

图像多尺度几何分析理论与应用 ——后小波分析理论与应用

焦李成 侯彪 王爽 刘芳 著

西安电子科技大学出版社

2008

内 容 简 介

本书从函数的非线性逼近出发,介绍了多尺度几何分析方法和理论,以及在图像处理领域中的应用。全书共13章,第1章系统地介绍了推动多尺度几何分析发展的数学和生理学背景,综述了图像的多尺度几何分析方法的历史沿革、最新成果及存在的问题;第2章从神经网络、统计估计、逼近论、调和分析等角度研究了多变量目标函数的逼近问题,并指出了这一领域研究的有关问题以及在信号和图像处理中的应用;第3章论述了基于脊波变换的直线特征检测方法;第4章介绍了脊波双框架系统;第5章介绍了自适应连续脊波网络;第6~13章分别介绍了曲线波、梳状波、子束波、楔形波、轮廓波、条带波、方向波和剪切波的基本理论及其应用,应用范围涉及图像压缩、去噪、融合、分割和分类等不同方面。本书从第3章起每一章都给出了相应的实验方法和实验结果。

本书可作为高校电子工程、信号与信息处理、应用数学等专业的高年级本科生或研究生的教材,也可作为从事多尺度几何分析和数字图像处理方面研究工作的科技工作者的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

图像多尺度几何分析理论与应用——后小波分析理论与应用/焦李成等著.

—西安:西安电子科技大学出版社,2008.7

ISBN 978-7-5606-2027-5

I. 图… II. 焦… III. 几何—尺度分析—应用—图像处理 IV. TP391.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 052617 号

策 划 高维岳

责任编辑 张 玮 高维岳

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710011

http://www.xduph.com E-mail: xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西天意印务有限责任公司

版 次 2008年7月第1版 2008年7月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 32.875

字 数 592千字

印 数 1~2500册

定 价 50.00元(精装版:60.00元)

ISBN 978-7-5606-2027-5/TP·1049

XDUP 2319001-1

*** 如有印装问题可调换 ***

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

第 8 章 子 束 波

8.1 引 言

Donoho 和霍小明在 2000 年提出了一种新的多分辨率图像分析框架,在这个框架下,线段扮演的角色类似于点在小波分析中扮演的角色,称之为子束波(Beamlet)分析。本章的内容主要摘自文献[1]。

Beamlet 扮演了一个基本的理论逼近角色。Beamlet 链提供了对平面上精密曲线的稀疏逼近表示,在一定意义上是最优的稀疏表示。Beamlet 理论对于含噪声的细丝检测和边界寻找问题提供了正确的数据结构。Beamlet 金字塔包含图像在所有尺度和位置上对线段的积分。在某些信号检测问题中,通常的基于像素级滤波的探测器有很差的信噪比,因此有较低的检测概率。然而隐藏在金字塔中的信息可以以较高的信噪比积分,完成用普通滤波或者普通边缘检测所不能完成的任务。

近年来,Beamlet 变换逐渐受到重视,并成功运用到其他领域中。Beamlet 变换和分析最初用来从含噪图像中恢复直线、曲线和块状区域^[1]。霍小明和 Donoho 在文献[3]中利用 Beamlet 变换提出了一种降噪方法。Chen 和霍小明提出了一种基于 Beamlet 变换的图像编码^[4]。Donoho 等人把 Beamlet 变换从二维扩展到三维,并运用到星云分析中^[5]。

本章主要介绍了 Beamlet 变换及其在图像处理中的应用,具体安排如下:8.2 节介绍了 Beamlet 框架的构造;8.3 节介绍了 Beamlet 框架各个部分的构造及实现;8.4 节介绍了 Beamlet 算法的算法设计;8.5 节给出了本章小结,概括了 Beamlet 变换与小波变换相比所显示出的优越性。本章的内容主要摘自文献[1],来自 Donoho 团队的工作。

8.2 Beamlet 框架的构造

Donoho 在文献[1]中描述的 Beamlet 框架包括 Beamlet 字典、Beamlet

此为试读,需要完整版请访问: www.cnit-ebook.com

变换、Beamlet 金字塔、Beamlet 图、Beamlet 算法五部分。

(1) Beamlet 字典是在位置、方向和尺度范围内的二进结构剖分的线段库，它提供了所有线段集合的多尺度逼近。

(2) Beamlet 变换是图像沿着 Beamlet 字典中 Beamlet 的所有线积分集合。

(3) Beamlet 金字塔是所有 Beamlet 变换系数的集合，这些系数位于具有等级的多尺度性质的数据结构中。

(4) Beamlet 图是一种图结构，在这里图像中的像素为顶点，连接每一对像素的 Beamlet 作为边。

(5) Beamlet 算法用 Beamlet 图结构所决定的方法从 Beamlet 金字塔中提取数据，如网络流算法、循环二进剖分算法。

Beamlet 分析除了其内在的吸引力之外，作为一种组织图像信息的模式，它的应用跨越许多重要的科学领域。

- Beamlet 分析明显是一个不同于小波概念的基本多尺度思想，通过研究它，会拓展我们对于多尺度分析的概念和多尺度分析所能完成任务的认识。Beamlet 框架会使我们在多尺度思想的习惯上跳出小波分析的框架。

