

图像多尺度几何分析理论与应用 ——后小波分析理论与应用

焦李成 侯彪 王爽 刘芳 著

西安电子科技大学出版社

2008

内 容 简 介

本书从函数的非线性逼近出发,介绍了多尺度几何分析方法和理论,以及在图像处理领域中的应用。全书共13章,第1章系统地介绍了推动多尺度几何分析发展的数学和生理学背景,综述了图像的多尺度几何分析方法的历史沿革、最新成果及存在的问题;第2章从神经网络、统计估计、逼近论、调和分析等角度研究了多变量目标函数的逼近问题,并指出了这一领域研究的有关问题以及在信号和图像处理中的应用;第3章论述了基于脊波变换的直线特征检测方法;第4章介绍了脊波双框架系统;第5章介绍了自适应连续脊波网络;第6~13章分别介绍了曲线波、梳状波、子束波、楔形波、轮廓波、条带波、方向波和剪切波的基本理论及其应用,应用范围涉及图像压缩、去噪、融合、分割和分类等不同方面。本书从第3章起每一章都给出了相应的实验方法和实验结果。

本书可作为高校电子工程、信号与信息处理、应用数学等专业的高年级本科生或研究生的教材,也可作为从事多尺度几何分析和数字图像处理方面研究工作的科技工作者的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

图像多尺度几何分析理论与应用——后小波分析理论与应用/焦李成等著.

—西安:西安电子科技大学出版社,2008.7

ISBN 978-7-5606-2027-5

I. 图… II. 焦… III. 几何—尺度分析—应用—图像处理 IV. TP391.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 052617 号

策 划 高维岳

责任编辑 张 玮 高维岳

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710011

http://www.xduph.com E-mail: xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西天意印务有限责任公司

版 次 2008年7月第1版 2008年7月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 32.875

字 数 592千字

印 数 1~2500册

定 价 50.00元(精装版:60.00元)

ISBN 978-7-5606-2027-5/TP·1049

XDUP 2319001-1

如有印装问题可调换

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

第1章 绪论

1.1 引言

有效地表示可视化信息就是要进行大量的图像处理工作，其中包括图像压缩、滤波以及特征提取。图像表示的有效性是指用较少的数学描述来捕获图像中重要信息的能力。对于实际应用而言，这种图像表示一定要通过结构变换及快速算法来实现。

小波在许多领域产生了越来越大的影响，在这些领域中，小波给出了理论上的一致性，并在实际应用中取得了成功。小波理论的核心就在于它为我们提供了一种构造信号展开式的基础。给定一个信号 $f(x)$ ，它能用被称为小波的原始信号 $\{\psi_n\}_{n \in N}$ 的线性组合来表示，如：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \psi_n, \quad \text{若 } c_n = \langle f(x), \psi_n \rangle$$

在实际应用中，我们总是希望利用某个信号的展开来近似表示上面这个信号。一种方法就是使用前 M 个分量表示。这就是所谓的线性逼近，线性逼近可以将输入信号等效地投影到以前 M 个分量作为基底的子空间中。线性逼近可以描述为以下形式：

$$f_M^{(LA)}(x) = \sum_{n=0}^{M-1} c_n \psi_n$$

通常，用这种线性逼近就会得到比较差的结果。一种较好的解决方案就是使用最优的 M 个分量表示。这就是所谓的非线性逼近，非线性逼近具有适应性而且是基于输入信号的。一般来讲，非线性逼近可以用下面的公式表示：

$$f_M^{(NLA)}(x) = \sum_{n \in I_M} c_n \psi_n$$

其中， I_M 是对应于 $|c_n|$ 中最大值 M 的集合。非线性逼近方法相比线性逼近会有更好的逼近效果。

下面，我们考虑一下扩展的效率问题：对于大多数感兴趣的目标，扩展

很少或者用几个分量就可以很好地表示。显然,这种有效的表示是通过非线性逼近方法实现的。在一个表示系统中,我们所追求的主要目标就是表示的效率问题。对于人类视觉系统而言,效率就是指当我们看到某个典型的画面时,几乎没有视觉神经元被激活。在图像压缩中,使用有效的图像表示就是指压缩文件的致密性;在基于内容的图像检索系统中,使用有效的图像表示就是指对数据库中的一幅典型图像所生成的索引记录。实验表明,对于分段光滑信号,小波提供了一种非常简单而有效的表示方法,这就是小波能够成功应用于许多信号处理领域的主要原因。

然而,从生理学角度来看,视觉大脑皮层中可接受区域的特点是可以被定位、定向而且是带通的。Olshausen 和 Field 的研究表明:相比人眼,我们需要确定如何采用少量基本元素对自然图像进行细节修补,他们设计了相应的方法,并得到了自然图像较少的基本元素。出人意料的是,这些少量的基本元素与前面所提到的视觉大脑皮层非常类似。这种类似使我们可以对人类视觉系统进行有效假设,目的就是用最少数量的激活神经元捕获所需的本质信息。没有这一点作保证,当我们看周围世界时,大脑就不得不消耗更多的能量。

因此为了实现高效的非线性逼近,迫切需要一种“真正”的二维图像表示方法,以推动下一代图像处理应用领域的发展。通过研究人类视觉系统可以看到,我们期望新的图像表示方法应该满足以下条件:

- (1) 多分辨:图像表示应该使图像由粗到细不断地逼近。
- (2) 局部化:用于图像表示的基本元素应该较好地集中在时间域和频率域中。
- (3) 临界采样:对于某些应用而言(如压缩),图像表示应该是一个基的形式或具有低冗余结构。
- (4) 方向性:图像表示应该包含一些定位在各个方向的基函数,远远多于可分离小波能够提供的三个方向。
- (5) 各向异性:为了捕获图像光滑的轮廓,图像表示应该包含有各种形状的基函数,特别是这些形状要有不同的纵横比。

