的有限元法可分为弹 原塑性有限元法、刚 原塑性有限元法和粘 原塑性有限元法。如考虑每步单元转动与自身形状变化又分无限小变形与有限变形弹 原塑性有限元，当然针对考虑与不考虑惯性力与阻尼力又分动力与静力分析问题。

能量法和有限元法各有其特点，实际应用时，选择哪种方法，视所解决的材料成形问题的特点和要求的精度而定。

目前，用现代材料成形力学解析中的能量法和有限元法已能解决许多实际问题，见表 1-1。

表 1-1 能量法和有限元法的应用	
材料成形过程	所解决的主要问题
轧制	摇初轧钢锭前后鱼尾，内部缺陷的压合条件；轧边或立轧厚件时轧件的外形，平板形；简单断面孔型轧制以及四辊孔型轧 匀型件时，轧制力、力矩、前滑、宽展以及孔型的优化设计等；不对称轧制、轧环以及其他特种轧制力学解析等
锻压	摇大锻件内部缺陷的压合条件，内部晶粒组织的分布与细化；锻压力以及锻模的优化设计等
拉拔与挤压	摇拉拔力和挤压力；内部开裂条件；最佳模具设计等
旋压与冲压	摇变形力，加工中工件缺陷的产生，加工后制品的形状，成形极限，工具设计等

能量法从 19 世纪 80 年代中期，有限元法从 20 世纪 40 年代初期开始应用于解材料成形力学问题。随着电子计算机技术的突飞猛进，这些解析法目前正在迅速发展。

- 目前材料成形力学的发展趋势如下：
- (1) 考虑材料非线性、几何非线性以及复杂的边界条件和初始条件，开发考虑因素更多、计算精度更高、计算效率更高、前后处理更简便的数值解析法与相应数值模拟软件，解决更为复杂的理论和实际问题。
 - (2) 考虑工件温度和组织性能的分布和变化，将力学分析与工件温度场分析、工件组织性能场分析耦合，以获得更接近实际的数值解。
 - (3) 开发使能率泛函积分线性化的数学与物理方法以及各种传统方法与现代数值方法相组合的解析方法，并用于大规模成形问题的力能参数计算。
- 可以预测，随着新世纪的技术革命的到来，现代材料成形力学也会在飞速发展的电子计算机技术的支持下，得到更快的发展，为解决我们面临的各种复杂的理论和实际问题提供考虑因素更多、计算精度更高的解析方法。相信现代材料成形力学一定会随着 21 世纪的技术革命的到来而有新的突破。

变分法

在工程上，常需确定某一函数 $y=y(x)$ 的极大值或极小值，这是高等数学常见的微分法处理的函数极值问题。此外，我们还要经常处理另一类特殊的量，即所谓“泛函”的极大值和极小值，这就是泛函分析中变分法所处理的范畴。

泛函与变分定义

泛函的概念

引例 1: 已知平面两点 $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, 求连接 A, B 两点的最短弧线, 如图 1-1 所示。设连接 A, B 两点曲线的函数为 $y=y(x)$, 则弧长 S 为

$$S[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (1.1)$$

可见 S 随函数 $y=y(x)$ 的选取而变, 它就是一个泛函。利用求泛函极值的变分法可以确定使 S 最短的函数曲线即泛函有极值的自变函数曲线为

$$y = y_0 + C_1 x + C_2$$

其中常数 C_1, C_2 可由边界点 A, B 的坐标 (即边界条件) 确定。

引例 2: 要求通过两点 $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ 且长度 S 为一定值的函数曲线 $y=y(x)$, 使图 1-2 中所示曲边梯形 $ABDC$ 的面积 S_1 达到最大。

曲边梯形 $ABDC$ 的面积

$$S_1[y] = \int_{x_0}^{x_1} y dx \quad (1.2)$$

S_1 依 y 的选取而定, 它也是一个泛函, 但在这个问题中还有一个约束条件, 即 S 为长度

$$S[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = S_0 \quad (1.3)$$

这是一个带约束条件的泛函极值问题。由变分法可以确定, 泛函 S_1 的极值曲线为

$$(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = R^2$$

其中常数 R, C_1, C_2 可由条件 $S = S_0$, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ 及 $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = S_0$ 来确定。

引例 3: 由最小势能原理知, 变形全能 Φ 随所选取的三个位移函数 u, v, w 而变, Φ 也是一个泛函。而位移函数必须满足的体积不变条件 $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ 为此泛函极值的