- Beamlet 理论对于含噪声的细丝检测和边界寻找问题提供了根本正确的数据结构。Beamlet 金字塔包含图像在所有尺度和位置上对线段的积分。在某些信号检测问题中，通常的基于像素级滤波的探测器有很差的信噪比，因此检测概率比较低。然而隐藏在金字塔中的信息可以以较高的信噪比积分，完成用普通滤波或者普通边缘检测所不能完成的任务。

8.3 Beamlet 分析

下面从一些术语和记号开始。我们对 $n \times n$ 大小的数字矩阵图像感兴趣，把图像区域看做一个存在于单位正方形里 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的函数，那么像素就是排列在单位正方形内的 $1/n \times 1/n$ 大小的阵列。用二进正方形 S 表示点集 $\{(x_1, x_2): [k_1/2^j, k_1+1/2^j] \times [k_2/2^j, k_2+1/2^j]\}$ ，这里对于一个整数 $j \geq 0, 0 \leq k_1, k_2 < 2^j$ 。为了清晰起见，我们有时记为 $S(k_1, k_2, j)$ ，所以 $S(0, 0, 0)$ 表示单位正方形 $[0, 1]^2$ ，且如果我们有一个 $n \times n$ 二进栅格 $n = 2^J$ ，那么各个像素构成 n^2 个元素 $S(k_1, k_2, J), 0 \leq k_1, k_2 < n$ 。

8.3.1 Beamlet 字典

Beamlet 构造了一个具有二进特征的多尺度的有方向的线段集合，二进

特征体现在线段的点坐标上始终是二进的, 尺度也是二进的。它的产生步骤如下:

(1) 二进剖分: 取所有在尺度 $0 \leq j \leq J$ 的二进正方形集合。对于 $K \geq 0$, 固定一个分辨率的量 $\delta = 2^{-J-K}$ 。就是将单位正方形划分为更小的子正方形。

(2) 顶点标记: 在每一个二进正方形中, 从右上角开始顺时针沿边界旋转, 相隔距离 δ 标记出等间隔的顶点。在一个具有边长为 2^{-j} 的方块中, 正好存在 $M_j = 4 \cdot 2^K \cdot 2^{J-j}$ 个顶点, 称这个顶点集合为 $V(S)$ 。

(3) 顶点连接: 在每个子正方形里连接任何一对顶点, Beamlet 就是指这样的连线。

定义 8.1: 对于给定的二进 n 和 δ , 以及某一个具有边长为 2^{-j} ($0 \leq j \leq J$) 的二进正方形 S , Beamlet 集合是所有属于某一个 $B_\delta(S)$ 的 beam 的集合 $B_{n, \delta}$ 。

图 8.1 给出了 Beamlet 的一些例子。

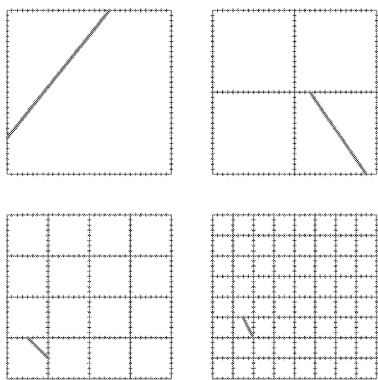


图 8.1 在不同尺度下的 Beamlet(具有不同边长的正方形)

我们注意到 Beamlet 仅连接在一个二进正方形的边界上的顶点, 因而虽然 Beamlet 族由 $O(n^2)$ 个顶点组成, 但它却包含了远远少于 $O(n^4)$ 的多个 beam。这表明在整个 Beamlet 集合中进行全局搜索要比在 beam 集合中搜索快得多。

尽管降低了基数, Beamlet 字典仍具有表达力。它包括了在各个尺度、位置和方向的 beam。一个数量相当小的 Beamlet 可用作对任意单个 beam 的替代。在文献[6]中证明了引理 8.1。

引理 8.1: 端点在 $[0, 1]^2$ 中任意位置的任何 beam 可在 Hausdorff 距离 $\delta/2 + 1/n$ 中由一个连续的 Beamlet 链 $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ 来逼近, 其中 $b_i \in B_{n, \delta}$, 这里所需的 Beamlet 的数目 m 是由 $8 \log_2(n)$, $n > 2$ 界定的。

这一概念见图 8.2, 该图用一系列 Beamlet 近似为一条线段, 该 beam 的两个端点是 $(0.3, 0.85)$ 和 $(0.85, 0.1)$ 。

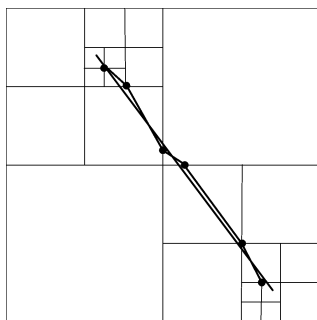


图 8.2 由一个 Beamlet 链所逼近的线段

8.3.2 Beamlet 变换

令 $f(x_1, x_2)$ 为 $[0, 1]^2$ 上的连续函数。 f 的 Beamlet 变换是所有线积分

$$T_f(b) = \int_b f(x(l)) dl, \quad b \in B_{n, \delta} \quad (8.1)$$

的集合, 这些线积分都是沿着线段 $b \in B_{n, \delta}$ 积分的; 这里 $x(l)$ 沿着一个单位速度路径描绘出 Beamlet b 。一个 $n \times n$ 阵列 (f_{i_1, i_2}) 的离散 Beamlet 变换被理解为定义在连续系统上具有插值 (f_{i_1, i_2}) 的函数 f 的 Beamlet 变换:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i_1, i_2} f_{i_1, i_2} \phi_{i_1, i_2}(x_1, x_2) \quad (8.2)$$