在这些条件中,可分离小波系统可以很好地满足前三个条件,而最后两个条件则是对不可分结构提出的新挑战。在很多图像处理应用中,进行有效且简单的图像扩展仅仅是第一步,而构造一类新的多尺度分解方法,将其应用于可视化图像信息处理和检索中,以此来提高非线性逼近的效率,才是有效的途径。

一般认为,小波分析能有效地处理含“点奇异”的函数类。而对于含“线奇异”的函数类,小波分析却不能达到最优的非线性逼近阶。当前一个重要的研究方向就是对于各种特定函数类,尤其是含“线奇异”的函数类,寻求其

在给定度量下的最优基。初步的研究成果包括 Ridgelet、Curvelet、Contourlet、Bandelet 等各种多尺度几何分析方法。这些方法都致力于研究对含“线奇异”的二维函数方向信息的刻画、表征,认为具有理想的非线性逼近能力的基函数必定是“方向的”。“方向性”的思想实际上来源于哺乳动物的视觉感受野特性。对含“线奇异”的分片光滑函数,这些新方法在理论上比小波分析更优的非线性逼近能力。

本章在稀疏逼近的框架下,主要介绍稀疏逼近、Fourier 分析、小波分析和多尺度几何分析的发展,其中着重阐述了多尺度几何分析在图像处理领域的应用潜力。具体安排如下:1.2 节以 Olshausen 和 Field 的工作为起点,讨论了图像稀疏逼近的框架;1.3 节讨论了 Fourier 分析和小波分析在图像稀疏表示中的优缺点;1.4 节介绍了多尺度几何分析的发展和数学机理;1.5 节介绍了目前流行的多尺度几何分析中各种变换的原理及特点;1.6 节讨论了多尺度几何变换的逼近性质;1.7 节指出了图像稀疏逼近存在的问题和进一步研究的方向;1.8 节给出了本章小结。

1.2 稀 疏 逼 近

逼近是一种数学中常用的技术,其在数学学科的各个分支及工程的各个领域中都有广泛的应用,而多变量函数的逼近问题则是近几十年数学理论和工程实践的焦点。图像处理的发展给调和分析 and 函数逼近提出了许多新的具有挑战性的问题,例如从含噪数据中恢复原图像、边缘检测、奇异性检测和图像压缩等等,这些问题已经不是传统方法(如 Fourier 变换)所能解决的,同时还要求具有逼近上的稀疏性。方向信息检测也是一个重要的任务,例如纹理识别、分类、直线检测、曲线检测和方向滤波等等。检测工具的有效性和频带划分的精细性,以及算法的简单性、可构造性等能否同时满足,是对调和分析提出的一个深远的课题。

最近,调和分析的发展给图像处理的应用实践带来了新的工具,如小波(Wavelet)^[1]、脊波(Ridgelet)^[2~9]、曲线波(Curvelet)^[10~12]、梳状波(Brushlet)^[13]、楔形波(Wedgelet)^[14]、子束波(Beamlet)^[15]、轮廓波(Contourlet)^[16~18]、条带波(Bandelet)^[19, 20]、方向波(Directionlet)^[21]、剪切波(Shearlet)^[22]等,这些新方法的产生,为图像奇异性的检测提供了有效的工具。它们起源于 Olshausen 和 Field 奠基性的工作^[23],为了解决用较少的基元素来重建一个图像数据库,他们采用的方法是提取图像 16×16 的抽样块,并寻求抽样块的稀疏逼近来重构原图,这里抽样块可以看做是一个阵列,第 p 个抽样块定义为 $X^p = (X^p(i_1, i_2): 1 \leq i_1, i_2 \leq n)$, Olshausen 和

Field 取 $n=16$ 。定义 $\chi=\{X^p: p=1, \dots, P\}$ 满足一定的统计模型, 他们试图寻找满足下式中 X^p 的一些基本基函数 $\{\phi_\mu\}$ 的线性组合:

$$X^p \approx \sum_{\mu} \theta_{\mu}^p \phi_{\mu}$$

这里的基函数不是固定的, 而是由图像数据库通过学习得到的。

Olshausen 和 Field 给出的方法是^[23]: 基函数 $\{\phi_{\mu}\}$ 可以通过学习最优系数 θ_{μ}^p 的稀疏度得到。对于 $n \times n$ 矩阵空间的基 Φ , 目标函数

$$S(\Phi) = \sum_{p=1}^P \left\{ \min_{\theta_{\mu}^p} \|X^p - \sum_{\mu} \theta_{\mu}^p \phi_{\mu}\|_2^2 + \lambda \sum_{\mu} \log(1 + (\theta_{\mu}^p)^2) \right\} \quad (1.1)$$

取决于 Φ 是否选取一个合适的尺度标准。对所有的 μ , 如果某些 θ_{μ}^p 取值为 0, 则 $\sum_{\mu} \log(1 + (\theta_{\mu}^p)^2)$ 是最小的, 它可以看做是 $\log(1+x)$ 在 $x>0$ 的一个凹面。由于目标函数的定义域的凹性, 真正的全局优化是做不到的, 因此他们采用简单的“爬山法”来寻找优化问题的初值, 并用“梯度法”来找寻局部最优值。Olshausen 和 Field 给出了相应的基元素, 其形状是一个窄带的类似于边缘并具有一定方向和位置的函数。

