

第一章 绪 论

§ 1.1 土 - 结构相互作用分析的目的

结构动力学研究的是确定在动荷载下结构应力和位移的计算方法。由于结构尺寸是有限的，故能较容易地确定一个具有有限自由度的振型，列出对应离散结构的运动方程，并用已有的一些成熟方法即可求得它们的解。但是，结构与周围的土之间通常会产生相互作用，因此，单独分析结构是不够的。在许多情况下（如地震），动荷载是作用在结构周围的土上的，这就说明必须对土加以模拟。土是一种半无限介质，属无界域。对于静荷载，可以引入虚边界这一概念，它处于离结构足够远的地方，荷载对它的影响在实用上可忽略不计。于是，土变成了有限域，可以用对结构的类似方法对土加以模拟。这样一来，就能直接对由结构和土组成的整个离散体系进行分析。但是，这种方法不适用于动荷载的情况，因为这个虚拟边界会将由振动结构所传出的波反射到已离散的土中而不让它们透过边界传至无穷远。因此，需要对无界基础介质作适当的模拟，这正是土动力学与结构动力学的不同之处。

土 - 结构相互作用分析的基本对象如图 1.1 所示，

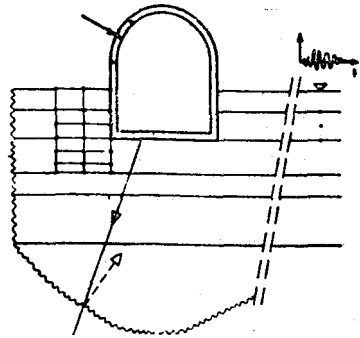


图 1.1 土 - 结构相互作用分析的基本对象

它表示一个层状土中的埋置结构受一个随时间变化的荷载作用。计算结构和土的动力反应时，考虑了模型边界上波能量的向外辐射。图中示意性地表示了结构和土域的离散模型，由层状半空间表示的半无限土域能反映出能量的损失情况。

§ 1.2 设计（地震）荷载的类型

直接作用在结构上随时间而变化的荷载有多种：由建筑内部转动机械所产生的周期荷载、冲击荷载（如飞机撞击一个核电站（虽然发生这种事件的可能性很小，但它还是控制核电站的设计），爆炸荷载等等。看来地震激励是最重要的荷载，分析起来也一定最复杂，它主要作用在土上。

地震由位于断层上的一定体积的岩石突然释放能量而产生，震源通常离场地很远，并且在相当深处。即使地震发生机制和地震波传播到场地的路径资料非常清楚（实际上并非如此），要详细地模拟它仍然是不可能的，因为与结构相比，整个区域的尺寸实在太大了。总而言之，所包含的许多不确定因素使得分析整个地震震源问题显得没有什么意义。

当今的地震工程科学水平只允许考虑当地的场地条件对地震输入运动的影响。通常的分析步骤可概括如下：决定位于自由场（在建造建筑物之前未经开挖的场地）表面控制点的地震动（如随时间变化的加速度），如图 1.1。为了做到这一点，就要评价这一区域的震害情况，由结构工程师或有关部门确定可以接受的概率。这一概率反映在结构整个使用年限内超出设计地震的程度，概率大小取决于结构的种类。对一个有潜在灾害的结构，如核电站，这个概率值要选得很小；对于那些在地震时仍须完全正常使用的结构（如医院或消防队），这个概率能取稍大一点的值。但在具体设计中还需要能表征地震动的最重要参数（如地面峰值加速度）。其它参数，如地震持续时间和频率成分，大多由

工程地震工作者根据这个地区以往的地震凭经验加以确定。做这些工作时，须粗略地考虑震源机制、传播路径、当地的地质条件和场地的土质条件。以上各点均是在土 - 结构相互作用实际分析之前进行的，从中定出所选控制点的设计地震动。最大不确定的因素就产生在此初始阶段。人们不得不作一些相当任意但具有广泛影响的假设。但是，讨论地震工程中这些非常重要的问题已超出本书的研究范围。

