土建结构优化设计

（第二版）

张炳华
侯　昶　编著

同济大学出版社

内 容 提 要

本书着重介绍结构优化设计的基本概念,且结合土建结构优化设计的实例来阐述各种常用的优化设计方法,书中还适当地反映了该领域在当前国内外的新动向。

全书共分十章。前七章为土建结构优化设计的一些主要方法,其内容有:结构优化设计的基本概论、结构优化准则法、无约束最优化方法、线性规划、非线性规划、动态规划以及几何规划;后三章是应用篇,包括:高层建筑结构的优化设计、结构的系统优化以及结构优化设计的若干探讨。前七章作为优化方法的基本理论,每章后面附有一定数量的习题。

本书可供高等院校土建、水利、桥梁等专业的高年级学生和研究生作为教材之用,也可供上述有关专业的工程技术人员参考。

责任编辑 司徒妙龄
封面设计 陈 益 平

土 建 结 构 优 化 设 计

(第二版)

张炳华 侯 昶 编著

同济大学出版社出版

(上海四平路 1239 号 邮编:200092)

新华书店上海发行所发行

同济大学印刷厂印刷

开本:787×1092 1/16 印张:18.5 字数:470 千字

1998 年 3 月第 2 版 2002 年 1 月第 2 次印刷

印数:3001—6000 定价:24.00 元

ISBN 7-5608-0058-O/TU·29

再版说明

《土建结构优化设计》的初版出版至今已整整十年了，本书在教学中得到了广大师生的认同，同时也为部分土建工程技术人员提供了自学提高的工具，深受厚爱。应广大读者的建议，本书修订出版。

1. 修订本更正原版中个别提法不妥之处，并将一些印刷错误加以纠正。

2. 补充部分新内容，力求优化方法的完整性。增加了第七章"几何规划"，应用篇中增加了"系统优化"的最新研究成果及近十年来优化设计发展的新动向。

希望本书再版后能继续为广大读者服务。由于时间匆促，并限于水平，书中难免仍存在谬误之处，热忱欢迎各界批评指正。

张炳华　侯　昶

1997.5

前　言

结构优化设计是近二十多年发展起来的一门新技术,它的出现,使设计者能从被动的分析、校核而进入主动的设计,这是结构设计上的一次飞跃。从已有经验看,与传统设计相比,用优化设计可以使土建工程降低造价 5% ~ 30%。优化设计能最合理地利用材料的性能,使结构内部各单元得到最好的协调,并具有规范所规定的安全度。同时,它还可为整体性方案设计进行合理的决策,优化设计是实现设计的最终目标——适用、安全和经济的有效途径。

土建结构优化设计是一门土建工程与运筹学交叉的学科,尽管有关结构优化的书籍目前已出版了不少,但较多的是从数学的角度来撰写的,且内容上没有充分反映土建结构设计的特点;有的虽然从工程观点来撰写,但在优化理论上,仅偏重于某一侧面。

本书是一本适合于土建类专业的教材以及从事土建工程的专业人员的读物,它具备如下特点:

1. 用土建工程的观点比较全面地介绍结构优化设计的理论与方法。注重方法的使用及物理概念,在方法的数学推导方面或采取删繁就简的原则,或辅以直观的图表说明,或以人们熟悉的代数解法作为过渡,尽量回避冗繁的数学论证和高深的数学理论。

2. 重视实际应用。本书前七章叙述各类优化方法时,或先提出土建结构优化设计的数学模型,然后讲述方法;或在叙述方法后,列举土建结构优化设计的工程实例。本书最后三章是结合土建结构优化设计的应用篇,特别是提出了优化设计在具有普遍意义的标准设计及总体设计方案方面的运用。

3. 每章之后附有小结和习题,可帮助读者复习、总结和供基本训练之用。

4. 本书基本上采用国际单位制(SI),考虑到历史与习惯的因素,有些论文发表在新的钢筋混凝土规范问世之前,所以,本书有些实例仍沿用米制单位。在本书的附录中列出了国际单位制与米制单位制的对照表。

本书内容一部分取材于国内外有关文献,注意反映最近几年来国内外结构优化研究的新成就和新动向;一部分是笔者结合土建工程实际所得的研究成果。全书共分十章:第一章——结构优化设计的基本概论;第二章——结构优化准则法;第三章——无约束最优化方法;第四章—线性规划;第五章——非线性规划;第六章——动态规划;第七章——几何规划;第八章——高层建筑结构的优化设计;第九章——结构的系统优化;第十章——结构优化设计的若干探讨。其中,第二、五、六、九章由南京建筑工程学院侯昶执笔;第一、三、四、七、八、十章由同济大学张炳华执笔。全书由张炳华统稿。

