

高等学校工科教材

通信原理学习指导

钱学荣摇王摇禾摇编著

電子工業出版社

北京 2000 年 1 月第 1 版

北京·月

前 摇 摇 言

随着信息时代的到来,通信技术越来越受到人们的青睐。通信信息技术人才的需求量很大,通信信息技术专业人才就业率高,经济收入丰厚,使得报考通信信息技术专业的学生人数逐年增多。为了满足不断增长的社会需求,近年来,不少院校都新增开设通信信息类专业。

“通信原理”课程是通信类专业的一门重要的专业基础理论课程,它系统讲述了通信系统各个组成部分的基础理论和基本原理。该课程涉及概率统计、随机过程、信号与系统分析、数字电路、通信电路等多门前修课程,具有理论性强、知识面广的特点。在教学、学习,特别是研究生入学考试过程中,师生普遍反映缺少相关的参考资料,希望能有一本较好的教学指导书。据我们了解,目前国内尚无此类书籍。应广大青年教师、广大学生和研究生报考者的要求,作者根据多年讲授“通信原理”课程的教学经验,结合国内优秀教材:西安电子科技大学樊昌信教授的《通信原理》和清华大学曹志刚教授的《现代通信原理》,编写了这本《通信原理学习指导》。它旨在帮助青年教师和广大学生更好地学习掌握“通信原理”的基本概念和解题方法,以进一步加深对课程内容的理解。

全书各章一般分为内容提要、例题详解、习题解答、补充习题四个部分,反映了各章内容的重点和主要概念。对主要例题力求做到一题多解,演示解题方法。为了扩大知识面,对大部分章节编写了补充习题。

全书共收集、编写习题猿愿道,其中包括例题详解缘道,习题解答圆猿道,补充习题怨道,为读者提供了充分的选择余地。

在本书的编写过程中得到西安电子科技大学樊昌信教授的大力支持,南京邮电学院吴新余教授为本书的完善做了不少工作。在此,表示衷心地感谢。

本书根据钱学荣副教授员源年的教学经验和积累的资料编写。王禾老师整理了有关西电《通信原理》一书的习题解答,补做了部分习题解答初稿,完成全书的图文输入工作。钱学荣副教授新解了有关清华《现代通信原理》一书的习题,并对全书的初稿作了修改和定稿,统编了全书。在本书的编写过程中参考了萧剑英、穆士娟、庞开建编写的《习题集》。另外,苏中波、许颖文、吴献峰、徐威等四位同学在做毕业设计时做了一些工作,在此表示感谢。

由于我们水平有限,一定会有许多不妥和错误之处,殷切希望读者向我们提出宝贵意见。

编著者
圆田田院员

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 内容提要	1
1.2 例题详解	1
1.3 习题解答	1
1.4 补充练习	1
第 2 章 随机信号分析	2
2.1 内容提要	2
2.2 例题详解	2
2.3 习题解答	2
2.4 补充练习	2
第 3 章 信道	3
3.1 内容提要	3
3.2 例题详解	3
3.3 习题解答	3
3.4 补充练习	3
第 4 章 模拟调制系统	4
4.1 内容提要	4
4.2 例题详解	4
4.3 习题解答	4
4.4 补充练习	4
第 5 章 数字基带传输系统	5
5.1 内容提要	5
5.2 例题详解	5
5.3 习题解答	5
5.4 补充练习	5
第 6 章 数字调制系统	6
6.1 内容提要	6
6.2 例题详解	6
6.3 习题解答	6
6.4 补充练习	6
第 7 章 模拟信号的数字传输	7
7.1 内容提要	7
7.2 例题详解	7
7.3 习题解答	7
7.4 补充练习	7
第 8 章 数字系统的最佳接收	8
8.1 内容提要	8
8.2 例题详解	8
8.3 习题解答	8

