

第一章 基础知识——信号、噪声和调制

第一节 确知信号的时域和频域描述及分析

一、信号的分类

信号是信息的载体，它表现了物理量的变化。信号的数学模型是时间函数，例如 $f(t)$, $v(t)$, $i(t)$ 以及 $f(k)$, $x(k)$ 等。我们常常把信号与函数通用。数据通信中传输的对象是电信号，非电信号通过一定形式的转换便可成为电信号。

信号从不同的角度可以简单划分为确知信号和随机信号；周期信号和非周期信号；连续信号和离散信号。

1. 确知信号和随机信号

确知信号可以用确定的时间函数来描述。给定一个特定时刻，就有它相应确定的函数值。例如，有一衰减的指数函数，其表示式为 $f(t) = Ke^{-\alpha t}$, $t \geq 0$ 。现特定 $t=1$ 时，它的相应函数值应为 $f(1) = Ke^{-\alpha} = 0.135K$ 这意味着若在 $t=0$ 时刻研究信号，可以确知经过 1 个单位时刻信号就衰减至 $f(0) (=K)$ 值的 13.5%。

随机信号不能给出确定的时间函数，对于特定时刻不能给出确切的函数值，只能用概率统计的方法来描述。通信系统中传输的信号，一般情况下都是随机信号。因为含有信息的信号通常都具有不可预知的不确定性。如果通信系统传输的都是确定性信号，人们就得不到任何新的信息。

但随机信号有时也可以当作确知信号加以分析，例如数据信号中常用的二进制代码，虽然二进制代码本身是随机的，但其中单个的 1 码或 0 码，都可以把它看作确知信号。因此研究确知信号有着重要的意义。

2. 周期信号和非周期信号

周期信号可以定义为

$$f(t) = f(t \pm nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

即信号 $f(t)$ 按一定的时间间隔 T 周而复始、无始无终的变化。式中 T 称为周期信号 $f(t)$ 的周期。显然这种信号实际上是不存在的，所以周期信号只能是在一定时间内按照某一规律重复变化的信号。

非周期信号不具有周而复始的特性，假如周期信号的周期 T 值趋向无限大时，它就变成非周期信号了。非周期信号从存在的时域来观察，又可分为时限信号和非时限信号，例如指数函数 $f(t) = e^{-\alpha t}$, $|t| \geq 0$ 是一个非时限信号。显然非时限信号存在于一个无界的时域内，而时限信号则存在于一个有界的时域内，例如有一方脉冲信号，其表示式为

$$f(t) = \begin{cases} 2 & |t| \leq 3 \\ 0 & |t| > 3 \end{cases}$$

其函数只在一定范围内有定义。

3. 连续信号和离散信号

连续时间信号是对于每个实数 t (有限个间断点除外) 都有定义的函数。连续时间信号的幅值可以是连续的, 也可以是离散的 (信号含有不连续的间断点属于此类), 如图 1-1 中 (a) 所示为幅值连续的连续时间信号, (b) 所示为幅值离散的连续时间信号。

对于时间和幅值都为连续的信号又称为模拟信号。

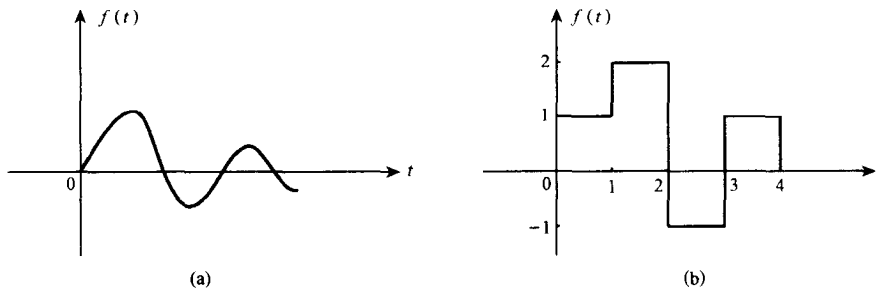


图 1-1 连续时间信号

离散时间信号是指对每个整数 n 有定义的函数, 如果 n 表示离散时间, 则称函数 $f(n)$ 为离散时间信号或称离散序列。如果离散时间信号的幅值是连续的模拟量, 则称该信号为抽样信号。因为抽样信号的幅值仍然为连续信号的相应时刻的幅度, 它可能有无穷多个值, 难以编成数字码, 所以对抽样信号的幅值应按四舍五入的原则进行分等级量化, 从而得到数字信号, 图 1-2 给出了抽样信号和数字信号。

