

第 1 章 绪 论

1.1 通信和通信系统的一般概念

通信的目的是传递消息，例如把地点 *A* 的消息传输到地点 *B*，或者把地点 *A* 和地点 *B* 的消息双向传输。消息的表达形式有语言、文字、图象、数据等。

实现通信的方式很多。随着现代科学技术的发展，目前使用最广泛的方式是电通信方式，即用电信号携带所要传递的消息，然后经过各种电信道进行传输，达到通信的目的。之所以使用电通信方式是因为这种方式能使消息几乎在任意的通信距离上实现迅速而又准确的传递。如今，在自然科学领域涉及“通信”，这一术语时，一般指的就是电通信。就广泛的意义上来说，光通信也属于电通信，因为光也是一种电磁波。

电信号由一地向另一地传输需要通过媒质。按媒质的不同通信方式可分为两大类：一类称为有线通信，另一类称为无线通信。有线通信是用导线作为传输媒质的通信方式，这里的导线可以是架空明线、各种电缆、波导以及光纤。例如图 1-1 所示意的是普通的有线

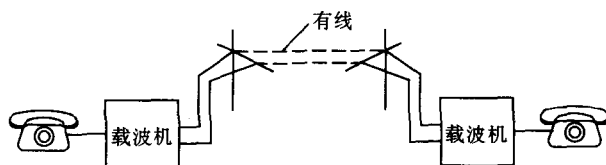


图 1-1 有线载波电话系统示意图

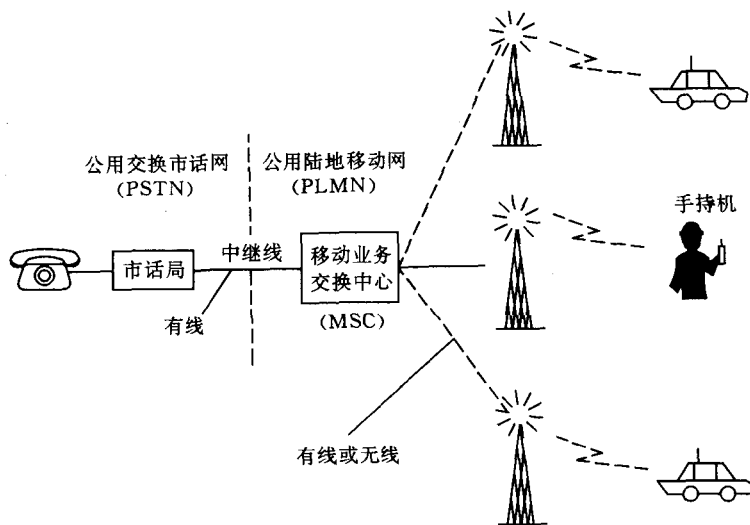


图 1-2 移动电话系统示意图

长途电话系统。图中，电话机完成话音信号与音频电信号之间的变换，载波机完成音频电信号与高频电信号之间的变换。两地的载波机之间用电缆连接。无线通信则不需要架设导线，而是利用无线电波在空间的传播来传递消息。例如图 1-2 所示意的是移动电话系统。图中，各基站与移动交换局用有线或无线相连，各基站与移动电话之间用无线方式进行通信联络。移动电话把电话信号转换成相应的高频电磁波，通过天线发往基站。同理，基站也通过天线将信号发往移动电话，最终实现移动电话与其它电话之间的通信。

无论是无线通信还是有线通信，为了实现消息的传递和交换，都需要一定的技术设备和传输媒质。为完成通信任务所需要的一切技术设备和传输媒质所构成的总体称为通信系统。通信系统的一般模型如图 1-3 所示。图中，信源即原始电信号的来源，它的作用是将原始消息转换为相应的电信号。这样的电信号通常称为消息信号或基带信号。常用的信源有电话机的话筒、摄象机、传真机等。为了传输基带信号，发送设备对基带信号进行各种处理和变换，以使它适合于在信道中传输。这些处理和变换通常包括调制、放大和滤波等。在发送设备和接收设备之间用于传输信号的媒质称为信道。在接收端，接收设备的功能与发送设备的相反，其作用是对接收的信号进行必要的处理和变换，以便恢复出相应的基带信号。受信者的作用是将恢复出来的原始电信号转换成相应的消息，例如电话机的听筒将音频电信号转换成声音，提供给最终的消息接收对象。图中的噪声源，是信道中的噪声以及分散在通信系统其它各处的噪声的集中表示。