第 9 章 差错控制编码	9-1
9.1 内容提要	9-1
9.2 例题详解	9-1
9.3 习题解答	9-1
9.4 补充练习	9-1
第 10 章 正交编码与伪随机序列	10-1
10.1 内容提要	10-1
10.2 例题详解	10-1
10.3 习题解答	10-1
第 11 章 同步原理	11-1
11.1 内容提要	11-1
11.2 例题详解	11-1
11.3 习题解答	11-1
11.4 补充练习	11-1
附录 A 贝塞尔函数和误差函数	A-1
附录 B 部分既约多项式表	B-1
附录 C 汉明码	C-1
参考文献	1-1

第 1 章 绪论

1.1 内容提要

通信的定义：通信是指信息的传输和交换，利用“电”来传递“信息”的方式称为“电信”，简称通信。

1.1.1 通信系统模型

(1) 一般性模型，如图 1-1 所示。

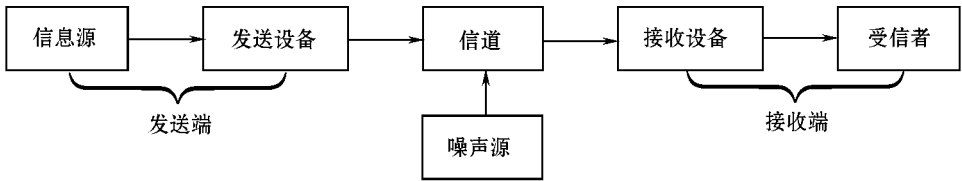


图 1-1 一般性通信系统模型

发送端：信息源——将消息变成原始的电信号（基带信号）。

发送设备——将原始电信号变成适合在信道传输的形式（已调信号）。

信道：信号传输的媒质，有有线信道和无线信道之分。

接收端：接收设备——将信道中送来的已调信号还原成原始电信号。

受信者——将原始电信号还原成消息。

噪声源：信道中或通信系统中干扰的集中表示。

一般性模型反映了通信系统的共性，当讨论的问题具体化时，系统模型的各个部分会变得更加具体。

(2) 模拟通信系统模型，如图 1-2 所示。

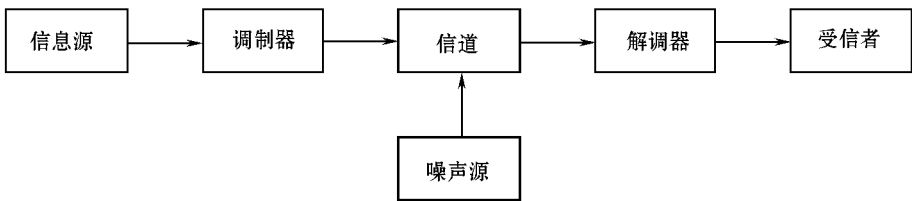


图 1-2 模拟通信系统模型

信息源——模拟通信中的信息源是状态连续的模拟信源。

调制器——进行频谱搬移，将来自信息源的基带信号变成适合在信道传输的已调信号的设备。

解调器——将已调信号还原成基带信号与调制相反过程处理的设备。

(3) 数字通信系统模型，如图 1-3 所示。

数字通信的信息源是状态离散（或可数）的数字信源。加密器是为保密通信而增加的编码器，解密器是它的反过程的处理设备。编码器是为提高通信可靠性的差错控制编码器，译码器

器是它的反过程的处理设备。

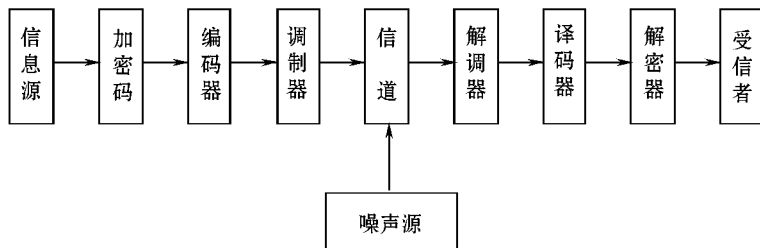


图 1.1.1 数字通信系统模型

通信系统分类

- (1) 根据消息的物理特征分为：电话通信系统；
数据通信系统；
图像通信系统。
- (2) 根据工作频率分为：基带传输系统；
频带传输系统。
- (3) 根据信号特征分为：模拟通信系统；
数字通信系统。
- (4) 根据传输媒介分为：有线通信系统；
无线通信系统。
- (5) 根据信号复用方式分为：频分复用通信系统；
时分复用通信系统；
码分复用通信系统。