本书承同济大学管理学院沈荣芳教授细心审阅,提出了不少宝贵意见,特致谢忱。

由于笔者水平有限,书中难免存在不妥之处,希望读者批评指正。

张炳华　侯　昶

1986.10

目　　录

第一章 结构优化设计的基本概论

人们已熟知传统的结构设计，而结构优化设计的思想方法与传统的结构设计则完全不同。因此，本章的任务首先是阐明结构优化设计与传统的结构设计的区别；继而建立结构优化设计的数学模型；并通过结构实例介绍几种简单的优化方法，以使读者直观而形象地确立结构优化设计的基本概念。

§1-1 结构设计和结构优化设计

传统的结构设计，实际上指的是结构分析，其过程大致是假设—分析—校核—重新设计。重新设计的目的也是要选择一个合理的方案，但它只属"分析"的范畴；且只能凭设计者的经验作很少几次重复以通过"校核"为满足。

结构优化设计指的是结构综合，其过程大致是假设—分析—搜索—最优设计。搜索过程也是修改设计的过程，这种修改是按一定的优化方法使设计方案达到"最佳"的目标，是一种主动的、有规则的搜索过程，并以达到预定的"最优"目标为满足。

下面举一个简单的例子来说明：图 1-1 所示为一矩形等截面简支钢梁。$E = 2.1 \times 10^5$MPa，$\rho = 78$kN/m^3，$[\sigma] = 200$MPa，梁高 h 大于 16cm，梁宽 b 大于 8cm，跨中最大挠度 $\delta_{max} \leqslant 0.0035l$。问在跨中集中荷载作用下，如何设计这根梁？

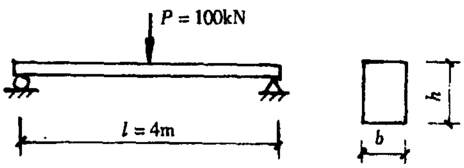


图 1-1

传统的结构设计是按所受的外力 P、根据受弯构件的的强度条件$\frac{M_{max}}{S} \leqslant [\sigma]$来选择抗弯模量 S 的。对于矩形截面，$S = \frac{1}{6}bh^2$，然后再根据结构要求或设计规范，先确定一个 h（或 b），再确定 b（或 h）。这样一组 h，b 还需通过刚度校核，即$\frac{Pl^3}{48EI} \leqslant 0.0035l$，校核满足，那么，作为结构设计的任务就告完成；如校核不满足，则需另外选择一组 h，b 再行校核。根据设计经验，进行有限次选择后，总能得出既满足强度条件、又满足刚度条件的截面尺寸。从这里可以看出，传统的结构设计没有把设计所追求的目标与应满足的条件有机地联系起来，因此，一般地说，得出的不一定是最优设计。结构优化设计则是从另一角度提出问题：由已知条件 $b \geqslant 8$cm，$h \geqslant 16$cm，截面可以有无数组组合，但其中必有一组组合既满足强度条件又满足刚度条件，且重量最轻，也就是最优的截面。由于结构优化设计把设计所追求的目标（重量最轻）与应满足的条件有机地结合起来，用优化方法去搜索，直至达到最优的目标，因此，得到的是最优设计。为了说明问题，图 1-2 表示这个问题的图解过程。在图 1-2 中，以变量 h 为纵坐标，变量 b 为横坐标，直线 b-b 和 a-a 分别表示几何尺寸 h，b 的限制，曲线①-①和②-②分别表示强度条件、刚度条件的限制。至此，满足梁高 h 和梁宽 b 的几何尺寸的约束

条件以及梁的强度、刚度等约束条件的可行区域都可用几何曲线表示出来。

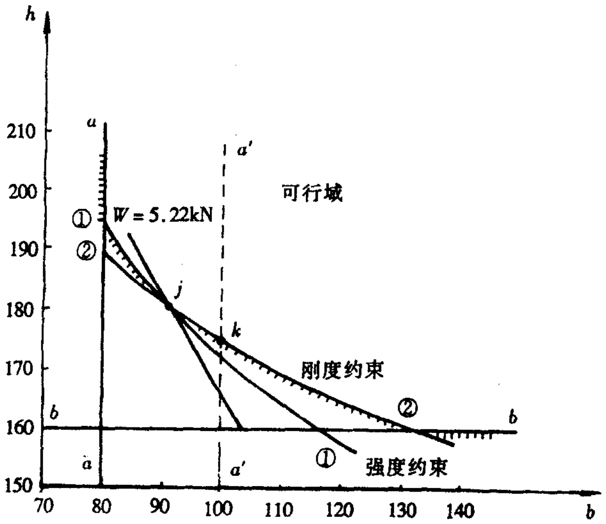


图 1-2(单位:mm)