为分析土 - 结构相互作用，就得有一个从所要分析的场地或至少是从类似场地的观测记录中导出的设计地震动。从一点的这个控制运动出发，可以计算整个自由场的地震动（即时、空的变化）。在讨论场地地震反应时会明显看出，只有对控制点的波型作相当任意而又能为人接受的假设后，才能做到这一点。这些受上述工程地震工作者观点影响的假设会影响控制点以外自由场反应的振幅和频率成分，但所有的解都与当地土质条件相适应。例如，假设地表控制点的运动由竖向传播的波所引起，则自由场运动随深度的变化就可由计算得到（图 1.1）。在这种情况下，水平方向的运动是均匀的。除了影响自由场地震反应外，当地的土质条件也影响土 - 结构体系的实际相互作用。土的开挖和结构的建造会改变土的动力体系，结构在埋设的界面上与土发生相互作用会改变自由场的地震动。在分析土 - 结构相互作用前，作用在结构上的地震动是未知的。总之，分析地震激励下土 - 结构相互作用包括两个不同的方面：第一，确定场地的自由场反应；第二，计算在地震环境下自由场上建有结构后地震动的改变和实际相互作用。在以后的章节里大多考虑地震作用，而直接作用在结构上的荷载将作为特殊情况来考虑。

§ 1.3 土 - 结构相互作用的影响

为说明土 - 结构相互作用的主要特征，现将建在基岩上和埋

置于土中相同结构的动力反应作一比较。当然，现阶段尚只能作出定性的分析。两个带有刚性基础的相同结构（由底板和边墙组成）如图1.2a所示，土层在基岩的上面。由于两个结构之间的距离很小，可以假设在基岩中从震源传来的入射地震波对两个结构是相同的。为简化起见，只考虑竖向传播的波所引起的水平运动。质点的运动在图1.2中用实心箭头表示，箭头长度与地震大小成正比。把控制点选择在基岩的自由表面（点A）。从实用角

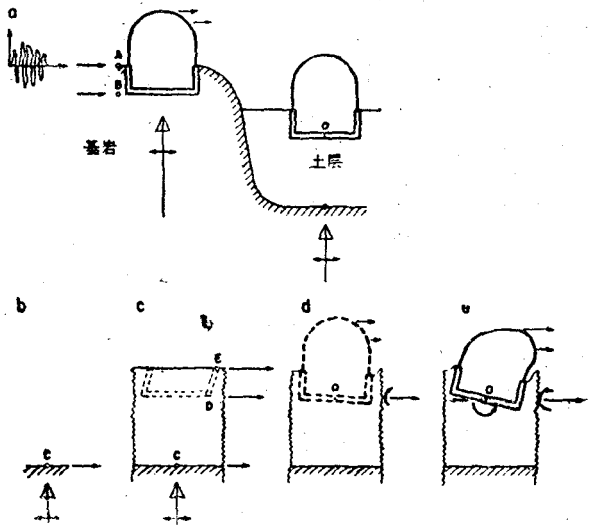


图 1.2 置于基岩和土上两个结构的地震反应
 (a) 现场 ; (b) 基岩露头 ; (c) 自由场 ;
 (d) 刚体相互作用 ; (e) 惯性相互作用

度看，整个基岩的运动（如点B）都是一样的。

对于建在基岩上的结构，水平运动可以直接作用在结构的基底上，产生水平惯性荷载的输入加速度在整个结构高度内都是常量。地震时，有一个倾复力矩和水平剪力作用在结构的基底上。因为基岩刚度很大，这两个应力的合力不会在基底产生任何附加