Olshausen 和 Field 的方法表明一个基本元素集合的收敛性由 $S(\Phi)$ 的最优化解获得。这些基本元素具有窄边缘的特性, 而且其形状能够表示某一个方向和位置的信息, 如图 1.1 所示。

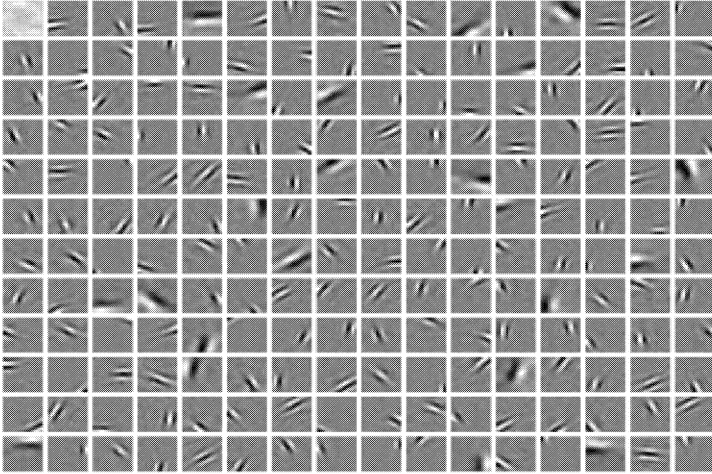


图 1.1 自然图像数据的稀疏分量, Olshausen 和 Field 的结果(参看文献[23])

Olshausen 和 Field 的工作为图像的稀疏逼近奠定了基础, 进而形成了称为稀疏分量分析(Sparse Component Analysis, SCA)的学科分支。然而随着 Bell 和 Sejnowski^[24]工作的开始, 很多研究都跟随着他们的思想继续, 而偏离了 Olshausen 和 Field 研究工作的目的。Bell 和 Sejnowski 的工作强调通过

独立分量分析(Independent Component Analysis, ICA)来寻找图像的判决独立的分量。到目前为止,很多 ICA 方法都试图寻找能恢复原始图像的子图像分量。许多例子表明,ICA 方法中使用的基元素也具有完全、明显的方向性选择,并且范围覆盖了各种各样的方向、位置以及尺度。

ICA 在图像稀疏方面进行了广泛的研究,然而 Olshausen 和 Field 认为人类视觉系统在数学上不可能用一个而且是过完全的基函数库来模拟,该系统应该包括很多分析元素,比表示一幅图像所需最少的分析元素还要多,用此模拟人类视觉系统是一个更加合理的结构。Olshausen 和 Field 认为应该寻找来自一个过完全的基元素库 Φ 的图像表示形式,但在实际应用中,任何独立图像的分析仅仅是基元素库中的一些元素被用到。为了寻找求解最优化问题式(1.1)的答案,我们可以假定库函数 Φ 并不是一个严格的基,可以用一个 m 倍过完全集合来替代,这个集合是从图像数据中学习得到的。

在过完全基元素集合中寻找稀疏分量模型的思想近来被 Lewicki 和 Sejnowski^[25]进一步发展,他们研究了图像模型的推广,例如在音频信号处理中,Lewicki 和 Olshausen^[26]对采用一个图像分析系统的基元素逼近的结果做了详细的分析。

关于稀疏性^[27]:

- 稀疏表示是图像分析中最基本、也是非常重要的内容。

对人类视觉系统的模拟被认为是图像稀疏表示的一个重要的应用实例。例如数据压缩,人眼捕获 100 b/s 的数据和捕获 50 b/s 的数据,是两个完全不同且相关的过程。这些机理对人类视觉系统而言到底是怎么发生的,很多细节仍然是一个谜,而且尤为重要的是:人类视觉系统中的数据压缩机制对许多高阶幅度分辨性能较差。

• 稀疏性所定义的模型看起来似乎比 ICA 定义的模型更为可行,然而通过稀疏模型可以解决的问题,同样也可以通过 ICA 解决。

ICA 是基于概率假设的,但图像中并没有自然概率,而且对于图像组成和形成也没有公认的数学模型;严格说来,独立分量是不可能存在的,因为图像内容由很多关联分量组成,由于一些分量的可见性,会掩盖其余某个分量的特征。

关于过完备性^[27]:

- 过完备性经常应用在生物学领域(例如人眼视觉系统)。

毫无疑问,采用基的概念构造人眼视觉的分析元素是可行的。我们可以通过一个最大化线性独立集合或最小化完备集合的优化问题来找到一组基,满足这种结构的基通过数学方法就可以找到,但这种方法是为了模拟人眼视觉系统而采用的理论方法,实际情况并非如此。

事实上,正交性和最小化完全性在视觉系统中并不是合理的,也无法满

足。例如,我们很难构造一个“正交的感知区域”,即使构造出来,随着系统时间的推移,正交性也很难保持下去,在这样一个最小完整系统中,神经元的死亡将产生对某些特定刺激的盲区。

- 过完备性是获得稀疏表示的一种可行的方法。

信号处理和调和分析的实验表明:过完备系统的自适应表示在本质上可以获得比单个基更好的稀疏特性。

另一方面,SCA 问题同样也面临着以下挑战^[27]:

- 到目前为止,稀疏分量分析问题已有很多基于统计模型的解决方法,它们是通过独立分量构造一个过完备的表示。但是当前流行的 SCA 模型缺少清晰的概念基础,而该基础不同于 ICA 的概念基础。