这里 (ϕ_{i_1, i_2}) 是指定的一族连续插值函数。存在几种选择 ϕ_{i_1, i_2} 的方式, 这里仅用平均插值函数。令 $\text{Pixel}(i_1, i_2)$ 表示正方形 $[i_1/n, (i_1 + 1)/n] \times [i_2/n, (i_2 + 1)/n]$ 。函数 ϕ_{i_1, i_2} 满足条件 $n^2 \int_{\text{Pixel}(i'_1, i'_2)} \phi_{i_1, i_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 =$

$\delta_{i_1, i'_1} \delta_{i_2, i'_2}$, 这里 $\delta_{i, i'}$ 是 Kronecker 符号, 则 f 符合:

$$f_{i_1, i_2} = \text{Ave}\{f \mid \text{Pixel}(i_1, i_2)\} \quad (8.3)$$

换句话说, f_{i_1, i_2} 的值可以看做是连续函数 f 的像素级平均, 如图 8.3 所示。

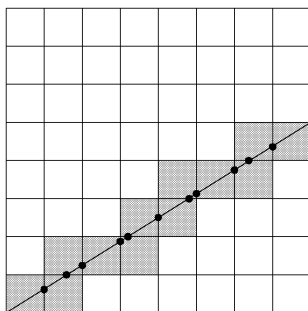


图 8.3 一幅数字图像的分段常数插值和它所对应的 Beamlet 变换

8.3.3 Beamlet 金字塔

在传统应用中^[7]，金字塔是一种表示尺度和基数概念的数据结构。存储在较粗尺度下的数据可由任意细尺度下的数据推导出。

在这里 Beamlet 金字塔是所有积分 $T_f[b]$ ($b \in B_{n,\delta}$) 的集合。这一结构体现了一个金字塔所具有的多尺度性质，但是仅在一个逼近的意义下表示这一因果关系。

如果我们现在考虑一个理想的连续 Beamlet 字典，由 Beamlet 的定义，当 $\delta \rightarrow 0$ 而得到，于是我们得到一个遵循二尺度关系的系统，每一个连续 Beamlet 在下一个较细尺度下可被分解成至少三个 Beamlet 的并集。图 8.4 表示了一个 Beamlet b 在一个更细的尺度下分解成三个 Beamlet b_1 、 b_2 和 b_3 的并集。我们从这一点得到的关键的分析性质是，一个粗尺度 Beamlet 分解为细尺度 Beamlet 的分解 $b = \cup_i b_i$ 给出 $T_f[b] = \sum_i T_f[b_i]$ 。实际中当然使用 $\delta > 0$ ，因此这个二尺度关系仅在逼近的意义下成立：在下一个较细尺度下，存在至少三个 Beamlet 的链，这个链偏离粗尺度 Beamlet 至少 δ 。

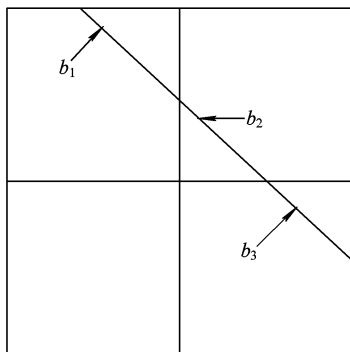


图 8.4 一个 Beamlet 在下一个精细尺度下分解为三个 Beamlet

8.3.4 Beamlet 图

与 Beamlet 金字塔相对应的是 Beamlet 图。对应于一个 $n \times n$ 大小的图像，这张图有 $(n+1)^2$ 个顶点，对应于来自于 $B_{n,1/n}$ 中的 Beamlet，Beamlet 图有 $16n^2[\log(n)+1]$ 条边。Beamlet 图的两个顶点由一个边所连接，当且仅当它们对应于那些左下角被 Beamlet 所连接的像素。

在 Beamlet 图中，一些顶点仅有最近邻连接，但许多其他顶点同样有到顶点其他的连接，对应于像素的顶点可称为 2、4、8、16 等像素距离。对于不同顶点的不同连接见图 8.5。

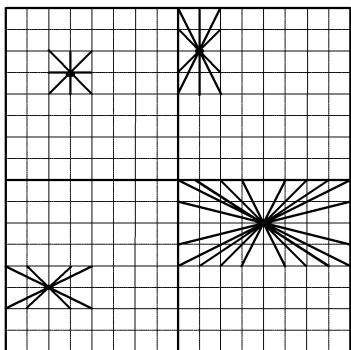


图 8.5 一个 Beamlet 图中不同顶点的不同连接图示

Beamlet 图与用在图像分析中的最近邻图相同^[8~10]。在最近邻图中，每一个顶点也是对应于图像中的一个像素，但却仅连接对应于像素的顶点，这些像素是它在图像中的最近邻（实际上存在两个变量——4 邻近图（交叉连接）和 8 邻近图（星形连接），对于我们来说，两者是相同的）。

在图 8.6 中，我们比较最近邻图和 Beamlet 图中具有相同端点的最短路径。图像大小 $n=16$ ，线段的两个端点是 $(0, \frac{2}{16})$ 和 $(\frac{14}{16}, \frac{12}{16})$ 。Beamlet 图路径上的顶点用符号 $\otimes$ 来标记，最近邻图路径上的边用粗线段表示。Beamlet 图中的路径包含 3 条边，而最近邻图中的路径有 14 条边。