变形，所产生的基础水平位移也就与控制点的相等，并不会发生摇摆运动，对于给定的控制运动，结构的动力反应只与结构的性质有关。

对于建在软土上的结构，基底上的O点的运动（图1.2a）与控制点A的运动不同，因为土-结构体系存在耦合运动。为了弄清土是怎样影响结构动力反应的，不妨将以下三方面的影响区分开来。第一，自由场的动力反应有所改变（图1.2c）。如果图1.2c中基岩C点上面没有土层，图1.2b所示的虚拟基岩露头的运动就与A点基岩的控制运动几乎没有什么区别。土层的存在会减小C点的运动（图1.2c）。波通过土层垂直向上传播，结果使得D点和E点的运动与C的不同，自由场中的D，E点在结构建造以后位于土-结构交界面即基础上。运动通常被放大，但也并非总是如此，而是取决于它的频率成分，从而随着与自由表面的接近，水平位移逐渐增大。第二，开挖并在土中埋置刚性基础也会改变土的运动（图1.2d），而对刚性基础将产生一个平均的水平运动和一个摇摆运动。与建在基岩上的结构受加速度作用情况不一样，这种刚体运动产生的加速度（会产生惯性荷载）沿整个结构的高度是变化的。这个地震输入运动的几何平均值就是由所谓的刚体相互作用所产生，以后将对此进行详细讨论。第三，作用在结构上的惯性荷载在O点将产生倾复力矩和水平剪力（图1.2e）。它们使土体产生变形，这样又进一步改变基础的运动，此定义为“惯性相互作用”。

图1.2还说明了考虑土-结构相互作用后的主要影响。首先，作用在结构-土体系的地震输入运动会发生变化（图1.2d）。由于场地的放大效应（自由场反应），在很多情况下，平动分量会大于控制运动，对于埋置结构也会产生相当大的摇摆运动分量。然而，对应于不同的运动频率，所受的影响是不同的，从而使得它们的加速度时程与控制运动的加速度时程有很大不同。这种地震动的放大效应可用来解释如下事实：地震时建在厚软土地地上的、

结构所受的破坏比建在临近基岩上的结构所受破坏要厉害得多。

第二，在最终的动力分析中（图1.2e），由于土的存在，体系变得更加柔性，使其基频通常减至远低于基底固定时结构的基频。在有些情况中，基频会移至相应于高频震源频率范围以下，从而使结构所“感觉”到的地震输入显得相当地小，并且振型也会有所改变。基底所产生的摇摆振动会影响结构的动力反应，特别是在高耸建筑物的顶部。第三，从结构物向外传播的波能辐射会增大最终动力体系的阻尼（图1.2e），对于一个近似弹性半空间的土壤场地，这种阻尼的增加很明显，导致动力反应急剧降低。对于上覆有一浅层土的场地，波就有可能不从结构向外传播，而只有土的材料阻尼起作用，但不能期望它对地震反应有什么大的益处。在任何土 - 结构分析中，对于特定的场地，弄清是否发生波能辐射损失非常重要。凭直觉似可看出，土越软而结构越硬，土 - 结构相互作用就越显著。反之，对于一个置于坚硬土上的柔性结构，其相互作用就可忽略不计。

从许多相反的事例可以明显看出，在一般情况下，事先要确定土 - 结构相互作用是否增大地震反应是不可能的。然而，如果在分析时忽略上述第一种影响（改变地震输入运动，图1.2d）。在许多情况下地震反应就会比对基础固定时完全不考虑相互作用所分析得的小。对于这种近似的相互作用分析，控制运动直接作为最终动力体系的输入运动（图1.2e）。基础固定的分析方法会得到较大的整体动力反应值（如较大的总倾复力矩和总水平剪力），这样的设计是保守的。如考虑土 - 结构相互作用，由于基础的摇摆运动，结构顶部相对于基底的位移会比较大。这可能会影响相邻建筑物的间距，在极端情况下还会增加次生效应。通常从经济角度出发，在结构设计时近似地考虑土 - 结构相互作用将减小地震力对结构的作用。也有一些例外，简化后相互作用的影响成了设计的控制值。这里须强调指出，这种计算相互作用的近似方法 [忽略自由场（图1.2c）和埋置影响（图1.2d）] 是不