通信方式分类

- (1) 点与点之间的通信：单工通信；
半双工通信；
全双工通信。
- (2) 串序传输通信与并序传输通信。

信息及度量

消息：通信系统的传输对象，例如：符号、语音、数据、图像等，它是信息的载体。

信息：消息中有意义的内容。信息量 I 与消息 x 出现的概率 $P(x)$ 有关，

$$I(x) = -\log_2 P(x)$$

式中 \log_2 为以 2 为底的对数，与信息量单位有关。若 x 出现的概率为 $P(x)$ ，

则 x 的信息量为 $I(x)$ 奈特 (Nats)；

若 x 出现的概率为 $P(x)$ ，则 x 的信息量为 $I(x)$ 比特 (bits)。

平均信息量 (信息源的熵)

设离散信息源为 $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ ，且有 $\sum_{i=1}^N P(x_i) = 1$ ，

则信息源的熵为 $H(X) = -\sum_{i=1}^N P(x_i) \log_2 P(x_i)$ 比特/符号，

消息的信息量 I 若消息的总符号数为 N ，则 I 为 $NH(X)$ 比特。

主要性能指标:有效性和可靠性

有效性:系统传输消息(或信息)的“速度”,又称传输速率。在模拟系统中用信息速率 R_b 表示,在数字系统中用比特率 R_b 或码元速率 R_B (B)表示。

二进制码元速率和比特率之间的关系如下

$$R_b = R_B \log_2 M$$

可靠性:系统传输消息或信息的可靠程度。又称误信率、误码率或误比特率。在模拟通信系统中用误信率或均方误差来表示,在数字通信系统中用误码率或误比特率来表示。

例题详解

例 1 一个由字母粤月悦阅组成的字,对于传输的每一个字母用二进制脉冲编码,粤代替粤,月代替月,悦代替悦,阅代替阅,每个脉冲宽度为 τ 。

(1) 不同的字母是等可能出现时,试计算传输的平均信息速率。

(2) 若每个字母出现的可能性分别为

$$P_1 = \frac{1}{4}, P_2 = \frac{1}{4}, P_3 = \frac{1}{4}, P_4 = \frac{1}{4}$$

试计算传输的平均信息速率。

解: (1) 不同的字母是等可能出现,即出现概率均为 $\frac{1}{4}$

每个字母的平均信息量为 $\log_2 4 = 2$ 比特/符号

因为每个脉冲宽度为 τ ,所以每个字母所占用的时间为

$$T = \tau$$

每秒传送符号数为 $\frac{1}{T} = \frac{1}{\tau}$ 符号/秒

平均信息速率为 $R_b = \frac{1}{\tau} \times 2 = \frac{2}{\tau}$ 比特/秒

(2) 平均信息量为

$$H = -\left(\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4}\right) = 2 \text{ 比特/符号}$$

平均信息速率为 $R_b = \frac{1}{\tau} \times 2 = \frac{2}{\tau}$ 比特/秒

例 2 一个离散信号源每毫秒发出源种符号中的一个,各相互独立符号出现的概率分别为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$,求该信号源的平均信息量和信息速率。

解:利用熵的计算公式,平均信息量为

$$H = -\sum_{i=1}^4 \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} = 2 \text{ 比特/符号}$$

信息速率为

$$R_b = \frac{1}{T} \times H = \frac{1}{10^{-3}} \times 2 = 2000 \text{ 比特/秒}$$

习题解答

例 1 设英文字母 E 出现的概率为 $\frac{1}{4}$, G 出现的概率为 $\frac{1}{4}$,试求 E 及 G 的信息量。

信道转移概率矩阵为 $\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ 求：

- (1) 输出符号集 再的平均信息量 $H(Y)$ ；
- (2) 条件熵 $H(X|Y)$ 与 $H(Y|X)$ ；
- (3) 平均互信息量 $I(X;Y)$ 。

