铁路科技图书出版基金资助出版

吴炳　土力学与基础工程论文选集

吴炳　　著

中　国　铁　道　出　版　社

1 9 9 8 年 · 北京

(京)新登字063号

内 容 简 介

本书反映作者在我国土力学与基础工程学不同发展阶段所研讨的关键问题思路和成果,以改正对一些理论和具体问题的看法。内容很值得广大同行阅读和研讨。

图书在版编目(CIP)数据

吴炳 土力学与基础工程论文选集/吴炳 著.-北京:中国铁道出版社,1998.1
ISBN 7-113-02911-6

Ⅰ.吴… Ⅱ.吴… Ⅲ.①土力学-文集②地基-基础(工程)-文集 Ⅳ.TU4-53

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第02680号

书　　名:吴炳 土力学与基础工程论文选集
著作责任者:吴炳 著
出版·发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街8号)
策划编辑:刘启山
责任编辑:刘启山
封面设计:薛小卉
印　　刷:中国铁道出版社印刷厂
开　　本:787×1092 1/16 印张:30.25 字数:759千
版　　本:1998年9月第1版 1998年9月第1次印刷
印　　数:1—1000册
书　　号:ISBN 7-113-02911-6/TU·572
定　　价:84.70元

谨以本书献给

伟大的中华人民共和国成立五十周年

吴炳

吴炳　　教授

序

吴炳　教授的《土力学与基础工程论文选集》出版了，我和我的同事们以及土木工程界的朋友们，由衷地感到高兴。在此，也向为选集的出版而付出辛劳的所有同志们表示真挚的谢意。

写序，我是万万不敢当的，但是，作为炳　老师的学生，在它出版的时候，倒是十分愿意写几句心里话。

我是 1956 年进入唐山铁道学院桥隧系学习的，炳　老师已是当时校内乃至国内知名的教授，1959 年学到专业课时，炳　老师直接为我们授业解惑，开始接触。自己留校任教后接触日益增多，在至今的近 40 年中，老师的谆谆教诲，使我获益匪浅。

老师爱国爱校。早在天津北洋工学院读书时，他作为北洋工学院学生会常务干事，就经常跑到天津市各大学进行联络和宣传，组织学生积极参加共产党领导的“一二·九”爱国运动。1949 年初，吴炳　老师在美国刚获硕士学位，本可留下继续研修或工作，但因报国心切，毅然决定回国。时至 80 年代，吴老师又不断催促其在美获博士学位的儿子吴培明先生回国执教。现在，吴培明博士也已成为改革开放后我校第一个回校工作的外国留学博士，吴炳　老师一家两代人为学校的改革、建设、发展作出了巨大的努力。

老师敬业育人。他重视学生及年轻教师的理论培养与基础知识的教育，也重视他们的实践知识和动手能力的培养。无论是兰州的第四级台地上的黄土湿陷性研究，还是武汉长江大桥、南京长江大桥的管柱振沉时土的阻力变化规律研究，还是成昆三线建设，以及宝钢工程的先行论证，他都是带领学生和年轻教师亲临现场、亲自动手或示范，并通过调查研究才作出技术上或工程上的建议，写出研究报告或论文。为了让年轻教师有更多的时间到现场，吴老师曾一人同时讲授三个不同专业的课程，把大量的教学工作压在自己肩上。在研究生的培养中，不论是订立培养计划、讲授课程还是论文辅导，他都是亲自动手，绝不委托他人。老师的敬业爱岗、严谨治学、实事求是的学风哺育了国内土力学界的不少教学科研带头人。

老师业务精湛。吴炳　老师从事教学和科学研究工作四十多年，在土力学及地基基础工程研究方面，造诣很深。老师是刚解放时，全国仅有的几个做“土力学”学问的学者之一。1950 年，在学校就开出“土力学”课程，随后筹建“土力学”实验室，1957 年编写了《土力学地基和基础》在铁路高校被广泛采用，而且对铁道建设