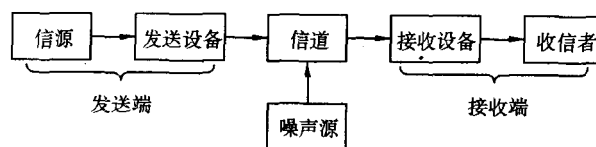


图 1-3 通信系统的一般模型

图 1-3 概括地描述了通信系统的组成，它反映了通信系统的共性，通常我们把它称为通信系统的一般模型。根据所要研究的对象和所关心的问题不同，还要使用不同形式的较具体的通信系统。对通信系统及其基本理论的讨论，就是围绕通信系统的模型而展开的。

1.2 模拟通信与数字通信

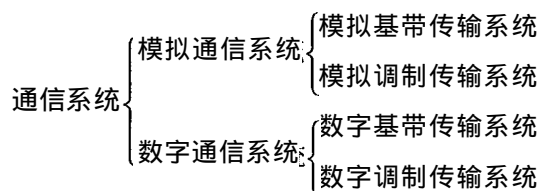
通信系统有待传输的消息形式是多种多样的，它可以是符号、文字、语音或图象等等。为了实现消息的传输和交换，首先要把消息转换为相应的电信号（以下简称信号）。通常，这些信号是以它的某个参量的变化来表示消息的。按照信号参量的取值方式不同可将信号分为两类，即模拟信号与数字信号。模拟信号的某个参量与消息相对应而连续取值，例如电话机话筒输出的语音信号、电视摄象机输出的电视图象信号等都属于模拟信号。数字信号的参量是离散取值的，例如计算机、电传机输出的信号就是数字信号。

这样，根据通信系统所传输的是模拟信号还是数字信号，可以相应地把通信系统分成模拟通信系统与数字通信系统。也就是说，信道中传输模拟信号的系统称为模拟通信系统，信道中传输数字信号的系统称为数字通信系统。当然，以上的分类方法是以信道传输信号

的差异为标准的，而不是根据信源输出的信号来划分的。如果在发送端先把模拟信号变换成数字信号，即进行 A/D 变换，然后就可利用数字方式进行传输，在接收端再进行相反的变换——D/A 变换，以还原出模拟信号。

模拟信号和数字信号通常都要经过调制形成模拟调制信号和数字调制信号，以适应信道的传输特性。在短距离的有线传输场合，也使用基带传输的方式。

综合以上情况，通信系统的分类可表示为



本课程将按以上分类方法对通信系统的组成、基本工作原理及性能进行深入的讨论。

模拟通信系统的模型大体上与图 1-3 差不多，其方框图如图 1-4 所示。对应于图 1-3 中的发送设备，一般来说应包括调制、放大、天线等，但这里只画了一个调制器，目的是为了突出调制的重要性。同样接收设备只画了一个解调器。这样，图 1-4 就是一个最简化的模拟通信系统模型。

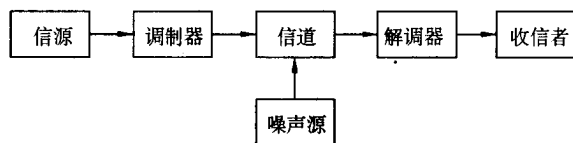


图 1-4 模拟通信系统模型

数字通信系统模型如图 1-5 所示。这里的发送设备包括信源编码、信道编码和调制三个部分。信源编码是对模拟信号进行编码，得到相应的数字信号；而信道编码则是对数字信号进行再次编码，使之具有自动检错或纠错的能力。数字信号对载波进行调制形成数字调制信号。高质量的数字通信系统才有信道编码部分。

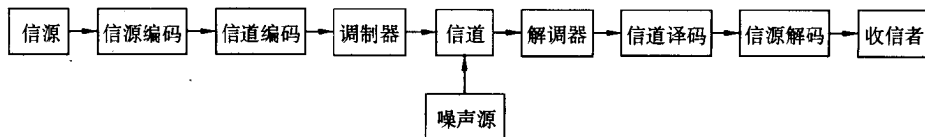


图 1-5 数字通信系统模型

图 1-3 至图 1-5 所表示的均为单向通信系统，但在绝大多数场合，通信的双方互通信息，因而要求双向通信。单向通信称为单工方式，双向通信称为双工方式。

就目前来说，不论是模拟通信还是数字通信，在通信业务中都得到了广泛应用。但是，近 20 年来，数字通信发展十分迅速，在整个通信领域中所占比重日益增长，在大多数通信系统中已替代模拟通信，成为当代通信系统的主流。这是因为与模拟通信相比，数字通信更能适应对通信技术越来越高的要求。数字通信的主要优点如下：