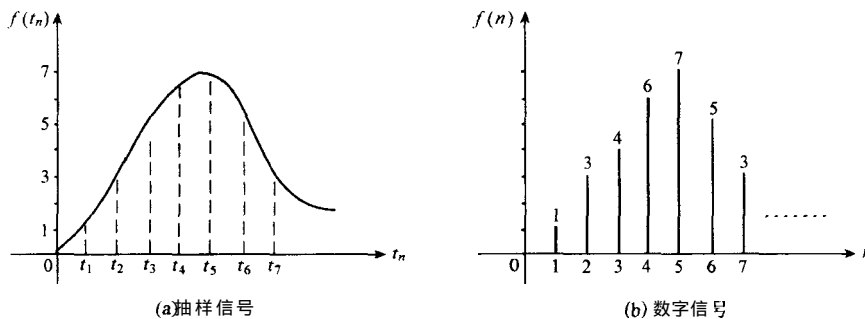


图 1-2 离散时间信号

图 1-2(a) 中 $f(t_n)$ 是抽样序列 观察在抽样点 $t_n=0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7$ 的函数值, $f(t_n) = 0, 0.9, 2.8, 4.2, 6.3, 6.9, 5.2, 9$ 。对 $f(t_n)$ 按 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 共 8 个等级进行量化, 得到数字信号 $f(n)$ 如图 1-2(b) 所示。图中 $f(n) = \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 5, 3, \dots\}$ 这时可以采用三位二进制数码表示有限个量值。

二、信号的特性

信号的特性表现为它的时间特性和频率特性。

信号的时间特性主要指信号随时间变化的特性, 即信号同一形状的波形重复出现周期的长短, 在一个周期内信号变化的速率以及相应的振幅。信号随时间变化的这些表现包含了信号的全部信息量。

信号的频率特性可用信号的频谱函数来表示。所谓频谱函数, 即可看成是表征信号的各项

率成分，以及各频率成分的振幅和相位。在频谱函数中，包含了信号的全部信息量。

信号的频率特性和时间特性都包含了信号带有的信息量，也能表示出信号的特点，所以信号的频率特性和时间特性之间，必然有密切的联系。

三、确知信号的时域特性与频域特性

对于确知信号和随机信号都可用它们的时域特性和频域特性表示。时域特性表示信号电压或电流随时间的变化关系。所谓频域特性即任意信号总可以表示为许多不同频率正弦分量的线性组合。这些正弦分量的参数（振幅、频率、初相）的规律，我们称之为该信号的频谱。例如设有一个信号为

$$f(t) = \sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t \quad (1-1)$$

式中 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ ，信号 $f(t)$ 波形和频谱如图 1-3 所示。

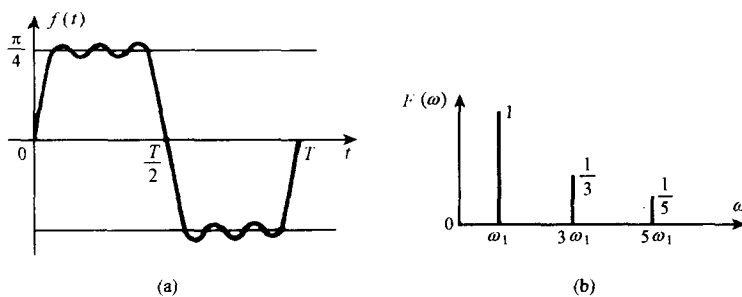


图 1-3 信号波形及其频谱图

其中每一条谱线代表一个正弦分量，谱线的高度代表这一正弦分量的振幅，谱线的位置代表这一正弦分量的角频率。

根据傅立叶变换的原理，任何一个周期信号，若满足狄里赫利条件，都可表示为傅立叶级数 即如果 $f(t) = f(t + mT)$ 则有

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad (1-2)$$

这里 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 称基波角频率，所以对周期信号而言，其频谱由离散的频率成分组成，其中的系数可由下式求得