的施工设计起着重要参考作用，影响深远，这次出版的集子中所发表的文章均可再一次做出有力的说明。例如，集子首篇“粒性介质的极限平衡”一文，首先把当时土力学中先进的理论——索柯洛夫斯基的粒性介质理论系统地介绍到我国，开阔了国内同行的理论视野；第 2 篇“挡土墙土压力的两个经典理论中的基本问题”一文，则对挡土墙土压力的两个基本理论，提出了自己的独立见解，澄清了一些当时的模糊观点。集子中每一篇文章都可看出老师扎实的业务功底和水平。

吴教授的《土力学与基础工程论文选集》与读者见面了，我相信这本集子一定会对我国的土木工程建设，以及对土力学学科的发展起到极大和极好的作用。

借此机会，我亦代表吴炳　教授的学生们，祝老师健康长寿，青春永驻。

西南交通大学校长　胡正民

一九九七年元月二十八日

前　　言

这本选集收入我在建国后发表过的关于土力学与基础工程学科的论文，凡能整理出来的大致都在里面了。另外几篇论文和研究报告内容有些重复者，就舍弃未取。

第 1 篇，发表时原名《散体的限界平衡》，是建国初学习和熟悉原苏联在土力学理论方面成就的产物。文中介绍了以数学方法系统地研究粒性介质极限平衡时的静定解。从这方面看，原苏联学者当时是领先世界的。第 2 篇关于土压力的讨论表明了我对经典理论的看法。

第 3 和 4 篇是参加全国黄土研究的结果，这多少与当时学习苏联也有关系，例如当时工程界对苏联学者提出的黄土“湿陷性”很有兴趣。实际工作由第 4 篇所讲的兰州台地上加载试验开始，以后才在实验室进行较大规模的原状黄土样三轴压力试验(即第 3 篇所论述的)。

第 3 篇在大量土样试验的基础上用当时(现在似乎也还差不多)中外公认的土力学理论进行了兰州黄土力学性质的分析。所得结论到现在还可能有意义。文中大多数图是由毛坚强同志帮忙重新画过的。第 4 篇中报导的加载试验是认真做的，可惜限于人力、物力，试验数目不够多。所得结果对黄土力学性质的了解从另一方向给予启示。

第 5 篇短文是我鉴于技术规范定的由静载试验决定桩的容许荷载方法有时会含混不清，因而提出了用数理统计方法解决。这是我第一次试图开辟新途径研究桩的容许荷载。

从武汉长江大桥的施工到南京长江大桥的设计，我校有关部门参加了大桥局的某些科研项目，第 6 至 10 篇论文是这方面的结果。当然，以土力学与基础工程讲，我们在参加两座长江大桥的科研工作中，一则争取大桥局的导向和研讨不够，再则主观意图在理论上想提高些建桥技术也没取得什么效果。虽时势如此，但现在想起来仍觉遗憾。

第 7 篇关于岩石地基承载力是得知武汉大桥桥墩基础采用管柱钻孔法就想到的论题，但论文写出时间已很晚。文中作者试图把岩石当作刚塑体，应用塑性力学限界分析法计算嵌岩管柱的极限荷载近似值。第 8 篇则是大桥局桥研所在南京浦镇页岩上做试桩所得资料的分析。该文先定出对页岩适用的回归方程，然后估算其中参数，即用回归分析全面研究该地页岩的容许荷载。这是作者想藉助现场模型试验资料具体地来研究岩土力学性质指标的。

武汉大桥的振动下沉嵌岩大直径管柱虽然来不及做系统试验，但管柱的振沉在南京大桥设计时是做了系统的测桩(即用贴在钢筋上电阻丝片测应力和悬臂梁

加速度仪测管柱振沉时加速度)试验的,所得数据比较全面。若能正确地分析这些数据,对振动锤的设计和振沉控制以及振沉时管壁应力都可得出有用的实测值。第6篇论文就是利用铁科院和大桥局测得的数据,比较全面地研究了管柱的非线性振动时谐振和振波形态以及土的阻力等等问题。这篇论文对受强迫振动在土中下沉的管柱(包括管桩)的力学状况和土层反应作了全面分析,其中有些结论应该说对类似问题还是有意义的。

在第6篇的基础上第9和10篇着重研究振沉时土的阻力,因为这是测振数据中最具体且有价值的。这两篇内容相同,不过前一篇是送第六届国际土力学和基础工程会议用英文发表的。文中提出可用于计算振沉时土的阻力的数学模型,说明模型的用法,后给出一组从实测数据所得模型的参数值。