(1) 抗干扰能力强。在远距离传输中，各中继站可以对数字信号波形进行整形再生而消除噪声的积累。此外，还可以采用各种差错控制编码方法进一步改善传输质量。

(2) 便于加密，有利于实现保密通信。

(3) 易于实现集成化，使通信设备的体积小、功耗低。

(4) 数字信号便于处理、存储、交换，便于和计算机联接，也便于用计算机进行管理。

当然，数字通信的许多优点都是用比模拟通信占据更宽的频带而换得的。以电话为例，一路模拟电话通常只占据 4 kHz 带宽，但一路数字电话却要占据 20 kHz~60 kHz 的带宽。随着社会生产力的发展，有待传输的数据量急剧增加，传输可靠性和保密性要求越来越高，所以实际工程中宁可牺牲系统频带而要采用数字通信。至于在频带富裕的场合，比如毫米波通信、光通信等，当然都唯一地选择数字通信。

1.3 通信发展简史

电通信的历史并不长，至今不过只有 160 年的时间。一般把 1838 年有线电报的发明作为开始使用电通信的标志，但那时的通信距离只有 70 km。1876 年发明的有线电话被称为是现代电通信的开端。1878 年世界上的第一个人工交换局只有 21 个用户。无线电报于 1896 年实现，它开创了无线电通信发展的道路。1906 年电子管的发明迅速提高了无线通信及有线通信的水平。

伴随着通信技术的发展，通信科学在 20 世纪 30 年代起获得了突破性的进展，先后形成了脉冲编码原理、信息论、通信统计理论等重要理论体系。而 50 年代以来，由于晶体管和集成电路的问世，不仅模拟通信获得了高速发展，而且促成了具有广阔前景的数字通信方式的形成。在通信种类上，相继出现了脉码通信、微波通信、卫星通信、光纤通信、计算机通信等。计算机和通信技术的密切结合，使通信的对象突破了人与人之间的范畴，实现了人与机器或机器与机器之间的通信。

进入 80 年代以来，除了传统的电话网、电报网以外，各种先进的通信网蓬勃发展，例如移动通信网、综合业务数字网、公用数据网、智能网、宽带交换网等。先进的通信网络使通信不断朝着综合化、宽带化、自动化和智能化的方向发展。为人类提供方便快捷的服务，是通信技术追求的目标。

1.4 通信系统的质量指标

为了衡量通信系统的质量优劣，必须使用通信系统的性能指标，即质量指标。这些指标是对整个系统进行综合评估而规定的。通信系统的性能指标是一个十分复杂的问题，涉及到通信的有效性、可靠性、适应性、标准性、经济性及维护使用等等。但是，从研究信息的传输来说，通信的有效性和可靠性是最重要的指标。有效性指的是传输一定的信息量所消耗的信道资源数（带宽或时间），而可靠性指的是接收信息的准确程度。这两项指标体现了对通信系统最基本的要求。

有效性和可靠性这两个要求通常是矛盾的，因此只能根据需要及技术发展水平尽可能

取得适当的统一。例如在一定可靠性指标下，尽量提高消息的传输速度；或者在一定有效性条件下，使消息的传输质量尽可能高。

模拟通信和数字通信对这两个指标要求的具体内容有很大差别，必须分别加以说明。

1.4.1 模拟通信系统的质量指标

1. 有效性

模拟通信系统的有效性用有效传输带宽来度量。同样的消息采用不同的调制方式，则需要不同的频带宽度。频带宽度越窄，则有效性越好。如传输一路模拟电话，单边带信号只需要 4 kHz 带宽，而常规调幅或双边带信号则需要 8 kHz 带宽，因此在一定频带内用单边带信号传输的路数比常规调幅信号多一倍，也就是可以传输更多的消息，显然，单边带系统的有效性比常规调幅系统要好。

2. 可靠性

模拟通信系统的可靠性用接收端最终的输出信噪比来度量。信噪比越大，通信质量越高。如普通电话要求信噪比在 20 dB 以上，电视图象则要求信噪比在 40 dB 以上。信噪比是由信号功率和传输中引入的噪声功率决定的。不同调制方式在同样信道条件下所得到的输出信噪比是不同的。例如调频信号的抗干扰性能比调幅信号好，但调频信号所需的传输带宽却宽于调幅信号。

1.4.2 数字通信系统的质量指标

数字通信系统的有效性用传输速率来衡量，可靠性用差错率来衡量。

1. 传输速率

数字信号由码元组成，码元携带有一定的信息量。定义单位时间传输的码元数为码元速率 R_s ，单位为码元/s，又称波特(baud)，简记为 Bd，所以码元速率也称波特率。定义单位时间传输的信息量为信息速率 R_b ，单位为 bit/s (比特/秒)所以信息速率又称比特率。一个二进制码元的信息量为 1 bit，一个 M 进制码元的信息量为 $\log_2 M$ bit，所以码元速率 R_s 和信息速率 R_b 之间的关系为

$$R_b = R_s \log_2 M \quad (\text{bit/s}) \quad (1-1)$$

$$R_s = \frac{R_b}{\log_2 M} \quad (\text{baud}) \quad (1-2)$$

如每秒钟传送 2 400 个码元，则码元速率为 2 400 baud；当采用二进制时，信息速率为 2 400 bit/s；若采用四进制时，信息速率为 4 800 bit/s。