合理的。对于特殊结构（如核电站），它的设计不能单纯基于整体的动力反应分析，而必须考虑所有的影响，对土 - 结构进行实际的相互作用分析。

不能否认，在计算结构的地震反应时，考虑下卧土层的柔性确实会使问题的分析大大复杂化。对于有些很难确定的重要参数，例如土的性质或埋置状态，有必要予以估算。要想得到一个确切的解实际上是不可能的，然而，土 - 结构相互作用的一些重要方面还是可以用适当的模型近似地加以模拟。其结果在物理意义上合乎逻辑，但需要有工程实践来加以评价。在分析中改变重要参数的值可得到预估动力反应，从中决定安全的设计方案。尽管存在着许多不确定因素，在分析中还是应该采用较先进的计算方法。

§ 1.4 线性假设

当土受结构工程师所注重的强震作用时，非线性特征将表现得非常明显。虽然现在确有相当好的土非线性本构模型，但做真正的非线性分析暂还不可能。对于一个特定的场地，在这些关系中出现的参数是可以选定的。作这样的分析虽比一般的线性分析昂贵得多，但从原则上讲，对于一个重要的结构还是值得的。显然，在作上述地震激励下土 - 结构相互作用分析时，实际上已隐含地假设了叠加原理是适用的：若结构置于受地震荷载作用的自由场，则总的解就是自由场动力反应与相互作用部分之和。当由控制点的运动确定自由场动力反应时，也已应用了叠加原理。这些意味着在实际计算时已用了线性假设。当然，适当地选用材料性质参数使它们与地震时所达到的应变相适应，还是可以做到的。这时可用迭代法作一系列的计算，并在每次迭代的末尾调整材料性质参数。从目前只能用线性或准线性的现状即可知道，当今分析地震条件下，土 - 结构相互作用的实际水平是很低的。但

是，在线性分析范畴之内，还是可以模拟无界地基域的辐射特性，使之与结构和土的动力有界域模型有相同的精确度。应该记住，在非线形分析方法（最后可用来求永久变形）发展完善之前，必须完全弄清线性的土-结构相互作用分析；还要看到，这种仅进行线性分析的简化方法是与确定控制点地震动的不完善性相适应的，而控制点的运动又正是土-结构相互作用分析时的地震输入。在分析时，工程师可变化土的性质参数，以研究在极端情况下动力体系反应对这些参数的敏感程度，最终的设计也就具有足够的稳重可靠性。

§ 1.5 涉及问题的种类

虽然对一个实际问题的几何空间和材料性质的每一细节进行模拟不太可能，但是可以掌握以下一些要点。置于半空间上的土是水平成层的，并且两者均由有滞后阻尼的各向同性粘弹性材料组成（图 1.3）。其性质随深度而变，但在同一层内是常量。这种构造称为层状半空间。结构物可以是埋置的，土-结构交界面的形状也可是任意的，如，

基座和边墙可以倾斜，并且由柔性变化到刚性；允许采用桩基，而且可任意选定不同长度和截面尺寸的垂直桩和斜桩的数量和位置；还可对地下结构（沉井、隧道和管道体系）进行分析。线性

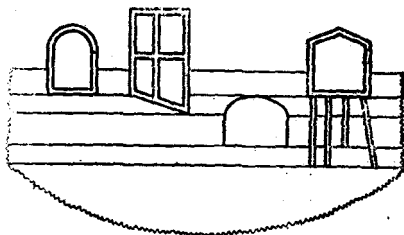


图 1.3 土 - 结构相互作用体系

结构可以表现出滞后阻尼特性。对三维空间结构可以合适地加以描述，并且可同时分析多个结构物，这样就考虑了通过土使相邻结构发生的耦合效应。

以后将看出，如土能用水平层状半空间模型来表示，则可利

用有效率较高的计算方法来求解土 - 结构相互作用的各个方面 (图 1.3)。如果结构 - 土交界面附近的土是不规则的, 也可照样进行分析, 只是须将这部分土当成结构的一部分。