为了设计最轻重量的梁,应把梁的重量 W 表示为变量 h,b 的函数:

$$W = \rho lhb = 0.0312hb(\text{kN}) \tag{1-1}$$

若赋予 W 以一系列确定的值,则由方程式(1-1),可以在 h,b 设计空间中得一等值曲线族。由于梁的最轻设计应同时满足上述几何约束条件、强度条件、刚度条件。因此,最轻重量的等值线应位于可行区域的极限位置。并且落在梁的强度曲线和刚度曲线相交的顶点 j 上(图 1-2),与此优化设计点 j 相应的梁重量 W^*,梁高 h^*,梁宽 b^* 分别为

$$W^* = 5.22\text{kN}, \quad h^* = 18.16\text{cm}, \quad b^* = 9.1\text{cm}$$

若将 $b \geqslant 8\text{cm}$ 的几何约束条件改为 $b \geqslant 10\text{cm}$,则重量最小的优化设计点将位于几何约束条件 a'-a' 和刚度条件的交点 k 上,在这种情况下,相应的梁重量 W^*,梁高 h^*,梁宽 b^* 分别为

$$W^* = 5.49\text{kN}, \quad h^* = 17.6\text{cm}, \quad b^* = 10\text{cm}$$

上例说明:

1. 约束条件变了,最优点一般也要发生变化。

2. 最优点总位于某一或某些不等式约束成为等式约束的边界上。

十分明显,传统的结构设计只要在这可行域中任意取一点都符合设计要求;但“设计”一词本身包含有“优化”的意思,一个设计者总想把设计做得既安全、又经济,光凭经验显然是不能达到这个目的的。结构优化设计则要求在可行域内用优化方法去搜索所有的设计方案,并从中找出最优设计方案。从这里也可看出,结构优化设计并不是把结构薄弱环节的潜力挖尽,而是追求最合理地利用材料的性能,使各构件或构件中各几何参数得到最好的协调。它与传统的结构设计一样,都满足有关规范的一切条件,因而完全具有规范所规定的安全度,只不过结构设计是一种仅从经验出发的被动校核,而结构优化设计是经验与优化理论相结合的主动搜索。

§1-2 结构优化设计的数学表达式

我们将§1-1列举的简支钢梁例子进行结构优化设计，可以写成如下数学形式：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{求设计变量} & h, b \\ \text{使目标函数} & W = \rho l h b \longrightarrow \min \\ \text{且满足强度约束} & \dfrac{M_{\max}}{S} \leqslant [\sigma] \\ \quad\text{刚度约束} & \dfrac{Pl^3}{48EI} \leqslant 0.0035l \\ \quad\text{界限约束} & h \geqslant 16\text{cm}, \quad b \geqslant 8\text{cm}\end{array}\right\} \tag{1-2}$$

若令

$$x_1 = h, \quad x_2 = b, \quad X = (x_1\ x_2)^{\mathrm{T}}$$

$$f(X) = f(x_1, x_2) = W(h, b)$$

并用 $g(X) \leqslant 0$ 统一表示约束条件，于是式(1-2)可以表示成如下数学形式：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{求} & X = (x_1\ x_2)^{\mathrm{T}} \\ \min & f(X) \\ \text{s.t.}^{①} & g_j(X) \leqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,m) \\ & x_1 \geqslant a_1, \quad x_2 \geqslant a_2\end{array}\right\} \tag{1-3}$$

式(1-3)即为结构优化设计的一般数学表达式。从这个数学表达式中，可以看出结构优化设计有三大要素：设计变量、目标函数和约束条件。

一、设计变量

一个结构设计的方案是由若干个数量来描述的，根据具体情况，这些数量可以是各个构件的截面尺寸、面积、惯性矩等设计截面的几何参数，也可以是柱的高度、梁的间距、拱的矢高和节点坐标等结构总体的几何参数，以及诸如材料的弹性模量、混凝土标号等选用材料的参数。这些数量中的一部分是按照某些具体要求事先给定的，它们在优化设计过程中始终保持不变，称为预定参数；另一部分在优化设计过程中可视为变量，称为设计变量。式(1-2)中，$P, l, E, [\sigma]$等均为预定参数；h, b 则为设计变量。关于设计变量，可以是连续的，也可以是离散跳跃的。遇到离散的设计变量，如结构中有关尺寸要符合模数的要求，为了简化计算，有时可以权宜地视为连续变量，而在最后决定方案时，再选取最为接近的离散值。