桩基础是深基础中最常用的一种,对桩和桩基的极限和容许荷载应如何决定是作者一直在注意的问题。进入70年代后,作者的科研工作转向这方面。加以有一阵我国工程界对高承台桩基(常称高桩承台)的设计很重视,因而横向受力桩的研究就提到日程上来了。对此,作者进行比较系统的理论分析,其结果为本集的第11篇。

在进行横向受力桩的理论研究之前和以后,作者对高承台桩基结构计算的矩阵化和如何利用当时国内已出现的DJS- 6计算机进行过一番探索。当发现这方面国外已有系统成果(如论文第15篇开头提到的)和一些其它原因,作者就没再搞下去了。这期间曾写出一篇同承台结构计算有关的论文,即第13篇。

尽管放下了桩基础作为空间结构的全面机助分析,我还是对较简单的桩基作为平面刚架问题进行了较系统的研究,其结果为第14篇关于桩和桩基的刚度系数的阐述。它以无量纲量矩阵列式,把其中刚度系数作为计算核心,因而可直接推广到空间刚架去。文中还附有王韶华同志用DJS- 6机算出的详尽刚度系数表。

桩基础的设计中比较不好确定的是土阻力(轴向)和土抗力(横向),作者在一段时间内全力研究了这方面的问题。当时作者有如下述想法。不论桩基整体或一棵桩,用当前土力学界通行的力学方法求出的承载力公式总归不大符合实际情况。看来只有做现场试验研究才比较可靠。整体桩基做试验确实困难;先从单桩着手,试验做得精致些,资料分析得透彻些似乎是唯一途径。事实上国内也已累积了许多试桩资料,有些且是加了桩壁量测设施(如埋设电阻应变片等)的。花费人力、物力而得的大量资料,若不能好好地加以分析、应用本来就十分可惜。为此,我就近与四川省交通厅科研所协作,利用他们积存的试桩资料,共同进行较深入的试桩数据分析。这期间我曾向他们提出几篇研究报告,第12篇即其中之一。

对试桩数据的分析,除通常的回归分析外,作者还引入了样条函数(如前述第12篇)和非线性归划法,如第15篇。后一方法要用到较大规模数算,如迭代法等,用起来自然麻烦些。不过当今计算机的硬、软件日新月异,操作方便,要应用这些方法进行试桩数据分析似乎不会有什么困难。第16篇再次总结地介绍了作者建

议的试桩数据分析法。

关于试桩资料分析，我（有些和其他同志合作）前后写过不少报告和学术会议交流论文，因内容有些重复而有的只对某一具体情况讨论，它们就没编入这本选集了。

进入 80 年代后，我注意力转移到土力学的基本理论方面。事实上，这问题是我早年就十分关注的。在 50～60 年代，除学习外还写过不成熟的文章。作者认为把土当作致密的固体，以弹性或弹、塑性力学原理来进行理论分析不完全合适。例如对称的应力张量不考虑由于颗粒旋转可能引起的内力矩（或应矩）就不一定同实情相符。至于位移和应变张量则似乎更难应用固体的定义了。实际上土介质应该算粒性介质，或粒性状态固体。土力学应包括在另一力学分枝“粒性力学”（particulate mechanics）的范畴内，而且这名词现在国外也常有人提到。

当然，完全用随机过程描绘粒性介质的变形和受力状态是无法应用的。作者想把粒性力学的应力和应变张量重新定义一下，然后考虑颗粒性加以简化使其成为确定（deterministic）形式以便建立平衡方程，本构方程以至一般方程来应用。尽管如此，但粒性力学中位移和应变张量的确很难下恰当定义，只有应力张量可先试一试，这促成我写出了那篇关于粒性介质中应力张量的论文，即第 17 篇。而且鉴于数学分析的复杂性，或许也有历史原因在内，该文中还另外提出所谓静定应力张量，即用它来建立的平衡方程组是可解的。目前我正在这方向努力，相继写出了第 18、19 和 20 三篇论文。希望以后还能陆续地发表些这方面的理论研究结果。