解：(1) $P_{11} = \frac{1}{4}, P_{12} = \frac{1}{4}, P_{21} = \frac{1}{4}, P_{22} = \frac{1}{4}$

故输出符号集 再的平均信息量

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^2 P_{1j} \log_2 P_{1j} - \sum_{j=1}^2 P_{2j} \log_2 P_{2j} = 2 \text{ 比特/符号}$$

(2) 条件熵

$$H(X|Y) = -\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 P_{ij} \log_2 P_{ij} = -\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 P_{ij} \log_2 P_{ij} = 2 \text{ 比特/符号}$$

平均互信息量 $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = 2 - 2 = 0$

又因为 $H(X|Y) = H(X)$

所以条件熵

$$H(X|Y) = H(X) = 2 \text{ 比特/符号}$$

(3) 平均互信息量 $I(X;Y) = 0$

补充练习

1. 已知八进制数字信号的传输速率为 1200 波特，试问变换成二进制数字信号时的传输速率为多少？

2. 已知二进制数字信号的传输速率为 1200 波特，试问变换成四进制数字信号时，传输速率为多少波特？

3. 试问四进制、八进制的每一波形所含的信息量是二进制每一波形所含信息量的多少倍？

4. 若采用 2 作为信息量对数的底，试求该信息量单位与比特单位的关系。

5. 英文字母中“藻”的出现概率为 0.1，“糟”的出现概率为 0.1，“燥”的出现概率为 0.1，分别计算它们的自信息量。

6. 同时掷两个骰子，也就是各面呈现的概率都是 $\frac{1}{6}$ ，求：

- (1) “藻和 藻同时出现”这一事件的自信息量；
- (2) “两个 1 同时出现”这一事件的自信息量；
- (3) 两个点数的各种组合（无序对）的熵或平均信息量；

(原)两个点数之和的熵；

(缘)两个点数中至少有一个是 员的自信息量。

题 某一无记忆信源的符号集为 {园,员},已知 越,员,越,越

(负)求符号的平均熵；

(圆)由 员个符号构成的序列,求某一特定序列(例如有 皂个“园”和 (员皂原皂)个“员”)的自信息量的表达式。

(猿)计算 (圆)中的序列的熵。

第 四 章 随 机 信 号 分 析

四 章 内 容 提 要

凡信号参数具有随机性的信号为随机信号。凡是不能预测的噪声统称为随机噪声，简称噪声。随机信号和噪声统称为随机过程。随机过程可看成随机的时间函数或者看成随机变量随时间变化的集合。

一 随 机 过 程 $\xi(t)$ 的 数 字 特 征

- (一) 数学期望 $E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \cdot p(\xi) d\xi$
- (二) 方差 $D[\xi(t)] = E[\xi^2(t)] - \{E[\xi(t)]\}^2$
 $\sigma^2(t)$
- (三) 协方差函数 $C_{\xi}(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\xi(t_2)] - \{E[\xi(t_1)]E[\xi(t_2)]\}$
- (四) 相关函数 $R_{\xi}(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\xi(t_2)]$
 $R_{\xi}(t, t) = E[\xi^2(t)] = \sigma^2(t) + \{E[\xi(t)]\}^2$

二 平 稳 随 机 过 程 有 狭 义 和 广 义 之 分

狭义平稳 对任意的 t 和 τ 随机过程 $\xi(t)$ 的 n 维概率密度函数满足
 $p_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = p_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$ 。

广义平稳 数学期望及方差与 t 无关，即 $E[\xi(t)] = \text{const}$ ，且自相关函数只与时间间隔 τ 有关，即 $R_{\xi}(t_1, t_2) = R_{\xi}(\tau)$ 。