为了便于矩阵运算，可以用设计向量表示 n 维设计变量，即

$$X = (x_1\ x_2 \cdots\ x_n)^{\mathrm{T}} \tag{1-4}$$

一个设计向量代表一个设计方案，它的 n 个分量可以组成一个设计空间，于是，一个设计向量在相应的设计空间中可用一个点表示，这个点在设计空间中的 n 个坐标也就是这个向量的 n 维分量。

二、目标函数

目标函数有时称价值函数，它是设计变量的函数。有时设计变量本身是函数，则目标函

① s.t.为 subject to 之缩写，表示“受……之制约”(或称“满足……”)。

数所表示的是泛函。

目标函数是用来作为选择“最佳设计”的标准的，故应代表设计中某个最重要的特征，大多数结构设计将结构最轻取为目标。如果结构的造价和维护费用等能够确切定量，而且“经济”是工程的主要矛盾时，则应进行最经济设计。但也有这种情况，材料的重量并不是矛盾的主要方面，在设计中主要需突出某一性能：如对动力基础的设计，关键在于使机器的运转处于最佳状态，这时可把结构的振幅最小或机器与结构之间的相对振幅最小取作目标函数；如对长桩吊点位置的优化中，选择最好的吊点位置，使长桩在吊运、吊立过程中桩的最大内力（弯矩 M）最小。总之，目标函数随着问题的要求不同，表现的形式也是不一样的，因此，具体情况需进行具体分析。

在某些设计中，可能出现两个以上的目标，这时可以采取：

1. 构造一个复合的目标函数

例如，最轻重量设计不一定最经济，最经济不一定重量最轻，同时考虑结构的重量和造价，则目标函数可以写成

$$f(X) = \alpha(\text{重量}) + \beta(\text{价格}) \tag{1-5}$$

其中，α，β 为权系数。随问题的性质，权系数可取不同的数值，这个方法的难处在于如何找到合理的权系数。同时要注意排除量纲的影响：例如 A 以 kN 为单位，而 B 以元为单位，A，B 间有一定的配合关系，$A+B$ 可能是一个完全可接受的目标函数，但若改用 N 来度量 A，情况就不一样了。

2. 对目标函数之一加上限制并把它当作一个约束

根据问题的性质，权衡比较，抓住一个主要目标，而让其他一些目标满足一定的要求即可，这样就把多目标问题简化成单目标问题。例如，在圆平板传感器的结构设计中，结构的重量不是主要矛盾，而它的工作性能是重要的设计因素。因此，我们把传感器的灵敏度选作目标函数，把强度、刚度等条件均处理为约束条件，而不提重量“目标”。

3. 直接按多目标问题处理。

三、约束条件

在结构设计中应该遵守的条件称为约束条件。约束条件大体上可以分为三类：

1. 结构静力分析中的平衡方程、变形协调方程；动力分析中的运动方程，等等。这类约束都呈现为等式约束。

2. 保证结构正常工作的强度、刚度和稳定条件，即对应力和位移的限制。呈现为 $\leqslant$ 类的不等式约束。

3. 满足设计规范的有关要求，如在钢筋混凝土构件的优化设计中，要满足最小厚度、最小高度、最小含钢率等等构造要求，这类约束可以是 $\leqslant$ 类的不等式约束，也可以是 $\geqslant$ 类的不等式约束。有时，称它为界限约束。

满足约束方程 $g_j(X)=0$ 的 X 值的集合在设计空间内形成一个超曲面。这个超曲面的意义是：把设计空间分成两部分，一部分 $g_j \leqslant 0$ 构成可行区域；另一部分 $g_j > 0$ 是不可行区域。结构优化设计就是在可行区域内（包括边界点），寻找使目标函数 $f(X)$ 最优的设计向量 X^*。