- 从实现上来说,SCA 要求一个高度非凸面目标函数的全局优化。SCA 存在基于局部优化的启发式搜索方法,这种方法主要用在小规模的问题上(例如,图像大小为 16×16),然而对于海量复杂结构的图像数据库,SCA 才更加有意义。

- 另外,就 SCA 揭示出应用中的一些基本问题来说,我们感兴趣的更多的是关于稀疏分量的基元素集合的结构。例如,寻找一种 SCA 方法,其基元素集合能解释人类视觉系统的一些机理。

到目前为止,寻找稀疏分解已经有了一些广泛的研究。这些方法大体可以分成三类:全局最优算法、贪婪算法、采用特殊结构的字典。

全局最优算法就是寻找一个既可以最小化给定的目标函数,又能同时满足约束条件的分解。典型的目标函数都是凸函数,而且任何局部最小解都是全局最小解。例如基追踪方法(Basis Pursuit, BP)就是一个全局最优算法,在无噪的情况下,它可以最小化 $\|x\|_1$,约束条件为 $\Phi x = y$ 。另一个全局最优算法就是框架方法(Method Of Frame, MOF),它可以最小化 $\|x\|_2$,约束条件为 $\Phi x = y$ 。这是一个组合优化问题,通常一个理想的目标函数是 x 的 l^0 范数。

贪婪算法^[28]是一种逐级算法:在每一步,贪婪算法都会把一个或几个字典以外的元素加到期望的图像的线性组合中。著名的例子就是匹配追踪(Match Pursuit, MP)^[29]。MP 的思想就是在每一步中,算法都会挑选与剩余原子最有关系的原子,一些学者还给出了这种贪婪方法的理论边界。

有些算法采用了字典中的特殊结构,例如最优标准正交基,它是在一个二进制树型结构的字典中寻找一个能够最小化加法熵的标准正交基。这种字典可以是余弦包或小波包。由于贪婪算法是一个逐级算法,因此有时会找到一个效果较差的字典序列。数值实验及理论研究的新进展表明,对于像基追踪这样的全局最优算法,如果在稀疏分解中最终能够找到一组稀疏的“基”,那么它就是稳定的。

Olshausen 和 Field 的方法被许多学者应用于不同场合产生了不同的工具,其中一些是针对不同的目标函数,而相当多的方法却没有考虑优化问题,强调的是寻找独立分量(独立分量分析),并把它应用在图像分析中,并且强调了独立分量分析中所使用的基元素具有不同的方向性、位置和尺度,显然这是不合理的^[27]。

Olshausen 和 Field 的工作可以看做是图像的稀疏逼近的起点,而后随着小波分析、脊波、曲线波、梳状波、楔形波、子束波等的产生和发展,使图像的稀疏逼近达到了一个顶峰,其逼近阶也提高了很多,同时使得基函数真正具有了不同的方向性、位置和尺度,使得方向信息检测更为有效。

1.3 从 Fourier 分析到小波分析

Fourier 分析揭示了时间函数与频谱函数之间内在的联系,反映了信号在整个时间范围内的“全部”频谱成分,是研究周期现象不可缺少的工具。Fourier 变换虽然有很强的频域局部化能力,但并不具有时间局部化能力,而后者对于很多信号处理工作而言,特别是对涉及非平稳信号处理的任务,是至关重要的。

小波分析理论和方法是从 Fourier 分析演变而来的。小波变换以牺牲部分频域定位性能来取得时-频局部性的折中,其不仅能提供较精确的时域定位,而且能提供较精确的频域定位。我们所面对的真实物理信号,更多的表现出非平稳的特性,而小波变换恰恰是处理非平稳信号的有力工具。

小波理论的兴起,得益于其对信号的时、频局域分析能力及其对一维有界变差函数类的最优逼近性能,也得益于 Stéphane Mallat 和 Yves Meyer 等人引入的多分辨率分析概念,以及 Mallat 提出的快速小波变换实现方法。

设 $B = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ 是 Hilbert 空间 H 的一组标准正交基,则 $\forall f \in H$ 可分解为

$$f = \sum_{m=0}^{+\infty} \langle f, g_m \rangle g_m \quad (1.2)$$

称 $f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m$ 为 f 的非线性逼近,其中 I_M 为对应于最大系数幅值 $|\langle f, g_m \rangle|$ 的 M 个向量。非线性逼近误差为

$$\epsilon_n[M] = \|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2 \quad (1.3)$$

逼近误差体现了用基 B 表示函数 f 时的“稀疏程度”或者分解系数的能量集中程度。

定义全变差范数 $\|f\|_V = \int_0^1 |f'(t)| dt$, 如果 $\|f\|_V \leq +\infty$, 我们称 f 是有界变差的, 记为: $f \in BV[0, 1]$ 。大多数一维信号, 如连续可导的光滑信号和具有有限不连续点的不连续信号, 都属于有界变差函数的范畴。

1. 非线性 Fourier 逼近

Fourier 基 $\{e^{i2\pi mt}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ 是 $L^2[0, 1]$ 的一组标准正交基, $\forall f \in L^2[0, 1]$ 可以分解为 Fourier 级数:

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \langle f(u), e^{i\pi mu} \rangle e^{i\pi mt} \quad (1.4)$$

若函数 f 是有界变差的, Fourier 基对函数 f 的非线性逼近误差为 $\epsilon_n^F[M] = O(M^{-1})^{[30]}$, 即 $\epsilon_n^F[M]$ 有 M^{-1} 级的衰减速度。