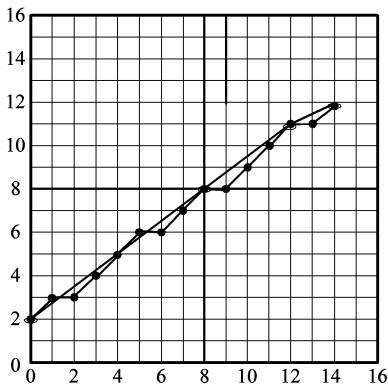


图 8.6 由 Beamlet 图和最近邻图中的路径所逼近的一条线段

8.4

Beamlet 算法设计

Beamlet 算法可分为以下四层（以复杂性为序）：

- (1) 较简单的基于 Beamlet 系数阈值处理。

- (2) 适度简单的基于树结构的算法。
- (3) 基于根据 Beamlet 图的 Beamlet 系数局部利用的适度复杂的算法。
- (4) 基于根据 Beamlet 图的 Beamlet 系数全局优化利用的更复杂的算法。

8.4.1 无结构算法

首先我们讨论三个算法，它们在处理 Beamlet 系数时没有考虑在不同尺度和位置上的 Beamlet 之间可能存在的相互联系。这些算法与小波分析中用到的常规算法非常相似。

1. 检测线段或曲线

假定我们有一个带噪的 $n \times n$ 图像，在该图像中的某处或许包含一条不知道长度、方向和位置的线段的模糊图像(见图 8.7)。在这个模型中，我们有带噪的像素级数据 (y_{i_1, i_2}) ，其中 $0 \leq i_1, i_2 < n$ ，将这些数据模型化表示为

$$y_{i_1, i_2} = A \cdot \tilde{\Phi}_{i_1, i_2} + \varepsilon z_{i_1, i_2}, \quad 0 \leq i_1, i_2 < n \quad (8.4)$$

这里 ε 是一个噪声水平， z_{i_1, i_2} 是一个高斯白噪声， A 是一个未知的参数， $\tilde{\Phi}_{i_1, i_2} = \tilde{\Phi}(i_1, i_2; \overline{v_0 v_1})$ 是在一个未知的 beam $\overline{v_0 v_1}$ 的传感器阵列上的观测效果。

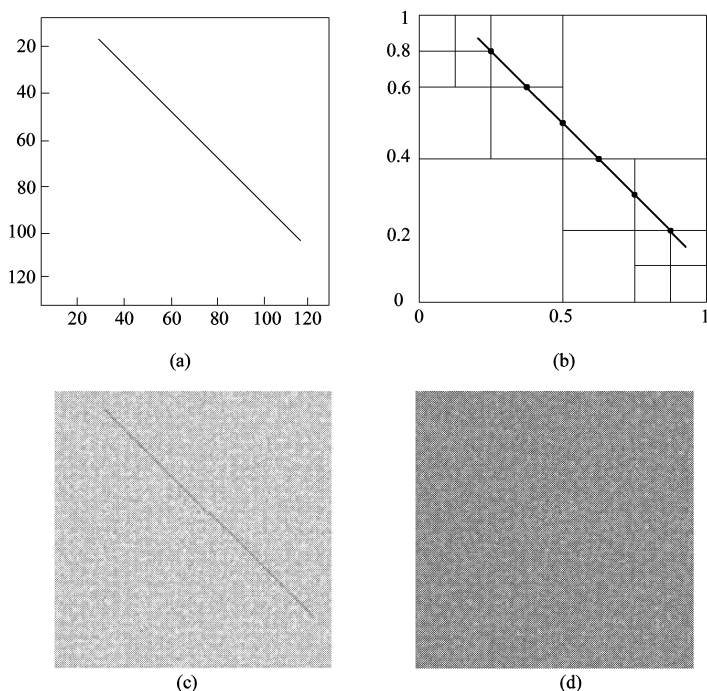


图 8.7 在一幅带噪图像中检测存在的一条线段

(a) 一条潜在的线段；(b) Beamlet 逼近；(c) 一个简单的检测情况；(d) 一个难检测情况

将问题公式化, 我们的问题是测试简单的零假设 $H_0: A=0$, 对于相反的选择 $H_1: A>0$, $v_0, v_1 \in [0, 1]^2$ 。由于考虑了大范围的可能的端点对, 因此这就是高度复合的。在假设测验中(所谓的对于广义似然比检验的“匹配滤波器”)的标准概念使我们考虑随机场:

$$Y[v_0, v_1] = \langle \psi_{\overline{v_0 v_1}}, y \rangle \quad (8.5)$$

这里 $\psi_{\overline{v_0 v_1}}$ 是所谓的匹配于 $H_1, \overline{v_0 v_1}$ 的滤波器:

$$\psi_{\overline{v_0 v_1}}(i_1, i_2) = \frac{\tilde{\Phi}(i_1, i_2; \overline{v_0 v_1})}{\| \cdot, \cdot; \overline{v_0 v_1} \|_2} \quad (8.6)$$

14 考虑最大 beam 统计量:

$$Y^* = \max\{Y[v_0, v_1]: v_0, v_1 \in [0, 1]^2\} \quad (8.7)$$

这里最大值是在端点在 $[0, 1]^2$ 中的所有 beam $\overline{v_0 v_1}$ 上取得的。如果 Y^* 超过了一个确定的阈值, 则拒绝 H_0 。由于它取标准似然率检验(产生于上面 H_0 的和一个简单的可选择假设 $H_1, \overline{v_0 v_1}$), 这经常被称之为广义似然比检验, 并且为了测试复合的选择, 在所有 $H_1, \overline{v_0 v_1}$ 的选择中进行最优化。