二进制的码元速率和信息速率在数量上相等，有时简称它们为数码率。

数字信号的传输带宽 B 取决于码元速率 R_s ，而码元速率和信息速率 R_b 有着确定的关系。为了比较不同系统的传输效率，定义频带利用率为

$$\eta_b = \frac{R_b}{B} \quad (1-3)$$

其物理意义为单位频带能传输的信息速率，单位为 $\text{bit}/(\text{s} \cdot \text{Hz})$ 。

2. 差错率

定义误比特率 P_b 为

$$P_b = \frac{\text{错误比特数}}{\text{传输总比特数}} \quad (1-4)$$

定义误码元率 P_s 为

$$P_s = \frac{\text{错误码元数}}{\text{传输的总码元数}} \quad (1-5)$$

有时将误比特率称为误信率，误码元率称为误符号率，也称为误码率。

在二进制码中，有

$$P_b = P_s$$

这时误信率和误码率相同。

差错率越小，通信的可靠性越高。对 P_b 的要求与所传输的信号有关，如传输数字电话信号时，要求 P_b 在 $10^{-3} \sim 10^{-6}$ ，而传输计算机数据则要求 $P_b < 10^{-9}$ 。当信道不能满足要求时，必须加纠错措施。

1.5 本书的结构和使用方法

以现代通信系统为背景，系统地介绍通信理论的基础，是本书的宗旨。具体地说，建

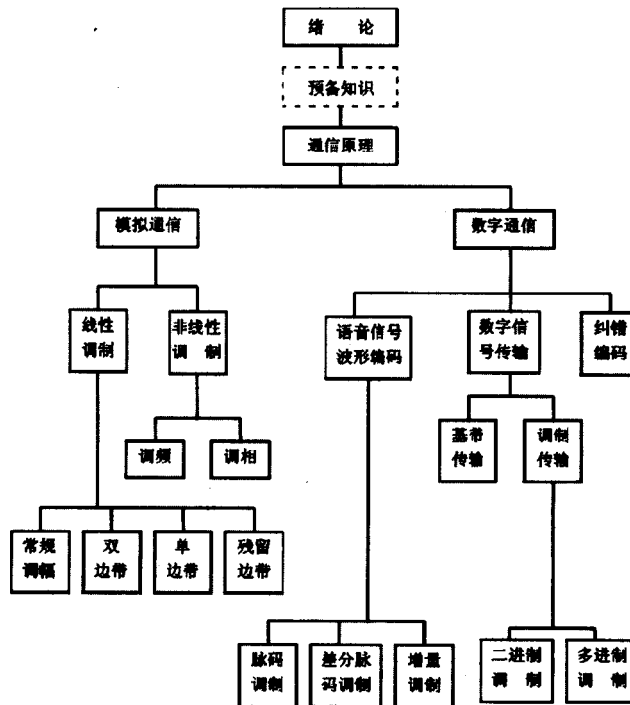


图 1-6 本书各部分内容之间的关系

立通信系统的一般模型，讨论信息传输的基本原理和分析方法是本书的范围。全书的内容可分为模拟通信和数字通信两大部分，其中以数字通信为主。各部分内容之间的关系如图 1-6 所示，其中虚线框内的预备知识是本课程所涉及的基础知识，读者可根据先修课程的情况选择使用。本书的核心内容如图 1-7 所示。

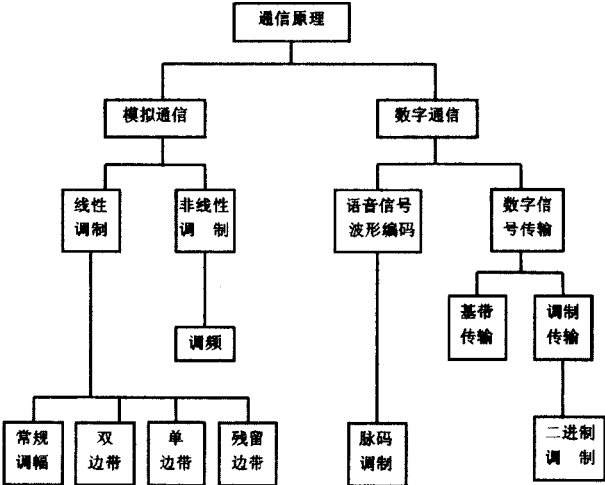


图 1-7 本书的核心内容

第 2 章 预备知识

通信系统传输的是和原始消息相对应的电信号，因此通信系统的根本问题是研究信号在系统中的传输和变换。

实际的信号通常是随机的，加之通信系统中普遍存在的噪声都是随机的，所以对随机信号的分析是非常重要的。随机信号的分析方法与确定信号的分析方法有很多共同之处，甚至有些时候随机信号也可以当作确定信号来分析，因此确定信号的分析方法是信号分析的基础。