本选集的出版，得到了西南交通大学各级（特别是土木工程学院）领导和同事们的鼓励和帮助，我十分感谢。我的夫人王韶华教授在论文的选编上提出许多宝贵意见，又做了许多具体工作，我向她郑重地致谢。中国铁道出版社编辑刘启山同志是选集得以出版的推动者和主持者，他在各方面做了许多工作来克服种种困难，使我十分感动，在此向他深深地道谢。我还要谢谢为此书原稿帮忙画过图和打印的同志们。

吴炳

1997 年 10 月

吴炳　经历

吴炳　, 1914 年 10 月出生于浙江省杭州市, 少年时期是在该省宁波、镇海度过的。后回杭州读中学, 1933 年毕业于浙江省立杭州高级中学。

高中毕业后, 他进北洋工学院(天津大学前身) 土木系学习。1937 年夏从该系水利组毕业。在学期间, 日军妄图侵占华北, 他曾积极地参加了平津学生抗日救亡运动。刚毕业, 抗日战争就爆发了。

1937 年在南京当时的资源委员会水利处工作了很短时间。因该处不久向武汉撤退, 他没随去, 即回家。

1938 年他从上海家启程经河内到达昆明, 在大昌建筑公司搞设计工作。1939 年他进重庆市工务局任技佐, 半年后到当时兵工署建库委员会, 在磁器口参加建库工程。

1940 年他回昆明和同学、朋友们创建了致远建筑公司, 并出任经理。该公司在昆明和外县承建了楼房和机场跑道等, 后又在昆明承接盟军供应处发包的办公所、营房和机场扩建工程; 也曾参加成都附近机场跑道的修建。不久抗战胜利, 他即结束公司业务, 然后赴渝。

我与吴炳　于 1946 年初在重庆结婚, 不久他先回上海家中。当我到上海后, 一同回到杭州老家居住。

1947 年他赴美国留学, 进耶鲁(Yale) 大学研究生院学习结构工程和土力学。次年初转入威斯康新(Wisconsin) 大学水利系, 并于 1949 年初在该校获科学硕士学位。

1949 年初解放大军即将渡江, 进军华东。他以迎接解放的心情回国, 返杭州家中。当年 7 月在上海与顾宜荪教授会面, 受聘任唐山工学院土木系教授, 并于 8 月到唐山任职。开始教水工课并修建水利实验室。不久他转而开设新课“ 土力学和基础工程 ”, 并开辟土力学实验室。抗美援朝开始后, 他曾带领土木系毕业班同学参加唐山机场跑道的兴建。后又参与了唐山市城市规划和城建工作, 写出了规划和意见书。

他到唐院后不久, 曾参加铁道部的西北坍方考察组, 西行过兰州到乌鞘岭。以后为坍方问题还几次去北京出席座谈会。

1952 年高校院系调整时, 他留在唐院(改为唐山铁道学院) 。专门从事“ 土力学与基础工程 ”课程的教学和有关的科研工作, 并任教研室主任。在当时学习苏联的浪潮中他也努力阅读苏联书刊, 听报告; 特别注意了解苏联学者在土力学理论方面的成就。因此, 他还写出论文介绍。

在这段时间, 他除教课外, 忙于黄土研究工作; 同时主持和编写教材, 以教研组名义于 1958 年出版了《土力学地基和基础》(高教出版社) 。此外, 他还编写了系统的专题补充教材《土压力讲义》和《高承台桩基矩阵计算法》。

我国在 50 年代初就开始黄土研究。稍后, 他参加了铁道系统黄土工程性质研究的计划会, 接受加载试验和原状土样三轴压力试验两个研究黄土力学性质项目。加载试验在兰州东岗镇台地上进行, 自 1957 年起前后两年, 由刘成宇、刘英堂两人长期驻工地负责。唐山实验室内试

验工作则由王滐[?] 具体进行。他则不断在两地往返。试验完毕后都由他写出长篇论文。

1954 年武汉长江大桥开工后,国内对建桥技术十分重视。南京长江大桥规划时就制订了科研计划,以后设计时各项科研题在南京陆续进行。他和教研组教师参加了一些项目,如(1)南岸引桥的试桩,(2)试验墩的管柱振沉,(3)浦镇页岩模型试验等。50 年代中到 60 年代初,他曾多次去武汉、南京。以后写出有关的论文和研究报告五六篇,有些见本选集。