存在大量要考虑的 beam, 即使我们在像素的尺度下离散化, 也至少还有 $O(n^4)$ 个 beam。对于这个最大值简单的估计, 每一个 $O(n)$ 次计算花费需要 $O(n^4)$ 次估计, 这总共是 $O(n^5)$ 次计算; 对于大的 n 值可能计算量更大。

代替考虑基于最大 Beamlet 统计量的测试。我们仅在所有的 Beamlet 上计算一个最大值, 而不是在所有的 beam 上。与之相对比的统计量为

$$Y^+ = \max\{T_y(b) / \sqrt{L(b)}: b \in B_{1/n, n}\} \quad (8.8)$$

这里 $T_y(b)$ 是数据 y 的 Beamlet 变换, $L(b)$ 是 Beamlet b 的欧氏长度。只要 H_0 超过一个确定的阈值, 我们就拒绝它。

一旦计算出了 Beamlet 金字塔, 这个统计量可在数量级为 $O(N \log(N))$ 的额外计算量上算出, 这里 $N=n^2$ 是该图像中像素的数量。

我们注意到这一过程与在小波域上测试白噪声是类似的。在这一测试中, 估计最大的小波系数, 看它是否超过一个由高斯白噪声假设所得到的阈值。

我们也注意到这一过程没有用到 Beamlet 的结构, 而是简单地取最大值, 没有考虑最大值的位置、尺度或方向, 或没有考虑最大值之间的相互作用。

正如它所显示出的, 虽然基于 Beamlet 的统计量在估计上比 GLRT 要节省很多计算量, 但 GLRT 还是相当有实质上的能力的。在图 8.8 中, 我们将基于最大 Beamlet 统计量的测试执行情况同基于最大 beam 统计量的测试情况相比较。显然, 基于 beam 的一个特意选择的小子集上最大化的 Beamlet 方法提供了几乎同样的灵敏度。证明这一点的理论分析将在其他地方给出。

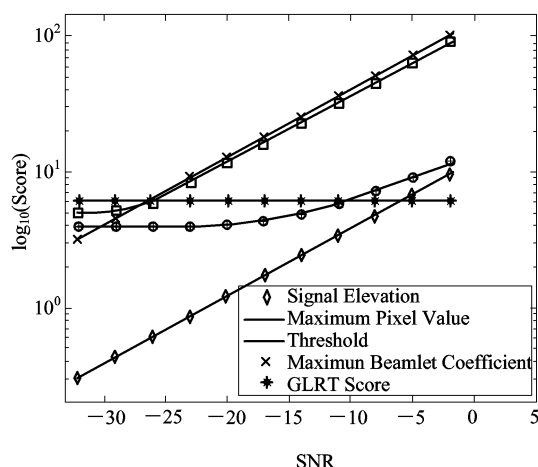


图 8.8 基于最大 Beamlet 统计量与基于最大 beam 统计量的测试情况比较

图 8.8 显示了最大 beam 统计量和最大 Beamlet 统计量几乎相同的灵敏度，在 11 个不同信噪比(SNR)下测试。具有符号的线分别表示：潜在线目标的像素 SNR；最大行像素密度的中值；对于 0.05 错误警告率的可检测性的阈值；最大标准 Beamlet 系数的中值；中值 GLRT 分数。所有中值都指的是 100 蒙特卡罗仿真的结果。测试图像的大小是 $n=128$ ，潜在的线段同图 8.7 中的一样。

2. 阈值化和可视化

可视化步骤如下：

- (1) 变换：计算 Beamlet 金字塔中的顶(入口)。
- (2) 阈值化：将每一个没有超过一个阈值(可能是尺度依赖的)的 Beamlet 系数置为零。
- (3) 可视化：对于在阈值化操作下仍存在的 Beamlet 系数，画一条线段来描述该 Beamlet。