本章将在先修课程的基础上，根据本课程的需要，首先对确定信号的分析作必要的复习巩固，然后对随机信号和噪声的特征表达，以及它们通过线性系统的分析方法进行基本的介绍。在本章的最后，还要简单介绍通信系统所传输的信息及其对信息的度量。

2.1 信号和系统的分类

2.1.1 信号的分类

由语音、图象、数码等形成的电信号，其形式可以是多种多样的，但根据其本身的特点，可作以下分类。

(1) 数字信号与模拟信号

根据电信号参量取值的不同，电信号可分为数字信号和模拟信号，或称为离散信号和连续信号。例如计算机、电传打字机输出的脉冲信号是数字信号，普通电话机输出的电话信号是模拟信号。

(2) 周期信号与非周期信号

周期信号是每隔固定的时间又重现本身的信号，固定的时间称为周期。非周期信号则是无此固定时间长度的信号。通信系统中常用于测试的正（余）弦信号、雷达中的矩形脉冲系列都是周期信号，而语音信号、开关启闭所造成的瞬态则是非周期信号。

(3) 确定信号与随机信号

可以用明确的数学表达式表示的信号称为确定信号。但有些信号在发生之前无法预知信号的取值，即写不出确定的数学表示式，通常只知道它取某一数值的概率，这种信号称为随机信号。

(4) 能量信号与功率信号

能量有限的信号称为能量信号，通常它是一个脉冲式的信号，只存在于有限的时间间隔内。在 $(-T/2, T/2)$ 时间内信号在 1Ω 电阻上消耗的能量是有限的，即

$$E = \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (2-1)$$

而信号的平均功率为

$$S = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \quad (2-2)$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时若 S 是大于零的有限值，则 $f(t)$ 为功率信号。

前面提到的周期信号，虽然能量随着时间的增加可以趋于无限，但功率是有限值，因此周期信号是功率信号。非周期信号可以是功率信号，也可以是能量信号。

2.1.2 系统的分类

在通信过程中，信号的变换和传输是由系统完成的。系统指的是包括有若干元件或若干部件的设备。系统有大有小，大到由很多部件组成的完整系统，小到由具体几个电路组成的部件。信号在系统中的变换和传输可用图 2-1 表示，图中假设输入信号为 $x(t)$ ，通过系统后得到的输出为 $y(t)$ 。从数学的观点来看， $y(t)$ 和 $x(t)$ 之间存在着如下的函数关系：

$$y(t) = f[x(t)] \quad (2-3)$$

从此函数关系式的特点出发，可对系统进行以下的分类。

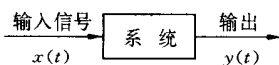


图 2-1 系统示意图

(1) 线性系统和非线性系统

如果叠加原理适用于一个系统，那么该系统就是线性系统，否则便是非线性系统。设图 2-1 所示的系统为线性系统，还设 $x_1(t)$ 的响应为 $y_1(t)$ ， $x_2(t)$ 的响应为 $y_2(t)$ ，那么当输入为 $[x_1(t) + x_2(t)]$ 时，系统的响应为 $[y_1(t) + y_2(t)]$ 。对于线性系统而言，一个激励的存在并不影响另一个激励的响应。

(2) 时不变和时变系统

当系统内的参数不随时间变化时，该系统称为时不变系统。只要系统内的一个参数随时间变化，就称此系统为时变系统。时不变系统也称恒参系统，时变系统也称变参（随参）系统。

2.2 确定信号的分析

2.2.1 周期信号

一个周期为 T 的周期信号 $f(t)$ ，可以展开为如下的傅里叶级数：

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (2-4)$$

式中

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\
 a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt
 \end{aligned} \tag{2-5}$$

由于三角函数可以展开为

$$c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = c_n \cos\varphi_n \cos n\omega_0 t - c_n \sin\varphi_n \sin n\omega_0 t$$

令

$$c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

式中

$$\begin{aligned}
 a_n &= c_n \cos\varphi_n, \quad b_n = -c_n \sin\varphi_n \\
 c_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = -\tan(b_n / a_n)
 \end{aligned}$$