狭义平稳一定是广义平稳，反之不一定成立。

平稳随机过程的特性——各态历经性：即平稳随机过程的数字特征，可由随机过程的任一实现的数字特征来决定。

三 对于实平稳随机过程 $\xi(t)$ 自相关函数 $R_{\xi}(\tau)$ 的主要性质：

- (一) $R_{\xi}(0)$ 为 $\xi(t)$ 的平均功率 $P = R_{\xi}(0) = E[\xi^2(t)]$
- (二) $R_{\xi}(\tau)$ 为偶函数 $R_{\xi}(\tau) = R_{\xi}(-\tau)$
- (三) $R_{\xi}(0)$ 为 $R_{\xi}(\tau)$ 的上界 $R_{\xi}(\tau) \leq R_{\xi}(0)$
- (四) $R_{\xi}(0)$ 为 $\xi(t)$ 的直流功率 $P_{DC} = R_{\xi}(0) = \{E[\xi(t)]\}^2$
- (五) $R_{\xi}(0) - R_{\xi}(\tau)$ 为 $\xi(t)$ 的方差，即交流功率 $P_{AC} = R_{\xi}(0) - R_{\xi}(\tau) = \sigma^2(t)$

平稳随机过程的功率谱密度应看作是每一可能实现的功率谱的统计平均，且自相关函数与其功率谱密度之间互为傅里叶变换关系。

$$P_{\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad \text{或} \quad R_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

高斯过程又称正态随机过程。若 ξ 为服从正态分布的随机变量，则其一维概率密度函数可表示成

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(\xi - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

式中 σ 为常量 (分别为均值与方差)。

枣曾) 有如下特性：

(员)枣曾) 对称于 曾越葬

(圆)枣曾) 在 (原肆 葬) 内单调上升 在 (葬肆) 内单调下降 且在点 葬处达到极大值 $\frac{员}{\sqrt{\pi}\sigma}$ 。

$$(猿) \int_{原肆}^{肆肆} 枣曾 曾越葬 肆肆 且 肆肆 \int_{原肆}^{肆肆} 枣曾 曾越葬 \int_{肆肆}^{肆肆} 枣曾 曾越葬 \frac{员}{\pi}$$

(源)对不同的 葬(固定 σ) 表现为 枣曾) 图形的左右平移 对不同的 σ (固定 葬) 枣曾) 的图形将随 σ 的减小而变高和变窄。

一维的正态分布函数

$$\text{云}(曾) \text{越} \frac{员}{\sqrt{\pi}\sigma} \int_{原肆}^{曾} 枣曾 \left[\frac{原(扎原葬)}{\sigma} \right] 肆肆 \text{越} \phi \left(\frac{曾原葬}{\sigma} \right)$$

定义概率积分函数
$$\phi(曾) \text{越} \frac{圆}{\sqrt{\pi}} \int_{原}^{曾} 枣曾 \left(\frac{扎}{\sigma} \right) 肆肆$$

误差函数
$$\text{藻枣曾) 越} \frac{圆}{\sqrt{\pi}} \int_{原}^{曾} 枣曾 肆肆$$

互补误差函数
$$\text{藻糟}(曾) \text{越} 员原 \text{藻枣曾) 越} \frac{圆}{\sqrt{\pi}} \int_{曾}^{肆肆} 枣曾 肆肆$$

因此分布函数 云(曾) 又可表示成：

$$\text{云}(曾) \text{越} \frac{员}{\pi} \text{垣} \frac{员}{\sqrt{\pi}} \text{藻枣} \left(\frac{曾原葬}{\sqrt{\pi}} \right) \text{越} 员原 \frac{员}{\pi} \text{藻糟} \left(\frac{曾原葬}{\sqrt{\pi}} \right)$$

由此,可得出概率积分函数与误差函数之间的关系为

$$\text{藻糟}(曾) \text{越} 圆原 \text{藻枣} \left(\frac{曾}{\sqrt{\pi}} \right) \text{或} \text{藻枣曾) 越} 圆 \left(\frac{曾}{\sqrt{\pi}} \right) 原 员$$