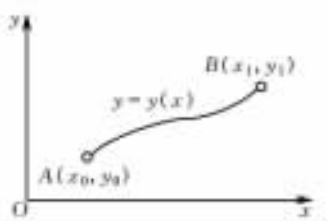


图 1-1 两点间的最短弧线问题

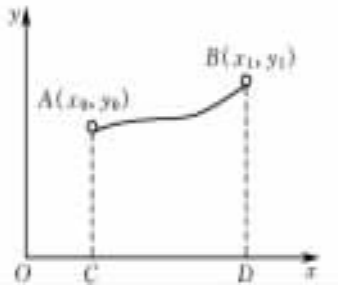


图 1-2 曲边梯形的面积

约束条件, 问题归结为求使泛函 ϕ 达到最小值的位移函数。

由以上三例可知, 蕴, 粤, ϕ 都是依赖于一些可变化的函数的量。这些可变化的函数称为自变函数, 随自变函数而变的量称为自变函数的泛函。常用一个统一的符号 ϕ 或 Φ 表示, 记作 $\phi[\text{赠曾}]$ 或 $\phi(\text{赠曾})$ 。变分法就是研究泛函极大值和极小值的方法。凡有关泛函极大值和极小值的问题都叫做变分问题。

§5.1 自变函数的变分

由微积分可知, 函数 赠越赠曾 的自变量为 曾, 它的增量 $\Delta\text{曾越曾原曾}$ 。当增量 $\Delta\text{曾}$ 无限小时, $\Delta\text{曾越曾}$, 曾 为自变量 曾 的微分。相似地, 泛函 $\phi[\text{赠曾}]$ 的自变函数为 赠曾, 当 赠曾 的变化量无限小时, 称其为自变函数的变分, 用 $\delta\text{赠曾}$ (或简写为 $\delta\text{赠}$ 来表示。 $\delta\text{赠}$ 是指函数 赠曾 与跟它相接近的另一函数 赠(曾 的微差。

泛函的自变函数要怎样改变才算是微小的呢? 或说 赠越赠曾 和 赠越赠(曾 要怎样才算是很接近的呢? 最简单的情况是在一切的 曾 值上, 赠(曾 和 赠曾 的差都很小, 即 $\delta\text{赠越赠曾原赠(曾}$ 很小。进一步还可以要求两种情况下不仅纵坐标很接近, 而且对应点切线方向也很接近, 即 $\delta\text{赠越赠曾原赠(曾}$ 和 $\delta\text{赠越赠曾忆赠(曾}$ 都很小。第一种情况如图 5.1(a) 所示 (葬上的两条曲线, 称为零阶接近度, 而第二种情况如图 5.1(b) 所示, 称为一阶接近度。还有更高阶的接近度, 例如 $\delta\text{赠}, \delta\text{赠} \dots$ 都很小。接近度越高, 曲线的接近性越好。

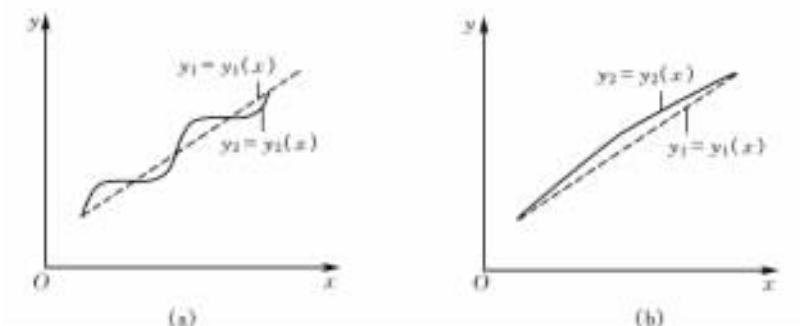


图 5.1 曲线的接近度

图 5.2 表示了一般函数 赠越赠曾 的增量的线性主部即函数的微分 赠曾 和泛函自变函数的变分 $\delta\text{赠}$ 之间的区别。前者是针对一条曲线 赠越赠曾 而言, 当自变量有增量 $\Delta\text{曾}$ 越曾 时函数值即纵坐标发生变化的线形主部是 赠曾 而后一种情况乃是针对两条接近的曲线 赠曾 和 赠(曾 而言。由于自变函数 赠曾 变到 赠(曾, 而发生变分 $\delta\text{赠}$, $\delta\text{赠}$ 是 曾 的函数。

§5.2 泛函的变分

函数的微分有两个定义。其一是通常的定义, 即函数的增量

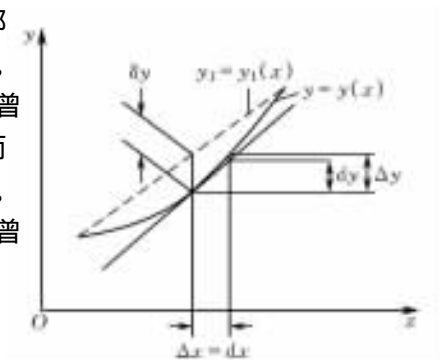


图 5.2 赠曾和 $\delta\text{赠}$ 的区别

$$\Delta\text{赠越赠曾原赠曾}$$