这样，式(2-4)所示的三角级数可以归并为

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \tag{2-6}$$

周期信号还可用指数形式的傅里叶级数表示，指数形式比三角级数的形式更简化更便于计算。根据欧拉公式

$$\begin{aligned}
 \cos n\omega_0 t &= \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) \\
 \sin n\omega_0 t &= \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})
 \end{aligned} \tag{2-7}$$

可将周期信号表示为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \tag{2-8}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \tag{2-9}$$

三角傅里叶级数和指数傅里叶级数不是两种不同类型的级数，它们是同一级数的两种不同的表示方法。指数函数是傅里叶变换的基础，是频域分析中的运算工具，在本课程中是最常用的表示式。

2.2.2 信号的傅里叶变换

一个非周期信号 $f(t)$ 可以看成是一个周期信号 $f_T(t)$ ，只不过周期 $T \rightarrow \infty$ ，即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = f(t)$$

如果在表示 $f_T(t)$ 的傅里叶级数中也令 $T \rightarrow \infty$ ，则在整个时间内表示 $f_T(t)$ 的傅里叶级数也能在整个时间内表示 $f(t)$ 。

$f_T(t)$ 的指数傅里叶级数可写为

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (2-10)$$

式中

$$\omega_0 = 2\pi/T$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2-11)$$

当 T 增加时, 基频 ω_0 变小, 频谱线变密, 且各分量的幅度也减小, 但频谱的形状是不变的。在 $T \rightarrow \infty$ 的极限情况下, 每个频率分量的幅度变为无穷小, 而频率分量有无穷多个, 离散频谱变成了连续频谱。这时, $f(t)$ 已不是 $n\omega_0$ 的离散函数, 而是 ω 的连续函数。以上过程可用计算式说明。由于相邻频率分量间隔为

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0$$

周期 T 可写为

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

将以上关系式代入式(2-11), 得

$$F_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2-12)$$

将上式代入式(2-10), 得

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \cdot \Delta\omega \right] e^{jn\omega_0 t} \quad (2-13)$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时, $\Delta\omega = d\omega$, $n\omega_0$ 用 ω 表示, 求和符号 \sum 用积分符号 \int 表示, $F_n(n\omega_0)$ 写成 $F(\omega)$, $f_T(t)$ 变成 $f(t)$, 因此有

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (2-14)$$

这就是傅里叶积分的一种形式, 可将其分解为两个式子, 即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2-15)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2-16)$$

这样, 在整个时间内 ($-\infty < t < \infty$) 就能用指数函数来表示非周期信号 $f(t)$ 。

式(2-16)称为 $f(t)$ 的傅里叶正变换, 它把一个时间域内 t 的函数变换为频率域内 ω 的函数。式(2-15)称为 $F(\omega)$ 的傅里叶逆变换或反变换, 它把一个 ω 的函数变换为 t 的函数。傅里叶变换用符号简记为

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \quad (2-17)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] \quad (2-18)$$

用双箭头表示两式的关系：

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

由 $f(t)$ 向右变成 $F(\omega)$ 为正变换, 由 $F(\omega)$ 向左变成 $f(t)$ 为反变换。傅里叶变换简称傅氏变换。

为使用方便, 将一些常用信号的傅里叶变换对列于表 2-1 中。傅里叶变换有一些重要的运算特性。这些特性反映了信号的时域特性与频域特性之间的内在联系, 借助这些联系可明显简化运算, 在分析信号的特性时特别有用。傅里叶变换的主要运算特性列于表 2-2。

表 2-1 常用信号的傅里叶变换表

序号	$f(t)$	$F(\omega)$
1	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + j\omega}$
2	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$
3	$ t $	$\frac{-2}{\omega^2}$
4	$\delta(t)$	1
5	1	$2\pi\delta(\omega)$
6	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
7	$(\cos\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
8	$(\sin\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
9	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
10	$\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
11	$\frac{w}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{wt}{2}\right)$	$D_w(\omega)$
12	$D_\tau(t)$	$\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
13	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
14	$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2\omega^2/2}, \sigma > 0$
15	$\delta_{T_0}(t)$	$\frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0), \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

表 2-2 傅里叶变换的运算特性

序号	运算名称	时间函数	频谱函数
1	放大	$K_0 f(t)$	$K_0 F(\omega)$
2	比例	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
3	时移	$f(t-t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
4	频移	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega-\omega_0)$
5	时间微分	$\frac{df}{dt}$	$(j\omega)F(\omega)$
6	n 次时间微分	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
7	时间积分	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$
8	频率微分	$(-jt)f(t)$	$\frac{dF}{d\omega}$
9	n 次频率微分	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n F}{d\omega^n}$
10	叠加	$Af_1(t) + Bf_2(t)$	$AF_1(\omega) + BF_2(\omega)$
11	时间卷积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$
12	频率卷积	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)]$