愿窄带随机过程有两种表示方法

(员) 包络、相位表示 $\text{摇} \xi(贼) \text{越} \xi_{肆肆}(贼) \text{肆肆} \cos[\omega_肆肆 t + \varphi_{肆肆}(贼)]$ 肆肆 ≥ 0

(圆) 同相、正交表示 $\text{摇} \xi(贼) \text{越} \xi_{肆肆}(贼) \text{肆肆} \cos \varphi_{肆肆}(贼) \text{肆肆} \text{垣} \xi_{肆肆}(贼) \text{肆肆} \sin \varphi_{肆肆}(贼) \text{肆肆}$

式中 $\text{摇} \xi_{肆肆}(贼) \text{越} \xi_{肆肆}(贼) \text{肆肆}$ 为同相分量；

$\xi_{肆肆}(贼) \text{越} \xi_{肆肆}(贼) \text{肆肆}$ 为正交分量。

对于一个均值为零的窄带平稳高斯过程 $\xi(贼)$ 其 $\xi_{肆肆}(贼)$ 与 $\xi_{肆肆}(贼)$ 同样是平稳高斯过程 且均值都为零 方差相同 且在同一时刻上得到的 $\xi_{肆肆}(贼)$ 与 $\xi_{肆肆}(贼)$ 是互不相关的或统计独立的。

愿窄带随机过程的包络 肆肆) 服从瑞利分布为

$$\text{枣肆肆) 越} \frac{肆肆}{\sigma_{肆肆}^2} \text{枣肆肆} \left[\frac{肆肆}{\sigma_{肆肆}} \right] \text{肆肆} \geq 0$$

其相位 $\varphi_{肆肆}$ 服从均匀分布为

$$\text{枣}(\varphi_{肆肆}) \text{越} \frac{员}{\pi} \pi \leq \varphi_{肆肆} \leq \pi$$

愿白噪声——一个理想的宽带过程 即其功率谱密度在整个频域内都均匀分布 双边功率谱密度表示为

$$\text{孕}_{肆肆}(\omega) \text{越} \frac{肆肆}{\pi} \text{肆肆}$$

例 10.1 对于正弦波加窄带高斯噪声, 其混合信号形式为

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) + n(t)$$

式中, $n(t)$ 为窄带高斯过程, 其均值为零。正弦波的相位 θ 在 $(-\pi, \pi)$ 上均匀分布, 且 ω_0 为已知, 则 $x(t)$ 的包络为

$$r(t) = \sqrt{A^2 + n^2(t)}$$

其概率密度函数服从广义瑞利分布:

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] \quad r \geq 0$$

式中, σ^2 为 $n(t)$ 的方差, $J_0(x)$ 为零阶修正贝塞尔函数。

例 10.2 平稳随机过程通过线性系统。设输入 $\xi(t)$ 是平稳随机过程, 通过系统 $H(\omega)$ 输出过程为 $\xi_o(t)$, 则我们可以得到以下几个结论:

(1) $E[\xi_o(t)] = E[\xi(t)] \cdot |H(0)|$

(2) $R_{\xi_o}(\tau) = R_{\xi}(\tau) \cdot |H(\omega)|^2$

(3) $S_{\xi_o}(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot S_{\xi}(\omega)$

因此, 输出过程 $\xi_o(t)$ 是广义平稳过程。

例 10.3 例题详解

例 10.3 设随机过程 $\xi(t)$ 可表示成 $\xi(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$, 式中 θ 是一个离散随机变量, 且 $P(\theta = \pi) = P(\theta = 0) = \frac{1}{2}$, 试求 $E[\xi(t)]$ 及 $R_{\xi}(t)$ 。

解: $E[\xi(t)] = E[A \cos(\omega_0 t + \theta)] = A \cdot E[\cos(\omega_0 t + \theta)] = A \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \theta) \cdot \frac{1}{2} d\theta = 0$

$$R_{\xi}(t) = E[\xi(t) \xi(t-t)] = A^2 E[\cos(\omega_0 t + \theta) \cos(\omega_0 (t-t) + \theta)] = A^2 E[\cos(\omega_0 t + \theta) \cos(\omega_0 t - \omega_0 t + \theta)] = A^2 E[\cos^2(\omega_0 t + \theta)] = \frac{A^2}{2}$$