§ 1.6 直接法和子结构法

从概念上讲, 或许分析地震作用下土 - 结构相互作用的最容易方法是先模拟埋置结构周围相当大范围的土, 再将自由场运动作用在图 1.1 所讨论的虚拟边界上 (这种直接法甚至允许考虑土的某些非线性特性)。但这会使土的动力自由度数量很大而需要大容量计算机和较长的算时。由于假设在土 - 结构相互作用分析中可应用叠加原理, 采用子结构法即可大大提高计算效率。

有关子结构法的详细内容将在本书的其它章节里加以论述。现在仅以粗略的概念介绍它的优越性, 而不推导任何方程式。对于如图 1.4 所示的埋置结构, 运用子结构法的步骤如下。结构动力模型的节点如图所示, 其中位于土 - 结构交界面上的用圆圈表示。首先计算场地的自由场, 没有任何埋置动力反应。以后可以看到, 只要计算那些将要插入结构的节点就够了 (用圆圈表示)。接着分析相互作用部分, 分为两步: 第一, 将无界土体作为一

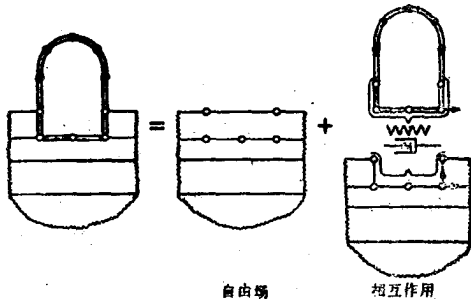


图 1.4 用子结构法解土 - 结构相互作用

个动力子结构来分析, 确定与结构连接的那些节点自由度的力

- 位移关系。这些称之为土的动力刚度系数在物理意义上可解释为一只广义弹簧，即弹簧 - 阻尼器体系；第二，分析由此弹簧-阻尼器体系支承的结构，它的荷载由自由场的运动决定。采用子结构法可将复杂的土 - 结构体系分解成较易处理的几个部分，也更便于验算。中间结果也具有意义，可将一些不确定因素考虑在内。在某些情况下，研究参数的影响可以局限于某一部分，这样，比较容易确定最重要的参数和弄清它们对动力反应的影响程度。如改变自由场运动，土的动力刚度没有必要作重新计算。在设计中对结构作某些修改，也同样不用重新计算土的动力刚度。对土和结构这两个子结构可以用完全不同的方法来计算。在一些简单情况中，可以不通过任何计算而应用类比法得出一个子结构的结果，这就有可能使分析结构比分析土体系要详细得多。例如，在分析非轴对称结构的扭转反应时，对土的三维分析可应用轴对称的解。在直接法中，结构与土的动力反应是同时计算的，结构的计算模型只能非常粗糙。为了得到详细的动力反应，还要进行第二步，将结构分得更细些，并将前面得到的基础运动作用上去，以进行分析。用在前后两阶段中的结构计算模型应保持一致性，也就是说，比较粗糙的模型是由比较精确的模型通过一系列简化而得出的。

对于谐振，无界土介质的运动很易描述。从后面可以看出，当考虑能量辐射后，动力刚度就会变成与频率有关的复数。谐振时，材料阻尼很容易引入，意味着在频域里采用所谓的复反应法分析线性的土 - 结构相互作用最为容易。人们很重视频域分析法。传递函数可以用来确定前面几个固有频率以及和它们对应的近似阻尼比。在中频和高频范围内的精度很易检查。一旦确定了传递函数，对于其它地震条件下的最终动力反应也可很快算得。