在最一般情况下，可以引进性态变量的概念。在结构优化设计中，随着结构方案的改

变，设计变量和结构反应也在改变，这种结构反应或称描述结构性态的量（如应力、位移、频率、失稳临界荷载等）称为性态变量。于是在结构优化设计的最一般数学模型中可采用包括设计变量 X 和性变变量 Y 的组合向量，即

$$\begin{aligned} Z &= (X\ Y)^{\mathrm{T}} = (x_1\ x_2 \cdots\ x_u \quad y_1\ y_2 \cdots\ y_v)^{\mathrm{T}} \\ &= (z_1\ z_2 \cdots\ z_{u+v})^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{1-6}$$

而将结构优化问题转化为

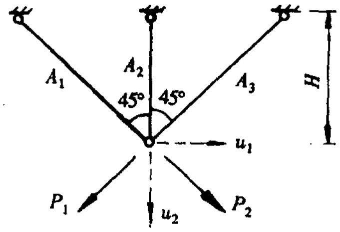
$$\left.\begin{array}{ll} \text{求组合向量} & Z = (z_1\ z_2 \cdots\ z_{u+v})^{\mathrm{T}} \\ \min & W(Z) \\ \mathrm{s.t.} & q_j(Z) \leqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,m) \\ & h_k(Z) = 0 \quad (k = m+1, m+2, \cdots, p) \end{array}\right\} \tag{1-7}$$

这种整体提法的数学模型在利用函数梯度的优化方法中显得方便些①。

实际上，式(1-3)表达的数学模型是整体提法（或称组合变量空间的数学模型）的特殊情况。

例如，图 1-3 所示三杆桁架，有两种工况。在两种工况中，杆 2 的工作情况均不变，于是只要计算工况 I 即可，即 $A_1 = A_3$，剩下两个设计变量 A_1, A_2，取结点位移 u_1 和 u_2 为性态变量，则组合向量为

$$Z = (A\ U)^{\mathrm{T}} = (A_1\ A_2\ u_1\ u_2)^{\mathrm{T}}$$



$P_1 = P_2 = P$

图 1-3

现把 u 当作基本未知量，根据位移法，变形协调条件自然得到满足，所以等式约束只有平衡方程和物理方程。这样便得出如下的数学模型：

$$\begin{array}{ll} \text{求组合向量} & Z = (A\ U)^{\mathrm{T}} \\ \min & W = \rho H(2\sqrt{2}A_1 + A_2) \end{array}$$

s.t. 平衡方程

$$\frac{E}{\sqrt{2}H}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 + \sqrt{2}A_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{P}{\sqrt{2}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

物理方程（应力应变关系）

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{E}{2H}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

强度约束

$$\sigma \leqslant [\sigma]$$

位移约束

$$u \leqslant [u]$$

界限约束

① 参看 E.J. Haug and J.S. Arora《Applied Optimal Design》John Wiley and Sons, 1979.

$$\overline{A} > A > \underline{A} \quad (\overline{A}, \underline{A} \text{ 为 } A \text{ 的上、下界})$$

由于解等式约束实际上就是结构分析的内容，可以把它从上述数学模型中分离出来，用一个子程序来完成，然后把求出的应力和位移代入应力约束和位移约束的方程中去，这样就只剩下不等式约束，这时，优化设计的数学模型就变为

求设计变量 $A = (A_1\ A_2)^T$

min $W = \rho H(2\sqrt{2}A_1 + A_2)$

s.t. $\sigma(A) \leqslant [\sigma]$

$u(A) \leqslant [u]$

$\overline{A} > A > \underline{A}$

在土建结构优化设计中，经常用到由式(1-3)表达的设计变量空间的数学模型。

§1-3 结构优化设计的几种简单解法

例 图 1-4 所示一对称的两杆桁架，在桁架的顶点承受的荷载 $2P = 600\text{kN}$，支座之间的水平距离为 $2B = 6\text{m}$，若预先选定壁厚 $T = 0.005\text{m}$，钢管的弹性模量 $E = 2.1 \times 10^5\text{MPa}$，钢材容重 $\rho = 78\text{kN/m}^3$，容许应力$[\sigma] = 160\text{MPa}$，根据工艺要求 $6\text{m} \geqslant H \geqslant 2\text{m}$。试选择管径 D 和桁架高 H，使得在满足强度要求与稳定要求的约束下桁架重量最轻。