这与小波分析中的阈值重构相似，在那里，先对目标进行变换，将较小的系数抛弃，再进行反变换。

注意，由于每一个 Beamlet 系数的存在或被抛弃只是基于它自身的值，而不是其他系数的值，因此这一过程确实是无结构的。

图 8.9 中，对于毕加索的画，我们在几个尺度上画出 Beamlet，这些 Beamlet 的系数超过了预先设定的阈值。

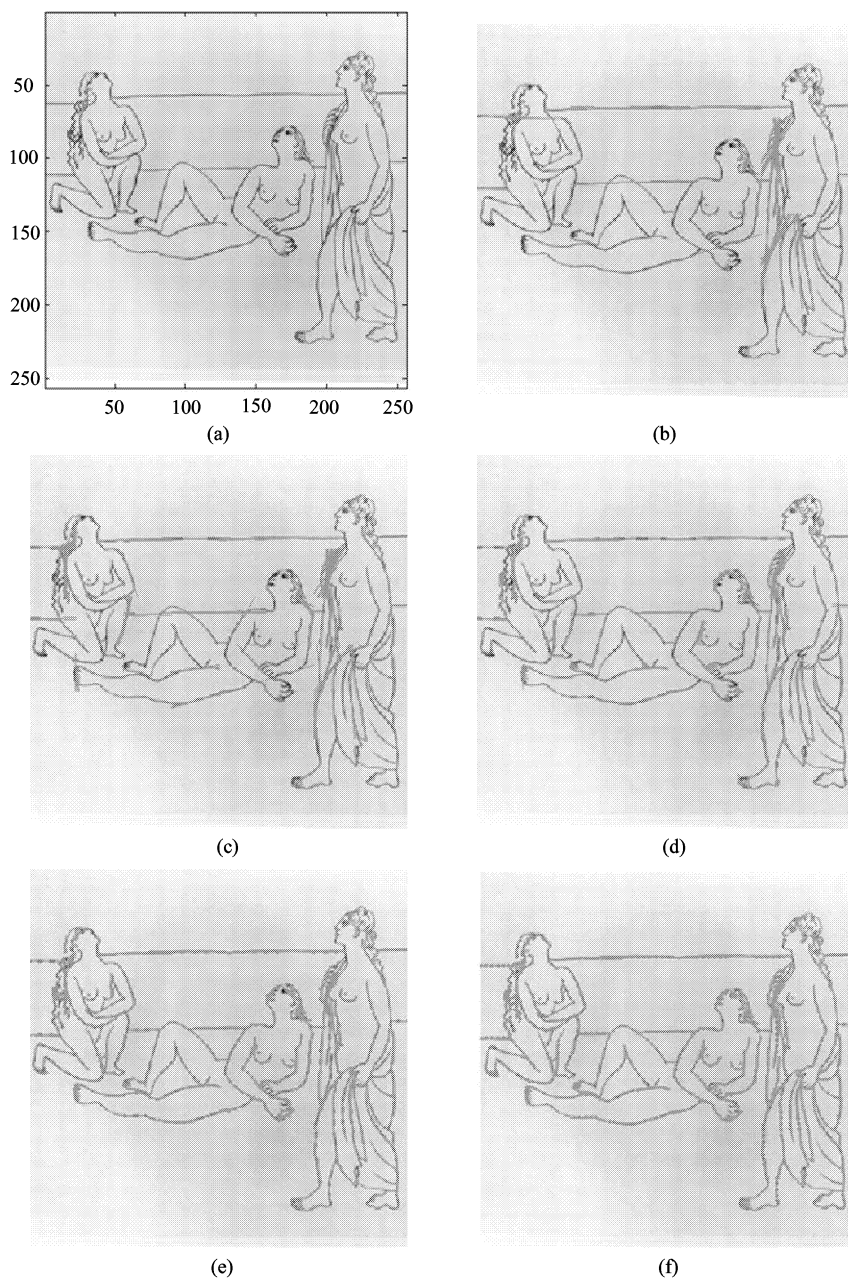


图 8.9 对毕加索图像在几个尺度上进行简单的阈值处理并重构图像

(a) 毕加索原图；(b) 尺度等于 2；(c) 尺度等于 3；

(d) 尺度等于 4；(e) 尺度等于 5；(f) 尺度等于 6

虽然该过程在图像上有趣，但它通常缺乏我们所期望的信息度。确实，由于缺乏“交互尺度抑制”，在相同位置上的许多 Beamlet 超过了阈值，因而给出了一个不合理的“过渡激励”的度。特别地，许多较大尺度的 Beamlet 超过了阈值，并且没有提供对研究对象内特征的足够的反应。

我们希望有一个较好的方法可以提供“空间抑制”，这样，如果两个 Beamlet 空间几乎是在同一位置且是“交互尺度抑制”的，则使它们不同时出现在可视化中；如果两个 Beamlet 空间上是在同一位置但却在邻近的尺度上，则使它们不同时出现在可视化中。在 $2 \sim 4$ 层次上更复杂的算法也可以利用这样的抑制。

3. 集合的多尺度厚度

现在假设我们有一个二值图像，它是“白色的”(由值 0 表示)，具有一小块黑色像素(由值 1 表示)。黑色像素的集合可认为是一个我们想要描述其几何性质的“集合”。例如，它可以是一个分散的点集或是在一条光滑曲线上的点。考虑下面的多尺度总结步骤：

(1) 变换：计算 Beamlet 金字塔中的项(入口)。

(2) 度量厚度：对于每一个二进正方形，使用对应于该正方形的 Beamlet 系数来度量在该正方形内的非零像素集合的相对“厚度” β_s ，例如包含非零数据的最窄带的宽度。计算厚度的图示在图 8.10 中给出。我们发现最窄带是由两个 Beamlet 界定的，且包含目标曲线。厚度是 $\max(d_1, d_2)$ ，正规化的厚度或 Beta-厚度定义为 $\beta_s = \max(d_1, d_2) / 2^{-j}$ 。

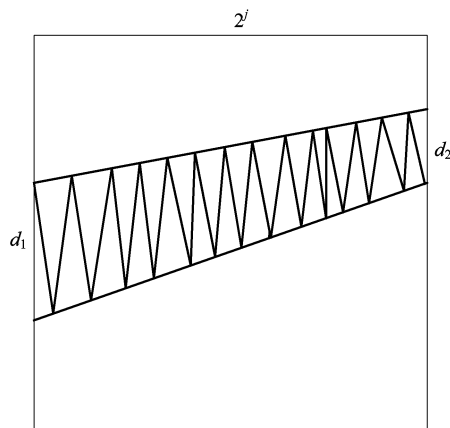


图 8.10 在一个二进正方形中计算数据的厚度

(3) 由尺度总结：在每一个单个尺度上，计算所有的二进正方形的平均厚度。

(4) 可视化：利用经过取阈值操作后仍存在的 Beamlet 系数，画线以显示这个 Beamlet。

注意，这一过程在计算一个正方形的厚度时没有考虑任何其他正方形的意义下，它确实是无结构的。因为我们可以用图像的 Beamlet 分析计算该过程——为了确定最窄带，我们仅分析相应于一个二进正方形的非零 Beamlet 系数的模式。