结构 - 土体系具有（准）线性特性虽是个必要条件，但公式也可直接扩展用于只有结构是非线性的情况。然而，详细讨论在时域里应用卷积的方法超出了本书的范围。

§ 1.7 本书的内容安排

第二章将叙述离散动力体系的一些基本概念，再由此在第三章里导出用子结构法分析土 - 结构相互作用的基本运动方程，并就一个简例近似地评述土 - 结构相互作用的几个重要内容。第四章讨论模拟结构的各种可能方式。第五章在笛卡儿和圆柱坐标系中导出波动方程，从中建立层状土和基岩的动力刚度矩阵，并由此形成层状半空间的总刚度矩阵。在实际分析相互作用之前，必须确定自由场的动力反应，对此将在第六章讨论，同时还将论及组成地震动的各种形式的波，如垂直入射和斜入射的体波以及表面波。大量的参数分析，包括实际场地的分析，为的是说明自由场动力反应的重要性。第七章讨论对另一子结构——土的模拟，在评述了各种方法之后，采用边界元法计算明置基础和埋置基础的动力刚度系数。第八章推导其它形式的运动方程，介绍一种在时域中直接求解的近似方法。第九章是工程应用问题，讨论包括由水平传播的波引起的相互作用，接着介绍一些实例，最后将一些现场实测资料与分析结果作比较（两者显得很接近）。

第二章 离散体系动力学概论

本章扼要介绍离散体系动力学，以后几章将会用到这些基本方程。对于这个课题的详细内容，包括所有推导、假设的讨论和局限性，则应参阅结构动力学和振动理论方面的教科书。本章的目的是说明书中所用的专用名词或术语。

§ 2.1 时域中的运动方程

将弹性连续介质分成仅在有限个节点相互连接的单元。用有限元法使它空间离散，集整单元矩阵便得到运动方程：

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C]\{\dot{r}\} + [K]\{r\} = \{R\} \quad (2.1)$$

向量 $\{r\}$ 是时间的函数，它包含所有节点各自由度的位移；字母上面的圆点表示对时间的导数； $[M]$ 、 $[C]$ 和 $[K]$ 分别代表质量矩阵、阻尼矩阵和静力刚度矩阵，在线性体系中皆为常量；向量 $\{R\}$ 是所有节点上与位移向量相应的设计荷载，也是时间的函数。如果支座节点部分自由度上的位移已经给定（是时间的函数），则上述方程照样适用，此时 $\{R\}$ 中与这些位移相应的元素便是未知的支座反力。式（2.1）中假设体系有粘滞阻尼，由于波传播所引起的能量辐射即属此类（见 § 5.1）。

§ 2.2 振型幅值变换

由特征值问题的解可得到无阻尼体系的自由振动振型 $\{\phi_j\}$ 和对应固有频率 ω_j 的关系：

$$[K]\{\phi_j\} = \omega_j^2 [M]\{\phi_j\} \quad (2.2)$$

向量 $\{\phi_j\}$ 和 ω_j^2 分别表示第 j 阶特征向量和特征值。将 $\{\phi_j\}$ 适当地集整于 $[\Phi]$ ，将 ω_j^2 作为对角矩阵 $[\Omega]$ 的元素，则有如下正交

条件：

$$[\Phi]^T[M][\Phi]=[I] \quad (2.3a)$$

$$[\Phi]^T[K][\Phi]=[Q] \quad (2.3b)$$

其中 $[I]$ 表示单元矩阵。振型阶数可以选择小于自由度数。

引入变换

$$\{r\}=[\Phi]\{\dot{y}\} \quad (2.4)$$

其中 $\{y\}$ 表示振型幅值向量（坐标）。运动方程 [式 (2.1)] 则变成：

$$\{\ddot{y}\}+[\Phi]^T[C][\Phi]\{\dot{y}\}+[\Omega]\{y\}=[\Phi]^T\{R\} \quad (2.5)$$