例 10.4 若随机过程 $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$, 其中 θ 是广义平稳随机过程, 且自相关函数 $R_{\theta}(\tau)$ 为

$$R_{\theta}(\tau) = \begin{cases} A^2 - \tau^2 & 0 \leq \tau \leq A \\ 0 & \tau > A \end{cases}$$

θ 是服从均匀分布的随机变量, 它与 $x(t)$ 彼此统计独立。

(1) 证明 $x(t)$ 是广义平稳的;

(2) 绘出自相关函数的 $R_x(\tau)$ 波形;

(3) 求功率谱密度 $S_x(\omega)$ 及功率谱

解: (1) 先求 $x(t)$ 的数学期望 $E[x(t)]$:

$$E[x(t)] = E[A \cos(\omega_0 t + \theta)] = A \cdot E[\cos(\omega_0 t + \theta)] = 0$$

因为 θ 与 $x(t)$ 彼此统计独立, 所以

$$R_x(\tau) = E[x(t) x(t-\tau)] = A^2 E[\cos(\omega_0 t + \theta) \cos(\omega_0 (t-\tau) + \theta)]$$

$$= A^2 E[\cos(\omega_0 t + \theta) \cos(\omega_0 t - \omega_0 \tau + \theta)] = A^2 E[\cos^2(\omega_0 t + \theta) \cos(\omega_0 \tau)] = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

$$= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

再求 $x(t)$ 的自相关函数:

设 \$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t - nT)\$

$$R_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) z(t+\tau) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2 \delta(\tau)$$

$$R_z(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2 \delta(\tau)$$

因为 \$z(t)\$ 的数学期望与 \$t\$ 无关, 是常数, 且自相关函数与 \$t\$ 无关, 只与时间间隔 \$\tau\$ 有关, 所以 \$z(t)\$ 是广义平稳的随机过程。

$$R_z(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2 \delta(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2 & |\tau| \leq T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

设 \$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\$, 并取 \$A = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2\$, 则 \$R_z(\tau)\$ 的图形如图 10-10 所示。

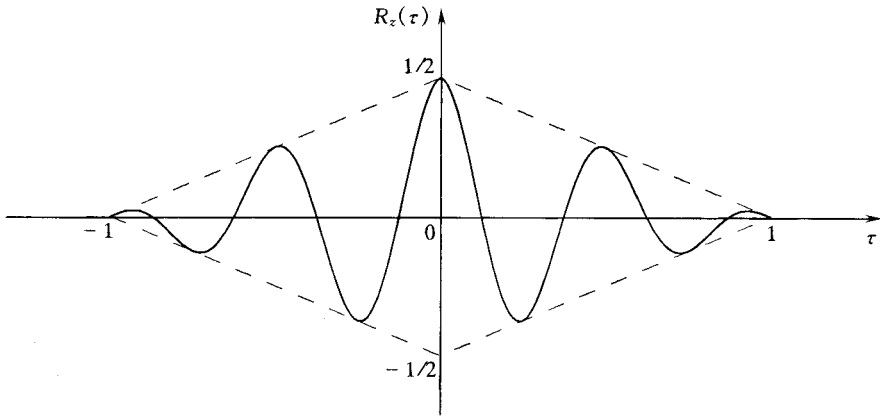


图 10-10 例 10-1 图

(例) 因为功率谱密度 \$S_z(\omega) \leftrightarrow R_z(\tau)\$,

$$S_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_z(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2 \left[\frac{e^{-j\omega(\tau-T)}}{-j\omega} - \frac{e^{-j\omega\tau}}{-j\omega} \right]$$

$$\text{功率谱} \quad S_z(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2 \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\text{或} \quad S_z(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2 \delta(\omega - \omega_0)$$