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt \quad (1-3)$$

$$a_n = A_n \cos \varphi_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (1-4)$$

$$b_n = A_n \sin \varphi_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (1-5)$$

并且可知若 $f(t)$ 为奇函数 则 $a_n = 0$ 若 $f(t)$ 为偶函数 则 $b_n = 0$ 。

例如 $f(t)$ 如图 1-4 所示 求其频谱。

由于 $f(t)$ 是偶函数 故有 $b_n = 0$ 且求得 $A_0 = 0$ 有

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{4\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{4}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

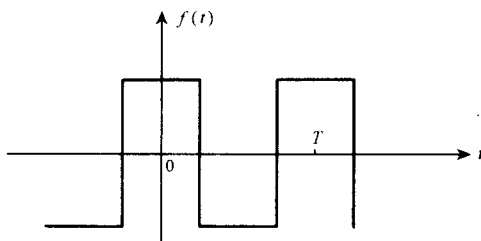


图 1-4 $f(t)$ 波形图

故有 $a_1 = \frac{4}{\pi}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{4}{3\pi}, a_4 = 0 \dots$

则 $f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \dots \right)$

可作出 $f(t)$ 的幅频、相频特性 (略), 所以周期信号得到的是离散频谱。为了计算方便, 常将傅立叶级数

表示成指数形式, 由于 $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$ 所以

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{e^{j(n\omega t - \varphi_n)} + e^{-j(n\omega t - \varphi_n)}}{2} \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} e^{-j\varphi_n} e^{jn\omega t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{A_{-n}}{2} e^{j\varphi_{-n}} e^{jn\omega t} \end{aligned} \quad (1-6)$$

上式中

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = A_{-n} \quad (1-7)$$

$$\varphi_{-n} = \arctan \frac{b_n}{a_n} = -\varphi_n \quad (1-8)$$

将式 (1-7) 式 (1-8) 代入式 (1-6) 中有

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} e^{-j\varphi_n} e^{jn\omega t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{A_n}{2} e^{-j\varphi_n} e^{jn\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{2} e^{-j\varphi_n} e^{jn\omega t}$$

这里定义 $\dot{A}_n = A_n e^{-j\varphi_n}$ 叫复振幅, 且由上列关系可得出

$$\dot{A}_n = A_n \cos \varphi_n - j A_n \sin \varphi_n = a_n - j b_n \quad (1-9)$$

这样函数 $f(t)$ 可表示

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\omega t} \quad (1-10)$$

其系数 \dot{A}_n 可用下式表示

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (1-11)$$

例 1-1 设函数 $f(t)$ 波形如图 1-5 所示, 求该信号的频谱。

$$\begin{aligned} \dot{A}_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-jn\omega t} dt = \frac{2}{T} \frac{e^{-jn\omega \frac{\tau}{2}} - e^{jn\omega \frac{\tau}{2}}}{-jn\omega} \\ &= \frac{4}{T} \frac{\sin \frac{n\omega\tau}{2}}{n\omega} = \frac{2\tau}{T} \frac{\sin \frac{n\omega\tau}{2}}{\frac{n\omega\tau}{2}} = \frac{2\tau}{T} \text{Sa} \left(\frac{n\omega\tau}{2} \right) \end{aligned}$$