由于这一过程确定了对应于每一个正方形的一对 Beamlet，即由包含该“集合”的最窄带约束的一对，该过程可看做是给出了一个局部空间抑制的度。对于每一个正方形，在一个大的数量的 Beamlet 中仅有两个被分离出来，成为“重要的”Beamlet。

这一平均厚度度量了“集合”当位于一条线上时可被局部逼近的程度。如果该集合由一条光滑曲线给出，则在精细的尺度下，当然是这种情况。如果集合非常复杂，将不是这种情况。

这一操作与小波分析中的度量某些范数相类似。小波系数度量函数对一个简单的线性逼近的偏离，如果被分析的函数是光滑的，则小波系数被期望按某一速度递减，如一个尺度函数。将系数的大小与尺度相比较，可以度量对象的正则性。

在数学文献中，Peter Jones 介绍了一种分析工具，并由 David 和 Semmes^[11, 12] 扩展到一个更大的范围，具体可见 Gilad Lerman 的论文。虽然这一早期的工作没有直接联系像素化了的图像集，也没有联系使用特定的离散数据机构，如 Beamlet 金字塔，但它使得 Beamlet 工具确实可以将它们的概念很方便地转化到一个数字图像集中。

图 8.11 给出了一些例子。如图 8.11 所示，对于一个光滑曲线（在该情况下是圆），厚度相对于尺度的性能与对于一个分段曲线（在该情况下是随机轨迹）厚度相对于尺度的性能是截然不同的。

图 8.11 是在不同尺度上的三个不同“集合”的“尺度-厚度图”。左列给出了原始的曲线，右列给出了相应的厚度-尺度图，描绘了在每一个给定尺度上所有厚度的正方形的和。