2. 非线性小波逼近

$[\{\phi_{j,n}\}_{0 \leq n < 2^{-j}}, \{\psi_{j,n}\}_{l < j \leq J, 0 \leq n < 2^{-j}}]$ 定义了 $L^2[0, 1]$ 中逼近空间 V_l 的一组规范正交基^[1], 记为 $\phi_{j,n} = \psi_{j+1,n}$, 则 $f \in L^2[0, 1]$ 的非线性小波逼近为

$$f_M^W = \sum_{(j,n) \in I_M} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n}$$

逼近误差为

$$\epsilon_n^W[M] = \|f - f_M^W\|^2 = \sum_{(j,n) \notin I_M} |\langle f, \psi_{j,n} \rangle|^2 \quad (1.5)$$

假设小波 $\psi_{j,n}$ 属于 C^q 且有 q 阶消失矩, 对于一维分段光滑函数, 有如下定理。

定理 1.1^[1]: 设 f 在 $[0, 1]$ 上具有有限个不连续点, 且在這些不连续点之间是一致 Lipschitz α ($\alpha < q$) 的, 则

$$\epsilon_n^W[M] \leq O(M^{-2\alpha}) \quad (1.6)$$

此时函数 f 的 Fourier 非线性逼近误差 $\epsilon_n^F[M]$ 只有 M^{-1} 的衰减级。 f 在不连续点之间的正则性越高, 小波非线性逼近相对于 Fourier 非线性逼近的改进就越大。

对有界变差函数, 小波具有最优的逼近性能^[31], 有如下定理。

定理 1.2^[1]: 存在常数 C , 使得对所有的 $f \in BV[0, 1]$, 有

$$\epsilon_n^W[M] \leq C \|f\|_V^2 M^{-2} \quad (1.7)$$

毫无疑问, 小波分析比 Fourier 分析能更“稀疏”地表示一维分段光滑或者有界变差函数, 这是小波分析在众多学科领域中取得巨大成功的一个主要原因。

1.4 多尺度几何分析

遗憾的是,小波分析在一维时具有的优异特性并不能简单地推广到二维或更高维。由一维小波张成的可分离小波(Separable Wavelet)只具有有限的方向性,不能“最优”表示具有线奇异性或面奇异性的高维函数。而事实上具有线奇异性或面奇异性的函数在高维空间中非常普遍,例如,自然物体光滑边界使得自然图像的不连续性往往体现为光滑曲线上的奇异性,而并不仅仅是点奇异。

考虑一个简单的二维图像模型^[3]:

$$F_{\Gamma}(\alpha, A) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma(s, C)} F_{\gamma}(\alpha, A) \quad (1.8)$$

其中

$$F_{\gamma}(\alpha, A) = \{f \in [0, 1]^2 \setminus \gamma[0, 1], \|f\|_{C^{\alpha}} \leq A\} \quad (1.9)$$

$$\Gamma(s, C) = \{\gamma: [0, 1] \rightarrow [1/10, 9/10]^2, \|\gamma\|_{C^s} \leq C\} \quad (1.10)$$

式(1.8)表示了一类具有曲线奇异(包括直线)的二维函数,这种函数除了在二维平面中的曲线 $\Gamma(s, C)$ 外,都是 C^{α} 光滑的;而且,奇异曲线 $\Gamma(s, C)$ 本身也 C^s 光滑。如图1.2所示,区域 A 、 B 为 C^{α} 光滑,奇异曲线 Γ 为 C^s 阶光滑。

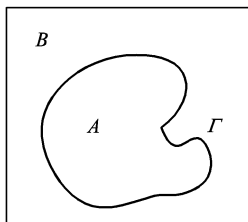


图 1.2 具有光滑边缘的图像模型

对于此类模型,我们有如下定理:

定理 1.3^[1]: 设 $f = C1_{\Omega}$ 是一个边界 $\partial\Omega$ 具有有限长度的集合 Ω 的特征函数,则可分离周期正交小波的非线性逼近误差为

$$\epsilon_n^w[M] \sim \|f\|_V^2 M^{-1}$$

其中有界变差图像的全变差 $\|f\|_V = \int_0^1 \int_0^1 |\vec{\nabla} f(x_1, x_2)| dx_1 dx_2$ 。定理1.3可以推广到沿长度为 $L(L>0)$ 的轮廓 $\partial\Omega$ 且幅值大于 $C(C>0)$ 的不连续的分片正则函数。

实现函数的稀疏表示是信号处理、计算机视觉等很多领域中一个非常核心的问题。对于模型公式(1.8),正交基所能达到的最优逼近误差应该具有

$\epsilon_n^B(M) = \|f - f_M\|^2 \leq CM^{-s}$ 的形式^[27]。但是，小波变换的非线性逼近误差只能达到 M^{-1} 的衰减级。这是因为二维可分离小波基只具有有限的方向，即水平、垂直和对角，方向性的缺乏使小波变换不能充分利用图像本身的几何正则性。

神经生理学家的研究表明^[32]，哺乳动物的视觉皮层的接收场具有局部、方向、带通的特性。1996 年，B. A. Olshausen 和 D. J. Field 的实验结果表明^[23]，视觉皮层的接收场特性使得人类的视觉系统只用最少的视觉神经元就能“捕获”自然场景中的关键信息，这相当于对自然场景的最稀疏表示，或者说是自然场景的“最稀疏”编码。

根据生理学家对人类视觉系统的研究结果和自然图像统计模型，一种“最优”的图像表示方法应该具有如下的特征^[33]：

- (1) 多分辨：能够对图像从粗分辨率到细分辨率进行连续逼近，即“带通”性。
- (2) 局域性：在空域和频域，这种表示方法的“基”应该是“局部”的。
- (3) 方向性：其“基”应该具有“方向”性，不仅仅局限于二维可分离小波的两个方向。