式中 $\text{Sa} x$ 称为抽样函数 作出该函数的频谱如图 1-6 所示。

由上例可知, 周期脉冲序列得到离散的频谱, 其谱线的间隔为基波角频率 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 且谱线的间隔随 T 的减少而增大, 反之谱线则随 T 的增大而变密。当 $\omega = \frac{2n\pi}{\tau}$ 时, 相应的频率分量幅值为零, 称为零点。由上例可知, 其零点 $\omega = 2\pi / \tau$ 的值随 τ 的减少而增大, 即脉冲越窄, 第一个零点的值越大。

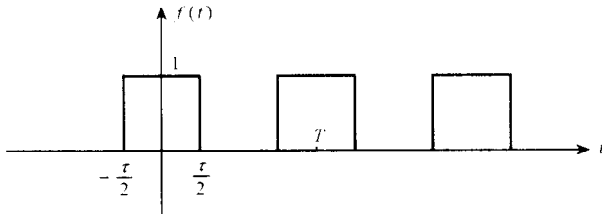


图 1-5 $f(t)$ 波形图

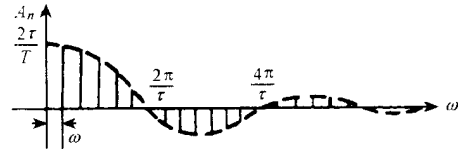


图 1-6 $f(t)$ 的频谱图

对非周期信号 $f(t)$ 来说 我们可看成 $T \rightarrow \infty$ 时的周期函数, 故用同样的办法求得其频谱, 但由于 $T \rightarrow \infty$ 必有 $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$, 离散的谱线变成了无限密集连续频谱, 所以我们说对非周期信号来说, 其频谱将是连续的频谱, 则傅立叶级数就变成了傅立叶积分, 可表示为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-12)$$

其中

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-13)$$

称为信号 $f(t)$ 的频谱密度函数 简称频谱函数 它表示 $f(t)$ 在 ω 处单位频带 赫 内的频谱值。

习惯上把由 $f(t)$ 确定 $F(\omega)$ 的变换称为傅氏正变换(简称傅氏变换)记为

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$$

相反的由 $F(\omega)$ 确定 $f(t)$ 的变换称为傅氏反变换, 并记为

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$$

由于 $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 彼此互为傅氏反变换和傅氏正变换关系, 通常称它们为傅氏变换对, 并表示为

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

频谱函数 $F(\omega)$ 一般是一个复函数 可以记作

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

其中 $|F(\omega)|$ 是 $F(\omega)$ 的模, 它表示信号中各频率分量的相对大小 $\varphi(\omega)$ 是 $F(\omega)$ 的幅角部分, 它表示信号中各频率分量的相位关系。为了直观地表示信号的频谱密度, 通常把 $|F(\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$ 画成曲线。习惯上也把 $|F(\omega)| \sim \omega$ 与 $\varphi(\omega) \sim \omega$ 曲线分别称为振幅频谱图和相位频谱图。一般而言 若信号 $f(t)$ 满足绝对可积条件 即满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (1-14)$$

则它的傅氏变换一定存在。不过有些信号尽管不满足这个条件, 它们的傅氏变换也存在, 因此绝对可积仅仅是傅氏变换存在的充分条件, 而不是必要条件。

例 1-2 试求图 1-7(a) 中所示的矩形脉冲的傅氏变换, 并画出它的频谱图。

解 由图可知, 矩形脉冲 $f(t)$ 可表示为

$$f(t) = \begin{cases} A & -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0 & \text{其他 } t \end{cases} \quad (1-15)$$

利用式 (1-13) 可求得 $f(t)$ 的傅氏变换为

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ae^{-j\omega t} dt = \frac{A}{j\omega} (e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}) \\
 &= A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = A\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{1-16}$$