2.2.3 信号的能量谱与功率谱

前面讨论了周期信号和非周期信号的时域和频域的关系。时间信号的另一个重要特征是能量和功率随频率分布的关系，即能量谱密度和功率谱密度。本节对确定信号进行分析，其分析方法对随机信号和噪声也同样适用。

为了表示信号的能量在频率域中分布的情况，要借助于密度的概念。

信号 $f(t)$ 电压或电流在 1Ω 电阻上所消耗的能量定义为信号的归一化能量，简称能量表示为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (2-19)$$

只有在上式给出的积分值为有限时信号能量的概念才有意义。当信号能量趋于无穷大时，其平均功率是存在的，即

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \quad (2-20)$$

式中， P 为平均功率，简称功率； T 为取时间平均的区间。上式可理解为信号 $f(t)$ （电压

或电流) 在 1Ω 电阻上所消耗的平均功率。

不难证明, 若 $f(t)$ 为能量信号且其傅里叶变换为 $F(\omega)$, 则有如下关系:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (2-21)$$

若 $f(t)$ 为周期性功率信号, 则有

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \quad (2-22)$$

式中, T 为信号 $f(t)$ 的周期; F_n 为 $f(t)$ 的傅里叶级数系数。式 2-21 说明时域内能量信号的总能量等于频域内各个频率分量能量的连续和。式 (2-22) 说明周期信号的总的平均功率等于各个频率分量功率的总和。以上的关系称为帕什瓦尔定理。

设能量以 E 表示, 功率以 P 表示, 如果在频域内有

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} E(f) df \quad (2-23)$$

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) df \quad (2-24)$$

则称 $E(\omega)$ 为能量谱密度函数, 而称 $P(\omega)$ 为功率谱密度函数。能量谱密度的单位为 J/Hz (焦耳/赫兹), 功率谱密度的单位为 W/Hz (瓦特/赫兹)。式中 $\omega = 2\pi f$ 。能量谱密度和功率谱密度简称能量谱和功率谱。

对于能量信号 $f(t)$ 其能量谱密度 $E(\omega)$ 当然一定存在。将式 2-23) 与帕什瓦尔定理的式(2-21)对照, 可得

$$E(\omega) = |F(\omega)|^2 \quad (2-25)$$

由于 $|F(\omega)|^2 = |F(-\omega)|^2$ 故能量谱是 ω 的一个实偶函数。此时信号能量 E 可简化为

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} E(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} E(f) df \quad (2-26)$$

对于功率信号, 由于它的能量无穷大, 所以只能用功率参数来描述。由式 (2-20) 可知, 信号 $f(t)$ 的平均功率就是 $f(t)$ 的均方值。以 $f^2(t)$ 表示 $f(t)$ 的均方值, 则

$$P = \overline{f^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \quad (2-27)$$

图 2-2(a) 为非周期的功率信号 $f(t)$, 对 $f(t)$ 只保留 $|t| \leq T/2$ 的部分, 被保留的部分称为截短函数 $f_T(t)$, 如图 2-2(b) 所示。因为 T 为有限值, 所以 $f_T(t)$ 只具有有限的能量。假定 $f_T(t)$ 的傅里叶变换为 $F_T(\omega)$, 那么 $f_T(t)$ 的能量 E_T 为

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} |f_T(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(\omega)|^2 d\omega \quad (2-28)$$

上式同时可表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_T(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$$

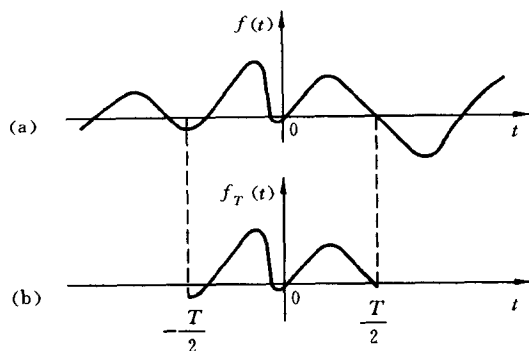


图 2-2 功率信号及其截短信号

所以 $f(t)$ 的平均功率为

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} d\omega \quad (2-29)$$

因为 $f(t)$ 是功率信号，所以上式中的极限存在。当 $T \rightarrow \infty$ 时， $|F_T(\omega)|^2 / T$ 趋于一极限值，定义此极限值为功率谱密度

$$P(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} \quad (2-30)$$

这样，功率 P 可表示为

$$\begin{aligned} P &= \overline{f^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) df \end{aligned} \quad (2-31)$$