向量 $[\Phi]^T\{R\}$ 是广义振型荷载向量。式 (2.5) 通常仍表示一个耦合体系。若假定正交条件也适用于阻尼矩阵，则式 (2.5) 可重写成

$$\{\ddot{y}\}+2[\zeta][\Omega]^{1/2}\{\dot{y}\}+[\Omega]\{y\}=[\Phi]^T\{R\} \quad (2.6a)$$

或者，每个振型幅值 y_i 满足下式：

$$\ddot{y}_i+2\zeta_i\omega_i\dot{y}_i+\omega_i^2y_i=\{\phi_i\}^T\{R\} \quad (2.6b)$$

振型阻尼比 ζ_i 是对角矩阵 $[\zeta]$ 的元素。

以后将说明（§ 8.4），有阻尼情况下的正交条件对结构近似成立，但对整个结构 - 土体系却不满足，这样便不存在经典振型。

§ 2.3 谐振运动方程

对于一个频率为 ω 的谐变荷载

$$\{R\}=\{P\}\exp(i\omega t) \quad (2.7)$$

其（初始瞬态以后的）反应具有类似的形式：

$$\{r\}=\{u\}\exp(i\omega t) \quad (2.8)$$

向量 $\{P\}$ 和 $\{u\}$ 分别表示荷载和位移的（复）幅值。运动方程 [式 (2.1)] 有如下形式：

$$[S]\{u\}=\{P\} \quad (2.9)$$

其中动力刚度矩阵 $[S]$ 定义为

$$[S] = [K] + i\omega[C] - \omega^2[M] \quad (2.10)$$

直接解式 (2.9) 可得到幅值 $\{u\}$ 。因为整个体系总会有阻尼，对于任意 ω 值， $[S]$ 并不是奇异的。

以

$$\{u\} = [\Phi]\{z\} \quad (2.11)$$

同样可以对式 (2.9) 作振型幅值变换：

$$([\Omega] + i\omega[\Phi]^T[C][\Phi] - \omega^2[I])\{z\} = [\Phi]^T\{P\} \quad (2.12)$$

或者，如果正交条件对于 $[C]$ 仍适用，就有

$$(\omega_j^2 + 2i\omega\zeta_j\omega_j - \omega^2)z_j = \{\phi_j\}^T\{P\} \quad (2.13)$$

本书原则上采用不同的字母来区分时域中的变量（如 r 代表位移）和它在频域中的对应幅值（ u ）。但是，在例题中为简化起见，如果不会引起混淆，就不再作这种说明。例如，在参数分析中，如果详细讨论在多种情况下频域中的位移幅值 u ，而且还要写出某瞬态激励下的最大值，则后者即以 u_{max} 表示（而不是 r_{max} ）。

§ 2.4 对应原理

土和结构中的材料阻尼实质上是能量的摩擦损耗，这个所谓的（线性）滞后阻尼与频率无关。当在频域中求解时，应用对应原理可将阻尼引入解中。对应原理是这样的，将弹性常数用对应的复弹性常数来代替，有阻尼的解便可得到。这意味着，对于静力刚度矩阵，

$$[K^*] = [K](1 + 2\zeta i) \quad (2.14)$$

成立，其中 ζ 是阻尼比。§ 5.2 中将讨论两种体波所具有的不同阻尼比。表示土中能量辐射的粘滞阻尼矩阵 $[C]$ 也是弹性常数的函数（较复杂，见 § 5.1）。如不存在粘滞阻尼， $[S]$ [式 (2.10)] 可表示为

$$[S] = [K](1 + 2\zeta i) - \omega^2[M] \quad (2.15)$$

经振型幅值变换后，以上形式可变成：

$$[\omega^2 (1 + 2\xi i) - \omega^2] z_s = \{\phi_s\}^T \{P\} \quad (2.16)$$

§ 2.5 离散富里埃变换

激励荷载的富里埃积分是一非周期荷载，这个非周期荷载在一定时间内可当成周期荷载。这个积分是富里埃级数向具有连续频率分量荷载的扩展。对于荷载向量中的一个元素，富里埃变换对可写成：