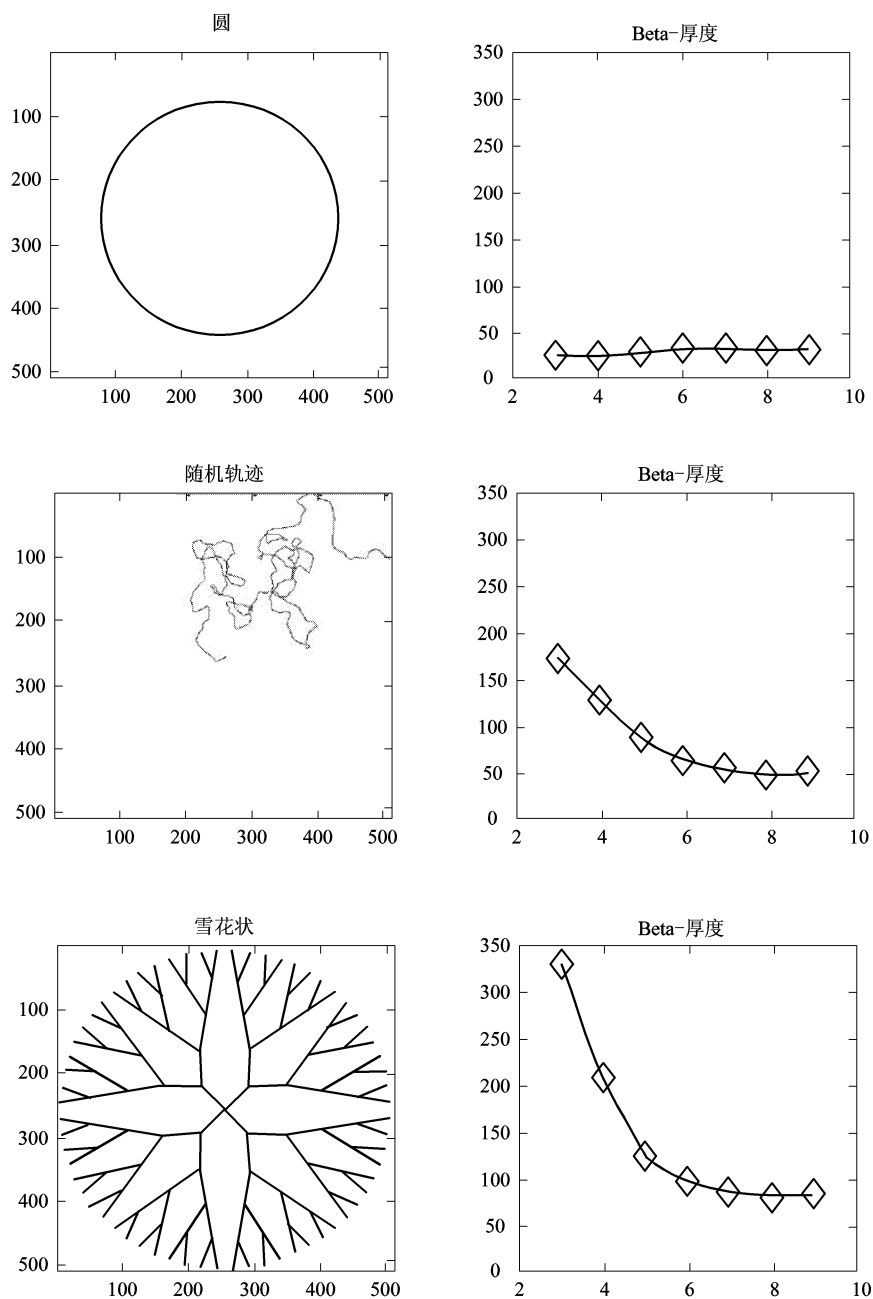


图 8.11 示例

8.4.2 树状结构算法

图 8.12 描绘了平面中的一系列的二进正方形，根据正方形的大小被分层，成为不同的滑动板。父子关系由连接父正方形的中心到子正方形的中心的线段表示。

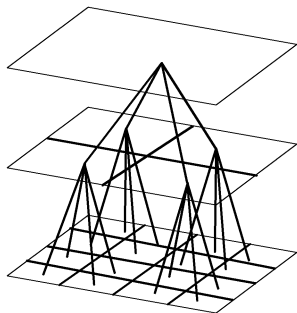


图 8.12 完全递归二进剖分树结构

通过应用下面两个规则的任意组合，定义一个递归二进分割 (Recursive Dyadic Partition, RDP)：

- $P = \{[0, 1]^2\}$ 是一个 RDP。
- 如果 $P = \{S_1, \dots, S_{l-1}, S_l, S_{l+1}, \dots, S_n\}$ 是一个 RDP，且 S_l 可以被分解为四个二进正方形 $S_{l,00}$ 、 $S_{l,01}$ 、 $S_{l,10}$ 、 $S_{l,11}$ ，则新的剖分 $P' = \{S_1, \dots, S_{l-1}, S_{l,00}, S_{l,01}, S_{l,11}, S_{l+1}, \dots, S_n\}$ 也是一个 RDP。

图 8.13 给出了一个不完全 RDP 的例子。

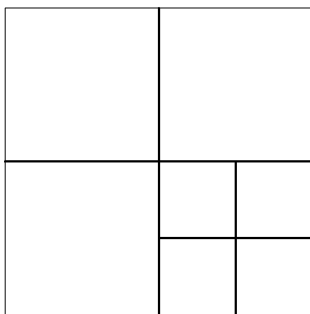


图 8.13 一个不完全 RDP 图

每一个 RDP 对应于一个树，如图 8.12 所示，一个包含所有边长为 $1/4$ 的二进正方形的完全 RDP 对应于一个深度为 2 的完全树。图 8.14 说明图 8.13 中用最精细的二进尺度为 $1/4$ 的正方形所画的一个不完全剖分对应于一个深度为 2 的不完全树。

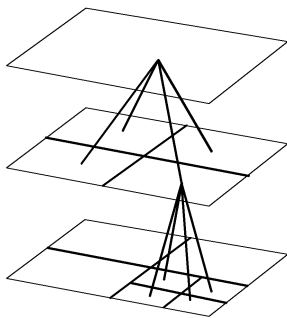


图 8.14 相应于一个不完全 RDP 的树

Beamlet Decorated - RDP (BD - RDP) 是一个分块由相关联的 Beamlet 修饰的 RDP。图 8.15 给出了一个 BD - RDP 及其相应的树结构。

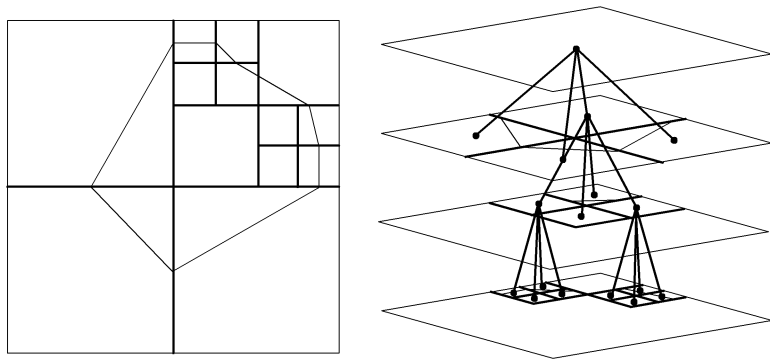


图 8.15 一个 Beamlet 修饰的递归二进剖分 (BD - RDP) (左) 及其相应的树结构 (右)

BD - RDP 一个关键的特性在于在不同的尺度上 Beamlet 相互抑制, 即无论 Beamlet 的数量有多大, 它们在空间上是互相脱离的, 在不同尺度上决不可能包含两个相互交叉的 Beamlet。

1. 提取多重线段

现在考虑一个使用树概念的从一个图像中提取多重线段的算法。如同第 8.4.1 节中阈值化和可视化所介绍的, 我们希望使用一个 Beamlet 序列来可视化一个图像。为了做到这一点, 我们寻找一个求解优化问题的 BD - RDP。

用一个量 C_S 与每一个二进正方形 S 相联系, 这个量定义为 $C_S = \max_{b \sim S} T(b) / l(b)^{1/2}$ 。这里 $T(b)$ 是相应于 Beamlet b 的 Beamlet 系数, $l(b)$ 是相应的 Beamlet 的长度, $b \sim S$ 意味着 Beamlet b 对应于 S 。

在所有的 $[0, 1]^2$ 的递归二进剖分 $p = \{S_1, \dots, S_n\}$ 上最大化被惩罚的复杂度能量为 $J(P) = \sum_{S \sim P} C_S^2 - \lambda \# P$ 。其中, C_S 度量“模型”的能量, 就是说在 S