由于 $F(\omega)$ 在这里是实函数，所以可以用 $F(\omega)$ 曲线同时表示振幅频谱和相位频谱，如图 1-7 (b) 所示。

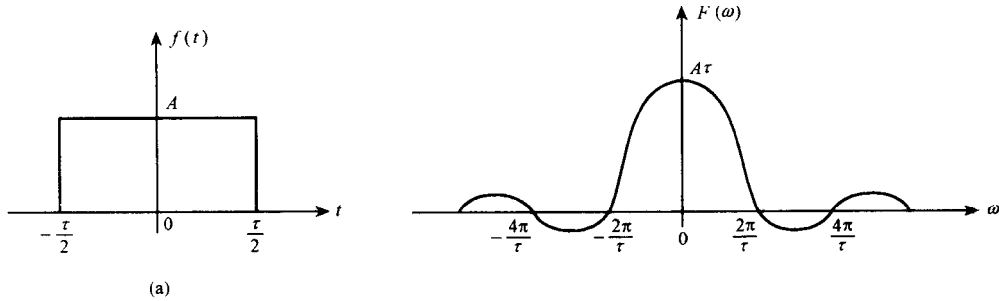


图 1-7 矩形脉冲和它的频谱

由上面所得到的结果可知，矩形信号的频谱按 $\text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ 的规律变化，连续地分布在无限宽的频率范围上。但是由图 1-7(b) 中可见，它的主要能量处于 $f=0\sim\frac{1}{\tau}$ 的范围内。因而通常认为它的频带宽度 B 近似为 $\frac{1}{\tau}$ ，即

$$B \approx \frac{1}{\tau} \tag{1-17}$$

式(1-12)与式(1-13)表明，信号的时域表示式与它的频谱之间有着完全确定的关系。在通信系统中，常常要对信号做一些处理，例如在时域内将信号进行延时，在频域中将信号的频谱进行搬移等。由于上面所提到的时域和频域间的关系，在某个域中的处理必然会导致另一个域中特性的相应变化，在分析这些变化关系方面，傅氏变换的一些基本性质或定理是非常有用的。这些性质及它们的证明在《信号分析》等课程中已作了详细介绍，这里不再赘述。

第二节 系统响应及分析

一、冲激函数

1. 单位冲激信号

在通信系统的分析研究中，冲激函数具有极重要的作用。单位冲激信号就是时域内的单位冲激函数，它的定义为

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0 \\ 0 & \text{其他 } t \end{cases} \tag{1-18}$$

并且有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \tag{1-19}$$

因此,单位冲激信号 $\delta(t-t_0)$ 是这样—个信号:它在 $t=t_0$ 瞬间的值为无限大,在其他瞬间的值均为零,而且它所覆盖的面积(通常称为冲激强度)等于 1。

单位冲激信号具有许多重要性质。例如,当 $\delta(t-t_0)$ 与另一信号 $f(t)$ 相乘时,由于它在除 $t=t_0$ 以外的其他瞬间都等于零。因此有

$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) \quad (1-20)$$

并且有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = f(t_0) \quad (1-21)$$

式(1-20)表明:信号 $f(t)$ 与单位冲激信号 $\delta(t-t_0)$ 的乘积仍然是一个冲激信号,但是其强度等于该信号在单位冲激信号所在瞬间的值。上述性质就是所谓抽样性。

利用抽样性质,很容易求得单位冲激信号的频谱函数为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1 \quad (1-22)$$

即有

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (1-23)$$

上述结果表明:单位冲激信号 $\delta(t)$ 的频谱等于常数 1,如图 1-8(b)中所示,这意味着在整个频率范围内频谱是均匀分布的。同理可得

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} \quad (1-24)$$

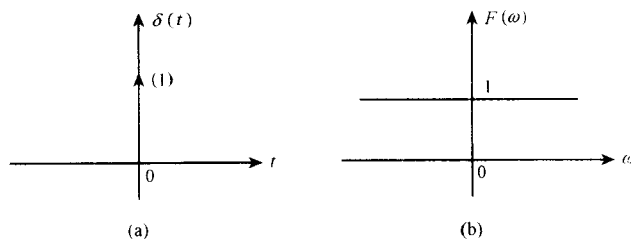


图 1-8 单位冲激信号 $\delta(t)$ 和它的频谱

2. 频域冲激函数

显然,频域单位冲激函数 $\delta(\omega-\omega_0)$ 的定义为

$$\delta(\omega-\omega_0) = \begin{cases} \infty & \omega = \omega_0 \\ 0 & \text{其他 } \omega \end{cases} \quad (1-25)$$