1964 年铁道部决定唐院迁四川峨眉;同时又受政治形势变化影响,他感到不论教学和科研,工作都很不好做了。尽管如此,除搞些科研外,他还同刘成宇第二次编写了教材《土力学地基及基础》,1965 年由人民铁道出版社出版发行。

1966 年"文革"开始后,他随全校人员到峨眉,实际已被管制。11 月底,大多数学生主动回唐,他也被"押回"唐山。随着时日的推移,学生对我们这些老知识分子已不感兴趣,管制也逐渐取消。这期间,他除关心着形势的进展外还断断续续地进行些科研工作。他认为对我们来说,主要的应该是用业务来为祖国效劳。1971 年他曾到天津铁三院参加《铁路桥梁规范》地基与基础部分的规改组。他对地基部分提出了修订原则和进行了具体计算。1972 年 10 月回到峨眉学校(已改称西南交通大学)。

回校后,他着手研究如何从试桩资料决定土的阻力(轴向)和抗力(横向),而且又注意到结构分析的新算法。恰好这时四川省交通厅科研所邀请他去参加累积的试桩资料的研究,他愉快地为此多次到成都,定期住在他们那里工作。并向该所提出好几篇研究报告。当时成都已有 DJS-6 计算机可以使用,这促使他倾向在科研中利用机助分析。我们开始学习算法语言,从此我就用计算机为他进行各种计算和分析以节省他的时间。这样,他在峨眉山下度过了漫长的动乱时期的末段。

建国以来的历次政治运动中,他虽没正式被扣上什么"帽子",但对他的批判极其严厉。"文革"期间有一阵还受到粗暴对待。这使他迷惑不解、惴惴不安。幸而他除科学、技术外,对中外历史、文学等也有兴趣,常以读书消遣。我则以豁达的心态加以劝慰,使他消除了患得患失的心理负担,艰难的岁月终于挺过来了。直到改革开放以后,他的疑虑不安心态才逐渐消失掉。

1978 年他应邀参加建委在上海组织召开的宝山钢厂选址会议,会上一致认为上海厂址可行。他在桩基小组讨论中认为钢管桩基础是可采纳的,并提出相应的意见书。

1979 年 3 月他参加土木工程学会派遣以王序森为团长的代表团,出席英国土木工程学会召开的桩基会议和顺道参观、访问。在伦敦出席会议后在英格兰各地访问了大学(伦敦大学和剑桥大学),研究机构,咨询工程事务所,承包工程公司,打桩机制造厂和工地(包括泰晤士河拦河坝和黑姆伯河大桥)等二十多处,收获很大。归来后说,最直接的感触是当时为开发北海油田,全英都在大规模进行实验繁多的科学研究;还有英国各行各业已普遍地在应用计算机。

70 年代和 80 年代初,他不断地在写总结报告(如《关于回归分析》等)和科研论文,包括桩和桩基方面的以及结构分析方面的。这些成果中如《桩和桩基的刚度系数及其应用》被第一次全国铁路科技大会评为优秀科技论文,而他本人则被评为先进个人。此外,学校和四川省也评他为科技先进工作者。1985 年他还获得"南京长江大桥建桥新技术"首届国家科学技术进步奖特等奖的荣誉奖。

1962 年后他曾指导过研究生。1980 年我国学位研究生制度建立后,他是首批博士生导师之一。

80 年代,他把科研方向的注意力最后集中到"粒性力学的基本理论"这一论题上。这也是他多年来的宿愿。他自己说,对这样的论题,不花费大力气就决不可能获得丝毫成果。为此,他

在学习力学和数学的有关分支, 努力探索如何把它们应用到他的论题上去, 他虽已老, 看来在有生之年是会朝这方向坚定地走下去的。

西南交通大学教授　王韶华

1997 年 10 月

目　　录

1 粒性介质的极限平衡

(1954)