例 10-2 设有一个随机二进制矩形脉冲波形, 它的每一个脉冲的持续时间为 \$T_b\$, 脉冲幅度取 \$+1\$ 的概率相等。现假设任一间隔 \$T_b\$ 内波形取值与任何别的间隔内取值统计无关, 且过程具有广义平稳性, 试证:

$$(1) \text{ 自相关函数 } R_z(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T_b} & |\tau| \leq T_b \\ 0 & |\tau| > T_b \end{cases}$$

$$(2) \text{ 功率谱密度 } S_z(\omega) = \frac{1}{T_b} \left[\frac{\sin(\pi f T_b)}{\pi f} \right]^2$$

证明: (1) 由题意, 设 \$\xi(t)\$ 是随机二进制信号的一个样本函数, 如图 10-11 所示。

因为脉冲幅度取 \$+1\$ 的概率相等, 所以 \$\xi(t)\$ 的数学期望为

$$E[\xi(t)] = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} \xi(t) dt = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} 1 dt = \frac{1}{T_b} \cdot T_b = 1$$

令 t_1, t_2 是任意选取的两个时刻 :

当 $t_1 < t_2$ 时

t_1 和 t_2 在不同的脉冲间隔内 $\xi(t_1)$ 和 $\xi(t_2)$ 相互独立 ,所以此时

$$P(\xi(t_1) = 1, \xi(t_2) = 1) = P(\xi(t_1) = 1) \cdot P(\xi(t_2) = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

当 $t_1 < t_2$ 时

t_1 和 t_2 有可能在同一脉冲间隔内 ,也有可能不在同一脉冲间隔内 ,这取决于随机起始时间 t_0 ,如图 9.1.1 所示 , (a) 图 t_1 和 t_2 在同一脉冲间隔内 , (b) 图 t_1 和 t_2 不在同一脉冲间隔内。

设 t_1 和 t_2 不在同一脉冲间隔为事件 A ,由于 t_0 等可能取 $0 \sim T_b$ 内任何值 ,当 $t_2 - t_1 < T_b$ 时 t_1 和 t_2 在同一脉冲间隔内的概率为

$$P(A) = \frac{t_2 - t_1}{T_b} \quad \text{当 } t_2 - t_1 < T_b$$

一般情况下 $P(A) = \frac{t_2 - t_1}{T_b}$

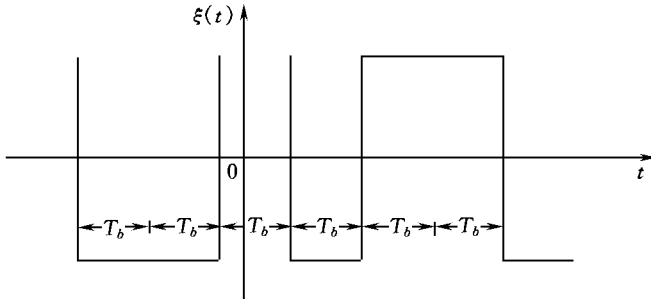
相应地 t_1 和 t_2 在同一脉冲间隔为事件 \bar{A} , \bar{A} 的概率为

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{t_2 - t_1}{T_b}$$

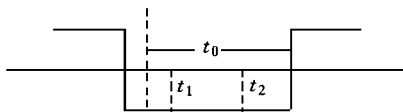
于是 ,此随机二进制信号的自相关函数为

$R_{\xi}(t) = E[\xi(t_1)\xi(t_1+t)]$

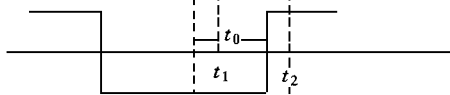
$$= E[\xi(t_1)\xi(t_1+t) | \bar{A}] \cdot P(\bar{A}) + E[\xi(t_1)\xi(t_1+t) | A] \cdot P(A)$$



(a) 随机二进制信号的样本函数 $\xi(t)$



(b) t_1 和 t_2 在同一脉冲间隔内



(c) t_1 和 t_2 不在同一脉冲间隔内

图 9.1.1 例 9.1.1

因为 A 表示事件 t_1 和 t_2 不在同一脉冲间隔 , 所以