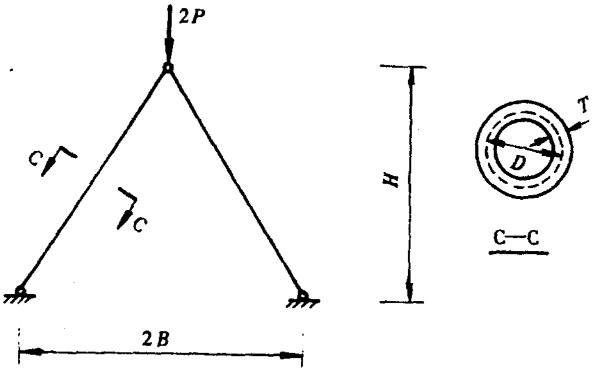


图 1-4

解 根据上一节的定义可写出优化的数学表达式：

求设计变量 D, H

min $W = 2\rho\pi DT(B^2 + H^2)^{1/2}$ (1)

s.t. 强度约束 $\dfrac{P(B^2 + H^2)^{1/2}}{\pi TDH} \leqslant [\sigma]$ (2)

稳定约束 $\dfrac{P(B^2 + H^2)^{1/2}}{\pi TDH} \leqslant \dfrac{\pi^2 E(D^2 + T^2)}{8(B^2 + H^2)}$ (3)

工艺约束 $6\text{m} \geqslant H \geqslant 2\text{m}$ (4)

下面介绍几种简单方法，讨论其解。

一、图解法

对二维问题，总可用图解法来解决。在上面的例题中，令式(2)，(3)分别成为等式，在以 D 为横坐标、H 为纵坐标的设计空间中，可以分别作出强度约束曲线 m-m、稳定约束曲线 n-n，如图 1-5 所示。图中 s-s，p-p 分别为上、下界限约束，于是可以得出阴影线的右侧为满足约束的可行域。再由式(1)，先假定一个 W 值，然而每定出 D，H 中的一个值，就可对应地

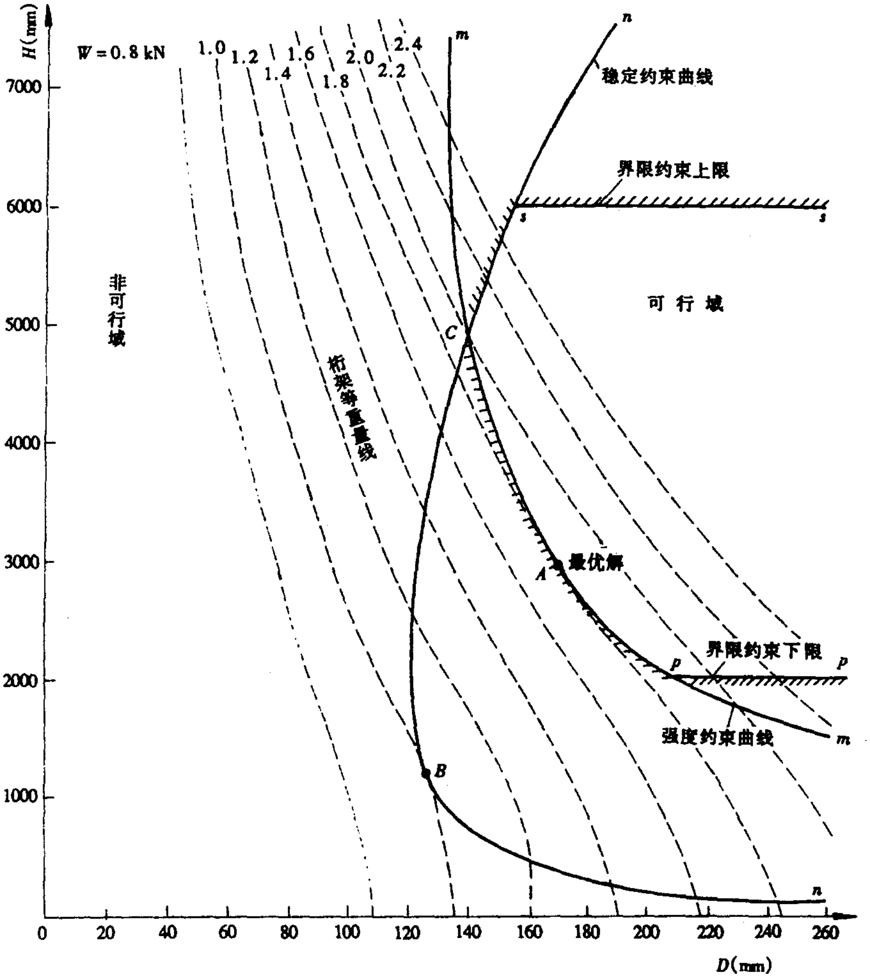


图 1-5

求出另一值，这样就可作出 W = 常数的一条曲线。类似地，可以得出在 D，H 设计空间中 W 为一系列常数值的等值曲线族。这一族曲线与可行域最外边界相切，切点 A 为满足各种约束条件的最轻设计。与此相应的最优解为