粒性介质或粒体(Сыпучая среда)这里指的是由个别碎粒堆积而成的物体,如土壤,谷物等。这些物体静止时若受相当大的荷重(包括自重)就要破坏,即原来是延续的物体会碎裂。恰恰到达破坏时的力学状况称为极限平衡(Предельное равновесие)。

粒体的破坏现在大家一致认为是剪断破坏,即在物体内任何连续面上各点剪应力若都到达剪强度值,那么,该物体就循这些面分裂。因此粒体的剪强度数值应如何表达是解决极限平衡问题的先决条件。

粒体内任何点的任一方向上的单位面积剪强度 s,主要是因颗粒间有表面摩擦而来,即所谓内摩擦。摩擦力和正交于摩擦面的法应力 σ成正比例;若用 tan 代表这比例常数,称 为内摩擦角,那么,

$$s=\sigma\tan$$

上式所表达的强度值在 σ,s 直角坐标上是条通过原点的直线(图 1—2 中的 s—线)。

由 $s=\sigma\tan$ 来代表剪强度值,对干的沙土和谷粒等粒体经实验证明相当准确;但对颗粒很细,潮的或受过相当压力的粒体讲因颗粒间有复杂的物理和化学作用而引起的粘结力(сцепление),它是不够全面的,即还缺了一项对某种粒体为常数的粘结力,在以后的研讨中我们将略去粒体剪强度中粘结力部分。这样做的结果使所得公式和图表等只有用于无粘结力粒体如沙土等才完全准确,粘结粒体极限界平衡的数理分析较复杂,以后有机会再介绍。

以沙为对象粒体的极限平衡问题,尤其是工程上常遇到的侧壁上横压力的计算,近百年来已经有许多人研究过。可惜过去对粒体力学的研究太偏重勉能应用的简略方法,没从力学基本理论出发来彻底解决问题。由于上述原因,同属粒体极限平衡的许多问题又被割裂成各自独立各采一套简化假定的研究对象,很难看出它们间相互关系和理论的一致性。例如现在土力学理论中所谓稳定问题,包括地基的稳定、填方和边坡的稳定和土压力等,在研究方法上看来好象是并不太连贯的独立问题,这样必不可免地限制了这类问题的理论研究的发展范围。苏联科学院通讯院士凡·凡·索科洛夫斯基(В. В. Соколовский)和其他苏联学者近年来在用基本的数学力学方法解决这些问题上有了卓越的成就。本文主要即择要介绍索科洛夫斯基最近发表的关于这问题的一些较简捷分析法。

下面所讨论的还只限于比较简单的平面问题。先简略地引述一下极限平衡的一般微分方程和它的解法,之后我们将进行解决各特殊情况的边值问题。

本文原载《土木工程学报》第 1 卷第 2 期(1954)。

一、极限平衡方程

以半无限体界限的交点为原点 O, x 轴水平向右, z 轴垂直向下, 如图 1—1 所示, 则单位体积自重等于 γ的延续传力介质中任一点 A 的应力平衡方程为:

直角坐标:

$$\frac{\sigma}{x}+\frac{\tau_z}{z}=0,\qquad (1—1)$$

$$\frac{\sigma}{z}+\frac{\tau_{xz}}{x}=\gamma$$

极坐标:

$$\frac{\sigma}{r}+\frac{1}{r}\frac{\tau_\theta}{\theta}+\frac{\sigma-\sigma_\theta}{r}=\gamma\cos\theta,\qquad (1—2)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\sigma_\theta}{\theta}+\frac{\tau_\theta}{r}+\frac{2\tau_\theta}{r}=-\gamma\sin\theta$$

图 1—1

上式中 σ和 τ分别代表该点法应力和剪应力。关于法应力符号, 我们将循研究这类问题惯例将压应力当作正的而张应力为负的。公式(1—1) 或(1—2) 是一般应力平衡方程, 不论传力介质是什么材料或是否已到达极限平衡都必须遵守。

粒体中任何点到达极限平衡的力学条件可由该点的应力圆和剪强度线相切时求出, 见图 1—2 和图 1—3。若令应力圆圆心所代表的该点不随方向变的平均法应力值为 σ_n, 即

$$\sigma_n=\frac{\sigma+\sigma}{2}=\frac{\sigma+\sigma}{2}=\frac{\sigma+\sigma_\theta}{2},$$