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (2.17a)$$

$$R(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (2.17b)$$

在 $R(t)$ 方程中引入了归一化因子 $1/(2\pi)$ ，在另一方程（即对于频率为 ω 的荷载分量，每单位 ω 幅值的定义式 $[=R(\omega)/(2\pi)]$ ）的推导中也引用了这个因子。在其它富里埃变换对的公式中，指数函数变量符号与此相反。

在数值分析中，荷载必须假设为具有有限周期 T 的周期函数。为减小误差，纳入零荷载的时间空隙以扩大荷载周期。当荷载的新周期开始时，这个安静区域会将体系反应的自由振动分量去掉。将周期 T 分成 n 个相等的时间步长 Δt ，并且为提高计算效率， n 取为 2 的幂。将频率宽度也分成相同数量的 $\Delta\omega$ ，其中频率步长（和最低频率） $\Delta\omega = 2\pi/T$ 。于是， $t_l = j\Delta t = jT/n$ 和 $\omega_l = l\Delta\omega = l2\pi/T$ ，式(2.17a)写成有限项之和，即为

$$P(\omega_l) = \Delta t \sum_{j=0}^{n-1} R(t_j) \exp\left(-2\pi i \frac{l j}{n}\right) \quad (2.18a)$$

$$l = 0, 1, \dots, n-1$$

它的逆变换[式(2.17b)]可写成

$$R(t_i) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{l=0}^{n-1} P(\omega_l) \exp\left(2\pi i \frac{t_j}{n}\right) \quad (2.18b)$$

$j=0, 1, \dots, n-1$

如用适当选择的周期荷载替代非周期荷载，这个数值分析程序也可以用来计算周期荷载，例如用来计算由机器振动引起的荷载。 $\Delta\omega P(\omega_l)/(2\pi)$ 表示与频率 ω_l 相应的富里埃系数。

计算富里埃变换时，指数函数的计算常会大量重复。利用这一特点并采用二进制，将某一步的结果立即用到下一步，便形成非常有效的计算方法，此即快速富里埃变换。

荷载中的最高频率 ω_{\max} 为

$$\omega_{\max} = \frac{n}{2} \Delta\omega = \frac{\pi}{\Delta t} \quad (2.19)$$

§ 2.6 复反应法

将离散富里埃变换应用于离散节点上的荷载 $\{R(t_i)\}$ ，可以确定频域中所有离散点上的荷载幅值 $\{P(\omega_l)\}$ [式 (2.18a)]。与式 (2.9) 和 (2.10) 对应，频域中的运动方程为

$$[S(\omega_l)] \{u(\omega_l)\} = \{P(\omega_l)\} \quad (2.20)$$

其中

$$[S(\omega_l)] = [K] + i\omega_l [C] - \omega_l^2 [M] \quad (2.21)$$

土对 $[K]$ 和 $[C]$ 的影响一般取决于 ω_l (§ 5.1 和 § 9.1)。用 $[K^*]$ 替代 $[K]$ [式 (2.14)] 后就可引入结构的材料阻尼。由式 (2.20) 求解 $\{u(\omega_l)\}$ 即能得到频域中位移的幅值。应用式 (2.18b) 的逆变换，时域中离散点的位移 $\{r(t_i)\}$ 为

$$\{r(t_i)\} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{l=0}^{n-1} u(\omega_l) \exp\left(2\pi i \frac{t_j}{n}\right) \quad (2.22)$$

频域中运动方程从不用来求解所有的富里埃变换点。求解式 (2.20) 时频率步长可取较大的值，或可在该体系头几个动力反应峰值下的固有频率中取较小值。对中间点的解可用插值法求出。只有对单、双自由度的结构才可能应用解析解。