图 1.3 表示了用二维可分离小波来逼近图像中奇异曲线的过程。由一维小波张成的二维小波基具有正方形的支撑区间，不同的分辨率下，其支撑区间为不同尺寸大小的正方形。二维小波逼近奇异曲线过程，最终表现为用“点”来逼近线的过程。在尺度 j ，小波支撑区间的边长近似为 2^{-j} ，幅值超过 2^{-j} 的小波系数的个数至少为 $O(2^j)$ 阶^[4]，当尺度变细时，非零小波系数的数目以指数形式增长，出现了大量不可忽略的系数，最终表现为不能“稀疏”表示原函数。图 1.4 所示为某种我们所希望的变换，这种变换为了能充分利用原函数的几何正则性，其基的支撑区间应该表现为“长条形”，以达到用最少的系数来逼近奇异曲线。基的“长条形”支撑区间实际上是“方向”性的一种体现，也称这种基具有“各向异性 (Anisotropy)”。

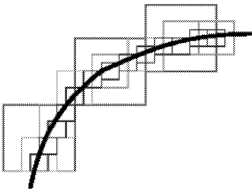


图 1.3 用张量小波逼近奇异曲线

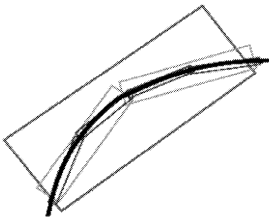


图 1.4 所希望的变换逼近奇异曲线

最近，调和理论发展的一个新的主题就是致力于寻找更有效的基函数，发展一种新的高维函数的最优表示方法。它的发展给信号与图像处理

应用实践带来了新的工具,这就是曾经在数学分析、计算机视觉、统计分析等多个学科中独立发展的多尺度几何分析(Multiscale Geometric Analysis, MGA)方法。它的理论框架最初是由曾经推动小波分析发展的一批先驱者 Ingrid Daubechies, Stéphane Mallat、Albert Cohen、David Donoho、Martin Vetterli、JeanLuc Starck 等人构建的。目前,多尺度几何分析的几种具体工具主要包括: Francois G. Meyer 和 Ronald R. Coifman 构造的 Brushlet (1997 年)、Emmanuel J Candès 和 David Donoho 提出的脊波变换(Ridgelet Transform)(1998 年)、单尺度脊波变换(Monoscale Ridgelet Transform)(1999 年)、基于局部脊波变换的曲线波变换(Curvelet Transform)(1999 年)、David L. Donoho 提出的 Wedgelet(1997 年)、David L. Donoho 和 Xiaoming Huo 提出的 Beamlet 变换(2001 年)、E. Le Pennec 和 Stéphane Mallat 提出的 Bandelet 变换(2003 年)、M N Donoho 和 Martin Vetterli 提出的 Contourlet 变换(2002 年)、Vladan Velisavljevic 等人提出的 Directionlet (2004 年),以及最近 D. Labate 等人又提出了 Shearlet 变换的概念(2005)等。

发展多尺度几何分析的目的是为了检测、表示、处理某些高维空间数据,这些空间的主要特点是:其中数据的某些重要特征集中体现于其低维子集中(如曲线、面等)。比如,对于二维图像而言,主要特征可以由边缘所刻画;而在三维图像中,其重要特征又体现为丝状物(Filaments)和管状物(Tubes)。

这些新的变换方法的提出,无不基于这样一个事实:在高维情况下,小波分析并不能充分利用数据本身所特有的几何特征,小波变换在高维情况下并不是最优的或者说“最稀疏”的函数表示方法。多尺度几何发展的目的和动力正是要致力于发展一种新的高维函数的最优表示方法。

自然界中的多数物体都具有平滑边缘,分片光滑二维函数实际上描述了一大类自然图像。多尺度几何分析相对于小波分析逼近性能的提高,其意义丝毫不亚于小波分析相对于 Fourier 分析逼近性能的提高。

图像的多尺度几何分析方法分为自适应和非自适应两类。

自适应的方法以 E. Le Pennec 和 Stéphane Mallat 提出的 Bandelet^[19]为代表。自适应方法一般先进行边缘检测,再利用边缘信息对原函数进行最优表示。

实际上,在多尺度几何分析的概念诞生以前,人们就发展了多种“自适应”方法希望对图像进行“稀疏”表示。1988 年, S. Carlsson 提出了一种基于边缘的图像表示方法^[34]。这种方法先检测图像边缘,之后,再利用边缘信息通过计算边缘与边缘间的图像灰度值来逼近原图像。基于类似的思想,人们提出了许多其他的方法^[35, 36],它们使用不同的边缘检测算法,再利用阶跃模

型沿着边缘去逼近原图像。在这些模型的基础上,人们又提出了基于小波模极大值的多尺度边缘表示方法^[37]和边缘自适应的方法^[38, 39]。同时,人们还发展了一些基于非完备正交基的表示方法,如 Foveal 小波和 Wavelet Footprint^[40],用来逼近图像中的主要边缘。为了使边缘检测算法稳定,文献^[14, 41, 42]使用了各种全局优化的边缘检测算法,然后在二叉树结构的基础上,利用动态规划来自适应地对图像进行适当的二进剖分。

与自适应方法不同,非自适应的图像多尺度几何表示方法并不需要先验地知道图像本身的几何特征,其代表为 Curvelet 变换和 Contourlet 变换。

1.5 多尺度几何变换

1.5.1 脊波及单尺度脊波变换^[2~9]