功率谱只与功率信号频谱的模值有关，而与其相位无关。凡具有相同幅度频谱特性的信号，不管其相位频谱特性如何，都具有相同的功率谱。

对于实信号，有

$$|F_T(\omega)|^2 = |F_T(-\omega)|^2$$

所以功率谱密度是 ω 的偶函数，即

$$P(\omega) = P(-\omega) \quad (2-32)$$

这时 P 可简化为

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} P(f) df \quad (2-33)$$

2.2.4 波形的互相关和自相关

相关类似于卷积，它也是在时域中描述信号特征的一种重要方法。通常用相关函数衡量波形之间关联或相似程度。

设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 为两个能量信号，则它们之间的互相关程度用互相关函数 $R_{12}(t)$ 表示，定义

$$R_{12}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t + \tau) d\tau \quad (2-34)$$

式中 t 为独立变量，表示时移； τ 为虚设变量。

若 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 为两个功率信号，则它们的互相关函数为

$$R_{12}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(\tau) f_2(t + \tau) d\tau \quad (2-35)$$

式中 T 为取时间平均的区间。

若 $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$ 是周期为 T 的周期信号，则式(2-35)可改写为

$$R_{12}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(\tau) f_2(t + \tau) d\tau \quad (2-36)$$

如果两个信号的形式完全相同，即 $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ ，此时互相关函数就变成自相关函数，记作 $R(t)$ 。对于能量信号

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t + \tau) d\tau \quad (2-37)$$

对于功率信号

$$R(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) f(t + \tau) d\tau \quad (2-38)$$

互相关函数具有如下重要特性：

(1) 若对所有的 t ， $R_{12}(t) = 0$ ，则两个信号为互不相关。

(2) 当 $t \neq 0$ 时，互相关函数表达式中 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的前后次序不同，结果不同，即

$$R_{12}(t) \neq R_{21}(t)$$

而有

$$R_{12}(t) = R_{21}(-t) \quad (2-39)$$

(3) 当 $t = 0$ 时， $R_{12}(0)$ 表示 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 在时无时差时的相关性。对于能量信号

$$R_{12}(0) = R_{21}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(\tau) d\tau \quad (2-40)$$

而对于功率信号

$$R_{12}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(\tau) f_2(\tau) d\tau \quad (2-41)$$

$R_{12}(0)$ 越大，说明 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 之间越相似。在实际使用中，常用归一化相关系数 ρ_{12} 来衡量两个函数相似的程度。对于能量信号， ρ_{12} 的定义为

$$\rho_{12} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(\tau) d\tau}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\tau)|^2 d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(\tau)|^2 d\tau \right]^{1/2}} \quad (2-42)$$

对于功率信号， ρ_{12} 的定义为

$$\rho_{12} = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(\tau) f_2(\tau) d\tau}{\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f_1(\tau)|^2 d\tau \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f_2(\tau)|^2 d\tau \right]^{1/2}} \quad (2-43)$$

根据许瓦尔兹 (Schwarz) 不等式可得

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(\tau) d\tau \right| \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\tau)|^2 d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(\tau)|^2 d\tau \right]^{1/2}$$

或

$$\left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(\tau) f_2(\tau) d\tau \right| \leq \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f_1(\tau)|^2 d\tau \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f_2(\tau)|^2 d\tau \right]^{1/2}$$

所以有

$$\rho_{12} \leq 1 \quad (2-44)$$

若 $\rho_{12}=0$,表明 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 完全不相似。若 $\rho_{12}=1$,表明 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 完全相似。若 $\rho_{12}=-1$ 表明 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 完全相反的相似。这样，利用 $|\rho_{12}|$ 值可以衡量两个信号的相似性或线性相关的程度。

类似地，自相关函数具有如下重要特性：

(1) 自相关函数是一个偶函数，即

$$R(t) = R(-t) \quad (2-45)$$

(2) 自相关函数在原点的数值 $R(0)$ 为最大，即

$$R(0) \geq |R(t)| \quad (2-46)$$

这表明信号在 $t=0$ 即无时移时相关性最强，当 t 增加时，信号与时移后的本身信号的相关程度减弱。

(3) $R(0)$ 表示能量信号的能量：

$$R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|^2 d\tau = E \quad (2-47)$$

或功率信号的功率：

$$R(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(\tau)|^2 d\tau = P \quad (2-48)$$

相关函数的物理概念，虽然建立在信号的时间波形之间，但相关函数与能量谱密度或功率谱密度之间却有着确定的关系。

设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是能量信号，且有

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$$

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

利用式 2-34) 可得互相关函数为