则极限平衡时该点任何方向的应力可由下式表达:

图 1—2

直角坐标:

$$\left.\begin{matrix}\sigma\\ \sigma\end{matrix}\right\}=\sigma_n(1\pm\sin\ \ \cos2\rho),\qquad (1—3)$$

$$\tau_z=\sigma_n\sin\ \ \sin2\rho$$

极坐标:

$$\left.\begin{matrix}\sigma\\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\}=\sigma_n(1\pm\sin\ \ \cos2\psi),\qquad (1—4)$$

$$\tau_\theta=\sigma_n\sin\ \ \sin2\psi$$

(1—1) 和(1—3) 或(1—2) 和(1—4) 式是粒体若到达极限平衡所必须同时满足的微分方程。根据它们, 再使符合适当的边界条件, 可解各问题。因极坐标形式用起来比较方便, 我们以后将以用公式(1—2) 和(1—4) 为主。

要同时满足(1—2)和(1—4)式可将(1—4)式中的应力值代入(1—2)式。有必要先来考察一下(1—4)式右边各项和变数 r, θ的关系。σ_n 对某一点讲是不变的,但这点若位置不同,它当然要跟着变化。在许多半无限粒体的应用问题中可将应力 σ_r、σ_θ 和 $\tau_{r\theta}$ 等当作和 r 成正比例变化的,即

$$\sigma_n = \gamma r f. \qquad (1—5)$$

f 为一仅随 θ变的函数 f(θ),换句话说,(1—4)式可写成

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_r \\ &\sigma_\theta \end{aligned}\right\} = \gamma r f(1 \pm \sin\ \ \cos 2\psi), \qquad (1—6)$$

$$\tau_{r\theta} = \gamma r f \sin\ \ \sin 2\psi,$$

上式中 ψ= ψ(θ)和 f 相同都是仅随 θ变的函数。

将(1—6)式各应力代入(1—2)式加以简化后得到

图 1—3

$$\sin\ \ \sin 2\psi \frac{df}{d\theta} + 2f\sin\ \ \cos 2\psi\left(\frac{d\psi}{d\theta} + 1\right) = \cos\theta - f(1 + \sin\ \ \cos 2\psi),$$

$$(1 - \sin\ \ \cos 2\psi)\frac{df}{d\theta} + 2f\sin\ \ \sin 2\psi\left(\frac{d\psi}{d\theta} + 1\right) = -\sin\theta - f\sin\ \ \sin 2\psi$$

由上列联立微分方程解 $\frac{d\psi}{d\theta} + 1$ 和 $\frac{df}{d\theta}$ 得

$$\frac{d\psi}{d\theta} + 1 = \frac{\cos\theta - \sin\ \ \cos(2\psi + \theta) - f\cos^2}{2f\sin\ (\cos 2\psi - \sin\ )}, \qquad (1—7)$$

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{-\sin(2\psi + \theta) + f\sin 2\psi}{\cos 2\psi - \sin}。 \qquad (1—8)$$

设法解联立微分方程(1—7)和(1—8)的边值问题也即我们追求的目标。但须注意,因为我们在这里假定了应力和 r 成正比例变化,所以也只有可符合这力学条件的边值问题才能用这两个公式。

还须提一下在极限平衡问题中最关重要的破坏线或裂线情形。在这些问题中我们常希望晓得裂线的形状和位置;而同时裂线又常是重要的边界条件。若用 μ代表两组裂线,或裂线的切线(当裂线是曲线时),和大主应力 σ 间所成角度,则由图 1—2 可知: $2\mu = \frac{\pi}{2} -$;又由图 1—3 可看出两裂线和径线方向成 ψ± μ角,和 z 轴成 ρ± μ角。因此,裂线的微分方程为

$$\frac{dx}{dz} = \tan(\rho \pm \mu) \text{ 或 } r\frac{d\theta}{dr} = \tan(\psi \pm \mu)。 \qquad (1—9)$$