脊波理论由 Emmanuel J. Candès 在 1998 年提出,这是一种非自适应的高维函数表示方法。Emmanuel J. Candès 在其博士论文^[2]及文献^[5]中给出了脊波变换的基本理论框架。同年,Donoho 给出了一种正交脊波的构造方法^[4]。2003 年,侯彪、刘芳和焦李成给出了一种脊波变换的实现方法^[7, 8]。脊波变换对于具有直线奇异的多变量函数有良好的逼近性能^[2, 9],但是,对于含曲线奇异的多变量函数,其逼近性能只相当于小波变换,不具有最优的非线性逼近误差衰减阶。1999 年,在文献^[3, 6]中,Candès 又提出了单尺度脊波变换,并给出了其构建方法。他提出单尺度脊波的目的就是为了解决含曲线奇异的多变量函数的稀疏逼近问题。

考虑多变量函数 $f \in L^1 \cap L^2(\mathbf{R}^n)$ 。若函数 ψ 满足特定容许条件,则称 ψ 是容许神经元激励函数,并称 $\psi_\gamma(x) = a^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{\langle u, x \rangle - b}{a}\right)$ 为脊波,定义脊波变换为 $R(f)(\gamma) = \langle f, \psi_\gamma \rangle$ 。脊波变换能最优表示具有直线奇异的分片光滑函数,考虑模型公式(1.8)的特例:

$$f(x_1, x_2) = H(x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta - t_0)g(x_1, x_2) \quad (1.11)$$

其中 $g(x_1, x_2) \in C^a$, H 为 Heavyside 函数,脊波非线性逼近的误差:

$$\epsilon_n^R(M) = \|f - f_M^R\|^2 \leqslant CM^{-a} \quad (1.12)$$

反观小波变换,其对函数 f 的非线性逼近误差只能达到 M^{-1} 的衰减级。

单尺度脊波变换的构造是利用剖分的方法,用直线来逼近曲线。

设函数 $f \in L^2[0, 1]^2$, 用二进方形 $Q = [k_1 2^{-s}, (k_1 + 1) 2^{-s}] \times [k_2 2^{-s}, (k_2 + 1) 2^{-s}]$ 剖分区间 $[0, 1]^2$, 其中,剖分尺度 $s > 0$, k_1, k_2 为整数,用 Ω_s 表示剖分尺度为 s 时的全体二进方形集合,在每个剖分块 Ω_s 上进行脊波变换

即为单尺度脊波变换。

单尺度脊波可表示为: $\{\psi_\mu \equiv w_Q \psi_{Q,a}, Q \in \Omega_s, a \in \Gamma\}$, 其中 Γ 为脊波变换参数空间, w_Q 为适当的窗函数。

对于模型公式(1.8)中含曲线奇异的函数 f , 单尺度脊波变换非线性逼近误差的衰减速度为

$$\epsilon_n^{MR}[M] = \|f - f_M^{MR}\|^2 \leq C \max(M^{-s}, M^{-3/2}) \quad (1.13)$$

其中 s 表示函数 f 中奇异曲线 s 阶可微; 即当 $1 \leq s \leq 3/2$ 时, 其逼近误差的衰减速度为 $O(M^{-s})$ 阶; 当 $3/2 \leq s \leq 2$ 时, 其逼近阶为 $O(M^{-3/2})$ 。注意到此时小波变换对于函数 f 的非线性逼近误差只能达到 M^{-1} 的衰减级, 可知单尺度脊波对于具有曲线奇异的多变量函数的逼近性能无疑比小波有明显的提高。

1.5.2 曲线波(Curvelet)^[10~12]

脊波是一个很好的工具。但对一般的目标函数, 例如图像, 边缘是图像的不连续性所在, 即具有奇异性(一维奇异性或线状奇异性)的地方, 而通常的边缘不是直线型的。脊波变换、Radon 变换和小波变换具有这样的关系: 在二维情况下, 标准正交的脊波分析等价于 Radon 域中的非正交小波分析。对一个具有曲线(而非直线)奇异性的目标来说, 经 Radon 变换后, 奇异性仍旧体现为一条曲线, 而不是一个点, 因此该奇异性的小波表示将不是稀疏的, 它的脊波表示的系数也不是稀疏的。为了解决这个问题, E. J. Candès 提出了一种方案, 即用单尺度脊波来表示这种曲线奇异性, 并构造了 $L^2[0, 1]^2$ 上的局部脊波框架。基本思想就是当把曲线无限分割时, 每一小段可以近似地看做是直线段, 这时我们就可以把脊波分析应用到这些直线段上。同时他也给出了 N 项重构的逼近速率。单尺度脊波是在一个基准尺度 s 上进行脊波变换, 对应于单尺度脊波, E. J. Candès 和 D. L. Donoho^[3] 构造了曲线波(Curvelet)或者称为多尺度脊波, 它是在所有可能的尺度 $s \geq 0$ 进行脊波变换。在二维情况下, 当图像具有奇异曲线并且曲线是二次可微时, 曲线波可以自适应地“跟踪”这条奇异曲线; 并且他们构造了曲线波的紧框架, 对于具有光滑奇异性曲线的目标函数, 曲线波提供了稳定、高效和近于最优的表示。

1.5.3 梳状波(Brushlet)^[13]

Brushlet 也是一种方向图像分析和图像压缩的新工具, Francois G. Meyer 和 Ronald R. Coifman 构造了频率域中仅仅局部化在一个峰值周围的自适应的函数基。