$$W^* = 1.769\text{kN}, \quad D^* = 0.169\text{m}, \quad H^* = 3\text{m}$$

图中 C 点不能算最优设计点，因为它满足约束条件，但不符合重量最小的原则。从这里可以看出最优设计点要求：

1. 在可行域之内。

2. 满足重量最小的条件。

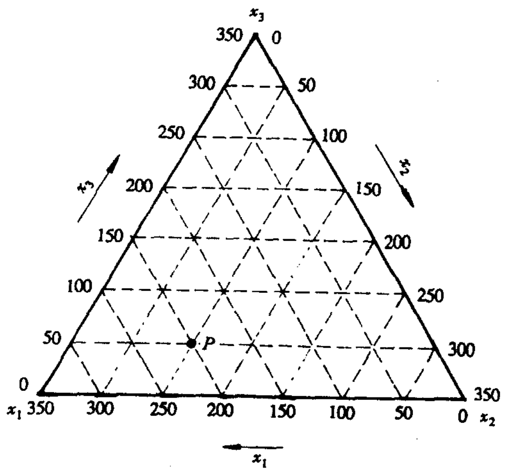


图 1-6

目前,对三维问题,只要满足一定条件,也能采用图解法。下面简单地介绍一下三角坐标系统的图解法:取等边三角形,三角形每边代表一个变量,三个变量的每一组组合在三角形中有一相应点,这个点在三角形边上的坐标分别表示三个变量的大小,如图 1-6 中,p 点的三角坐标是 $x_1 = 200, x_2 = 100, x_3 = 50$。

用三角坐标系统图解法有两个条件:

(1) 变量数目不多于三个,而不管约束数量多少。

(2) 约束中有一个约束应具有 $x_1 + x_2 + x_3 =$ 常数的形式。以此约束条件可以确定每边坐标的标量值,如在图 1-6 中,每边的始、终点值分别为 0,350,是根据约束条件

$$x_1 + x_2 + x_3 = 350$$

定出的。余下的作图方法与二维问题完全一样,这里不再赘述。

二、计算函数的极值

在图 1-4 表示的例题中,运用这一方法,必须事先把一组约束不等式变为等式形式的约束方程式,然后利用它消去目标函数中的若干变量,使得重量 W 成为一个变量的函数,这样,便可用求函数最小值的方法,得到优化设计方案。究竟把式(2)变为等式呢,还是把式(3)变为等式,即最优点落在式(2)表示的约束曲线上呢,还是落在式(3)表示的约束曲线上,那是要通过比较才能确定的。如把式(2)取为等式,解出 $D = D(H)$,代入式(1),经整理得

$$W = \frac{261}{H} + 29H$$

利用
$$\frac{dW}{dH} = -\frac{261}{H^2} + 29 = 0$$

求得
$$H = 3\text{m}, \quad D = 0.1687\text{m}, \quad W = 1.769\text{kN}$$

这个解相应于图 1-5 中的 A 点,把求得的 D, H 值代入式(3),式(3)是满足的,此解就是最优解。

若设最优解落在式(3)的约束曲线上,则把式(3)取为等式,解出 $D = D(H)$,代入式(1),得

$$H = 1.34\text{m}, \quad D = 0.125\text{m}, \quad W = 1.01\text{kN}$$

这个解相应于图 1-5 中的 B 点,把 D, H 值代入式(2),式(2)不成立,因此它是不可行解。

若式(2)和式(3)均为等式,相应的解应在强度约束曲线和稳定约束曲线的交点上,如图 1-5 中的 C 点,此解虽然满足约束条件、但重量不是最小,显然不能算最优解,通过比较,得出 A 点才是问题的最优解。