由式(1—9)后一式可写出粒体到达限界平衡的区域中裂线方程为

$$r = C\exp\int_0^\theta \cot(\psi \pm \mu)\,d\theta, \qquad (1—10)$$

式中, C 是一常数。可以看出式(1—10)代表的裂线是对数螺旋曲线。

二、简单极限状态

简单极限状态系指裂线全是平行直线情形。裂线既是平行直线则各点主应力方向相同, ρ角为常数, ψ= ρ - θ= 常数 - θ,因此式(1—7)左边等于零,得到

$$f = \frac{\cos\theta \quad \sin \quad \cos(2\rho \quad \theta)}{\cos^2}。 \qquad (1—11)$$

简单极限状态的例子如图 1—4 所示半无限粒体面成直线而无荷重, 粒体在和界面平行方向因自重而变形后到达极限平衡。粒体界线可由 $x = - z\cot\varepsilon$

代表。在这界线上 $\sigma_n = \gamma f = 0$, 故 $f = 0$。又界线的 $\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$

由式(1—11)得到

$$\sin\varepsilon + \sin \quad \sin(2\rho \quad \varepsilon) = 0。 \qquad (1—12)$$

从上式得

$$2\rho = \varepsilon \quad \arcsin\frac{\sin\varepsilon}{\sin},$$

图 1—4

但式(1—12)同样可写作

$$\sin\varepsilon \quad \sin \quad \sin[\pi + (2\rho \quad \varepsilon)] = 0。$$

解上式得

$$2\rho = \varepsilon \quad \pi + \arcsin\frac{\sin\varepsilon}{\sin},$$

即 2ρ 可有两值:

$$2\rho = \varepsilon + (\nu \quad 1)\frac{\pi}{2} - \nu\arcsin\frac{\sin\varepsilon}{\sin}, \nu = \pm 1。 \qquad (1—13)$$

式(1—13)中用 $\nu = +1$ 所得 ρ 值是主动状态时的值, 而 $\nu = -1$ 是被动状态的。

将式(2—3)的由界线边界条件所得的 2ρ 值代入式(1—4)得粒体内任何点的 f 值为:

$$f = \frac{\cos(\theta \quad \varepsilon)}{\cos\varepsilon\cos^2}(1 - \lambda),$$

$$\lambda = \sin^2\varepsilon + \nu\cos\varepsilon \quad \overline{\sin^2 - \sin^2\varepsilon} \qquad (1—14)$$

又 $\sigma_n = \gamma f = \gamma\frac{\cos(\theta \quad \varepsilon)}{\cos\varepsilon\cos^2}(1 - \lambda)$, 若代入 $x = r\sin\theta$, $z = r\cos\theta$ 和 $d = z + x\tan\varepsilon = \frac{r\cos(\theta \quad \varepsilon)}{\cos\varepsilon}$, 得

$$\sigma_n = \frac{\gamma d}{\cos^2}(1 - \lambda). \qquad (1—15)$$

有了(1—15)式的 σ_n 和(1—13)式的 2ρ 值, 可用(1—3)式求出粒体中应力如下:

$$\begin{matrix}\sigma \\ \sigma\end{matrix} = \frac{\gamma d}{\cos^2}(1 - \lambda)(1 \pm \lambda),$$

$$\tau_z = -\frac{\gamma d}{\cos^2}\tan\varepsilon(1 - \lambda)^2。 \qquad (1—16)$$

上式中计算 λ 时, 若用 $\nu = +1$ 所得应力是主动状态的, 而用 $\nu = -1$ 是被动状态的。

若界线是水平的, 即 $\varepsilon = 0$, 则 $\lambda = \nu\sin$, 得到

$$\sigma = \gamma d, \sigma = \gamma d\frac{1 - \nu\sin}{1 + \nu\sin}, \tau_z = 0。 \qquad (1—17)$$

正和我们所熟知的由较简单理论所得的结果一样。

若界线对水平线倾斜成 角, 即 $\varepsilon =$, 则 $\lambda = \sin^2$, 没有主动和被动的分别, 其应力为:

$$\begin{matrix}\sigma \\ \sigma\end{matrix} = \gamma d(1 \pm \sin^2), \tau_z = -\gamma d\sin \quad \cos 。 \qquad (1—18)$$