图像中的边缘和纹理可能在任何方向、位置和尺度表现出来,有效地分析和描述纹理结构是图像分析和图像压缩中一项很重要的任务。小波可以提供频率域的基于倍频带的分解方式,但方向的分辨率却很低。小波包能自适应的构造 Fourier 平面最优瓦片分割。然而两个实值的小波包的张量积在 Fourier 平面会产生四个对称的峰值,因此不可能有选择性地局部化在一个唯一的频率。方向滤波器被设计用于图像的方向信息检测上,然而方向滤波器不会产生 Fourier 平面的任意分割。Steerable 滤波器也被设计用来实现 Fourier 平面的任意分割,但是这些滤波器是相当完备的,产生的分解系数将是非常多的,增加的因子是 $5\frac{1}{3}$,不适合于图像压缩的应用。最重要的是这些滤波器都不是正交的,因此,并没有有效的算法来自适应地选择描述特定图像的最优基。

为了得到较好的方向分辨率, Francois G. Meyer 和 Ronald R. Coifman 将 Fourier 平面扩展成加窗的 Fourier 基,称之为 Brushlet, Brushlet 是一个具有相位的复值函数,二维 Brushlet 的相位提供了 Brushlet 的方向上的有用信息。而且为了获得最精确的和最简洁的图像表示形式,依据各个可能的方向、频率和位置的方向性纹理,我们可以自适应地选择 Brushlet 的大小和方向。

1.5.4 子束波(Beamlet)^[15]

对于基于可视化信息的多尺度变换,通常应具有以下两种性质:

(1) 多尺度变换的分析元素在精细的尺度应具有“针状(Needle-like)”结构。

(2) 多尺度变换是使这些分析元素互相连接的一个过程,其考虑的是这些分析元素的结合和空间的相互关系。

因此能体现以上两点的分析系统需要超乎于传统的小波分析的设计思想, Beamlet 正是这种思想的体现。David L. Donoho 和 Xiaoming Huo 构造了一种方向信息的表示工具 Beamlet, 同小波一样也具有多尺度特性,在 Beamlet 框架中,线段扮演了小波分析中点的角色,即小波分析能有效地分析点的奇异性,而 Beamlet 能有效地分析线段的奇异性。

Beamlet 框架由五个关键的部分构成: Beamlet 字典是一组具有二进结构剖分的线段,并在各个二进位置、尺度和方向上展开;图像 $f(x, y)$ 的 Beamlet 变换是 f 沿 Beamlet 字典中的二进线段的积分;合成图像 $f(x, y)$ 的信息存储在 Beamlet 金字塔分解信息中; Beamlet 图的结构是将图像中的像素作为顶点, Beamlet 作为边缘, Beamlet 图中的一个路径相应于原图像中的一个多边形;通过挖掘前四个构成部分,可以产生基于 Beamlet 的算法,

并能有效地区分和抽取具有特定性质的 Beamlet 和 Beamlet 链。

Beamlet 还具有如下三个独特之处：

(1) Beamlet 分析也是一种基本的多尺度分析，但不同于小波分析，是多尺度分析的一种扩展。

(2) Beamlet 也是函数逼近的一种工具，各个位置、尺度和方向的 Beamlet 的结合能够提供平面上光滑曲线的一个稀疏的逼近。

(3) Beamlet 能有效地检测噪声环境中的“细丝”状结构，并对边界寻找问题提供正确的基元素结构。

1.5.5 楔形波(Wedgelet)^[14]

Wedgelet 是 David L. Donoho 研究从含噪数据中恢复原图像的问题中提出的一种方向信息检测模型，他研究了简单的“水平模型”，这类模型中的边缘具有 α -Holder 正则性。采用计算调和分析的思想，Donoho 给出了一种新的超完备的原子(基元素)的结合，称之为 Wedgelet。Wedgelet 采用二进剖分的思想，把各种位置、尺度和方向上的二进楔型区域上的特征函数作为基元素，它提供了“水平模型”的近于最优的表示，并用极小极大描述长度来度量，同时 Donoho 也研究了星型集合上特征函数模型的 Wedgelet 逼近问题，表明基于惩罚复杂度的 Wedgelet 剖分达到了极小极大风险估计。

设 $S(k_1, k_2, j) = \{(x_1, x_2) : [k_1/2^j, (k_1+1)/2^j] \times [k_2/2^j, (k_2+1)/2^j]\}$ (其中 $0 \leq k_1, k_2 \leq 2^j, j \geq 0$ 为一个整数) 为二进正方形中的点的集合，设 n 为一个 $n \times n$ 的正方形格(例如一幅图像)，这里 $n = 2^J$ ，则共有 n^2 个包含独立像素的格 $S(k_1, k_2, J)$ ($0 \leq k_1, k_2 \leq n$)。我们称连接两个顶点 $(k_1/n, k_2/n)$ 处的像素点的线段为 edgel，并且这两个顶点可以在同一条二进正方形的边上。进一步，我们把所有的 edgel 中两个顶点不在同一条二进正方形的边上的 edgel 称为 Edgelet，则 Wedgelet 由以下的函数构成：每一个 Edgelet 和所在的二进正方形的边构成的楔型区域上的特征函数称为 Wedgelet。用这样的函数作为基元素的集合来逼近一个二维函数。

1.5.6 轮廓波(Contourlet)^[16~18]

2002 年，M. N. Do 和 Martin Vetterli 提出了一种“真正”的图像二维表示方法——Contourlet 变换，也称塔形方向滤波器组(Pyramidal Directional Filter Bank, PDFB)。Contourlet 变换是另一种多分辨的、局域的、方向的图像表示方法。

Contourlet 变换继承了 Curvelet 变换的各向异性尺度关系，因此在一定意义上可以认为是 Curvelet 变换的另一种实现方式。Contourlet 基的支撑区