由于难于预料最优点落在哪一条约束曲线上;且变量增多,求极值后还需解非线性联立方程组,因此,这种方法只能解简单的问题。

三、同态设计准则

同态设计是以某些破坏形态同时出现的所谓"同时破坏方式理论"作为最优设计依据的。在上例中,即使

强度约束 $\sigma=[\sigma]$

稳定约束 $\sigma=\sigma_e$ （σ_e——失稳临界荷载）

作为优化的设计准则,解上述联立方程,即可求得

$$H=4.78\text{m},\quad D=0.14\text{m},\quad W=1.95\text{kN}$$

这一点相当于图 1-5 中的 C 点。

同态设计认为最优点位于某些约束曲线的交点上,但上例最优点恰在强度约束曲线上,所以,同态设计不一定是最优设计。

同态设计把不等式约束用等式约束来代替,从而缩小了可行的设计空间,一般地说,由它得到的解只能劣于原问题的解。特别当各个约束是独立的、且 m(约束数) > n(变量数)时,则同态设计可以无解,而原问题依然有解。但在实际工程中确有大量结构构件,特别是受压构件可以用同态设计准则来处理[1],此时,当问题的约束数与变量数相等时,优化设计便简单地变成求解一组代数方程;当约束数大于变量数时,要凭藉设计者的经验,去掉一部分约束(即区分主动约束、被动约束),解出变量后,再以去掉的约束作检验;如约束数小于变量数时,则要寻找变量间的关系,补充约束方程。

其次,同态设计还为优化准则法提供了十分有益的思想方法。

四、网格搜索法

网格搜索法是一种直观而原始的方法,它把问题在一定范围内划分成"网格点",每一点代表一个设计,网格搜索法就是按一定规律循序进行搜索,从中找出最好的网格点作为最优解。下面结合上例来进行讨论。已知

实际应力 $$\sigma=\frac{P(B^2+H^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi DTH}=\frac{19.1}{DH}(9+H^2)^{\frac{1}{2}}\quad(\text{MPa})$$

临界应力 $$\sigma_e=\frac{\pi^2E(D^2+T^2)}{8(B^2+H^2)}=2.59\times10^5\times\frac{D^2}{9+H^2}\quad(\text{MPa})$$

桁架重量 $$W=2.47D(9+H^2)^{\frac{1}{2}}$$

搜索过程可以列表进行(表 1-1)。网格搜索法迭代步骤如下:

1. 选择一定的范围,把变量 D,H 均分,形成网格。网格的大小,视精度而定。

2. 根据具体情况,先固定一个变量,如 $H=2\text{m}$,然后令 D 由小到大进行验算,每点要验算强度和稳定是否满足,这里先验算强度,如果它不满足,稳定就不用验算,这样一直到强度验算满足,如 $H=2\text{m}, D=0.22\text{m}$。这时就要验算稳定是否满足,如果满足,这一点就是可行的设计点,而且在这一行里,它是最轻的,计算该点的重量。若稳定不满足,则还需放大尺寸,直到稳定约束满足为止。仿此步骤搜索第二行、第三行……。表 1-1 中虚线右面表示可行设计。

表 1-1

H(cm)		D(cm) 10	12	14	16	18	20	22
200	σ σ_e W	344.3→	286.9→	245.9→	215.2→	191.2→	172.1→	156.5 ↓ 964.2 ↓ 1.99kN
250	σ σ_e W	298.4→	248.6→	213.1→	186.5→	165.7→	149.1 ↓ 740 ↓ 1.93kN	
300	σ σ_e W	270.1→	225.1→	192.9→	168.8→	150 ↓ 466.2 ↓ 1.89kN	可	
350	σ σ_e W	251.5→	209.6→	179.7→	157.2 ↓ 312 ↓ 1.82kN		行	
400	σ σ_e W	238.8→	198.9→	170.5→	149.2 ↓ 265.2 ↓ 1.98kN	设		
450	σ σ_e W	229.5→	191.2→	164→	143.4 ↓ 226.7 ↓ 2.14kN	计		
500	σ σ_e W	222.7→	185.6→	159.1→ ↓ 149.3↗	139.1 ↓ 195 ↓ 2.30kN			
550	σ σ_e W	217.6→	181.3→	155.4→ ↓ 129.1↗	136 ↓ 168.9 ↓ 2.48kN			
600	σ σ_e W	213.5→	178→	152.5→ ↓ 112.8↗	133.4 ↓ 147 ↓ 2.64kN			

3. 在可行解中，挑选重量最轻的点，即为最优解。本例为

$$H^* = 3.5\text{m},\quad D^* = 0.16\text{m},\quad W^* = 1.82\text{kN}$$

此最优解与实际最优解相比有一定差异，原因是最优解一般不在网点上，即使网点分得再小，也不一定刚巧得到真正的最优解，极大多数情况，只能得到近似的最优解。

网格搜索法计算工作量大，且带有一定的近似性。但其计算原理简单，编制程序也很方便，因此，对于变量数较少的优化问题，此法仍受人们的青睐。为了加快网格法的收敛速度，可以采用分片网格法，即先把网格分得粗一点，然后在局部区域加密网格，提高搜索的精度。