并且有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_0)d\omega = 1 \quad (1-26)$$

利用傅氏变换的对偶性质,由式(1-23)可直接得出

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (1-27)$$

上述关系表明:频域内位于零频率处强度为 2π 的冲激函数对应于时域内的常数 1。换言之,即数值为 1 的直流信号的傅氏变换是频域内位于 $\omega=0$ 处、强度为 2π 的冲激函数,如图 1-9 中所示。

同理,对式(1-24)运用对偶性质,可得

$$e^{j\omega_c t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_c) \quad (1-28)$$

即角频率 ω_c 为的复指数信号 $e^{j\omega_c t}$ 对应于频域内 $\omega=\omega_c$ 处、强度为 2π 的冲激函数

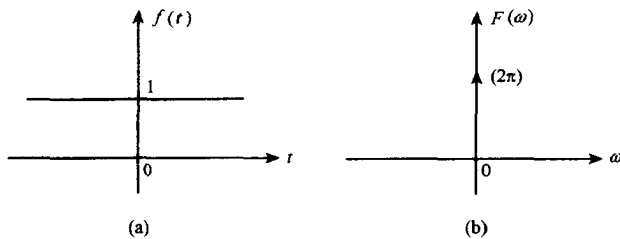


图 1-9 直流信号及其频谱

二、系统响应及分析

一个通信系统的输入信号称为激励，其输出信号称为响应。我们把系统已知激励给定的条件下，求系统响应的过程叫做系统的分析。对于线性网络，我们最关心的是它的输出信号与输入信号之间的关系。分析信号通过线性网络的方法有两种，即时域分析法与频域分析法。

所谓时域分析法，即是已知系统和激励的时间函数，求系统响应的时域表达式的方法。所谓频域分析法，即是：在分析的过程中，将时间变量变换为频率变量去分析。

时域分析法中，线性网络的特性由它的单位冲激响应 $h(t)$ 来描述。所谓单位冲激响应是指网络的输入信号是单位冲激信号 $\delta(t)$ 时的输出，如图 1-10(a) 所示。当网络的输入端作用有信号 $v_i(t)$ 时，网络的输出信号 $v_o(t)$ 等于 $v_i(t)$ 与网络单位冲激响应 $h(t)$ 的卷积，即有

$$v_o(t) = v_i(t) * h(t) \quad (1-29)$$

如图 1-10(b) 中所示。

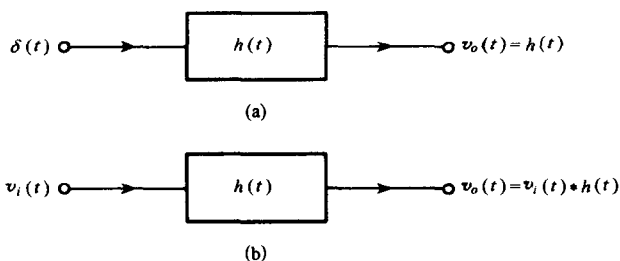


图 1-10 时域分析法示意图

在频域分析法中，线性网络的特性由传输函数 $H(\omega)$ 来描述。所谓传输函数（或叫转移函数）是指网络的输入是复指数信号 $e^{j\omega t}$ 时，输出信号 $v_o(t)$ 与输入信号 $v_i(t)$ 之比。亦即

$$H(\omega) = \left. \frac{v_o(t)}{v_i(t)} \right|_{v_i(t) = e^{j\omega t}} \quad (1-30)$$

如图 1-11(a) 中所示。传输函数与网络的结构和它所包括的元件数值有关，当网络的结构及元件的数值已知时，利用电路分析中大家所熟知的符号法可以确定网络的 $H(\omega)$ 。

当网络的输入端上作用有信号 $v_i(t)$ 并且 $v_i(t) \leftrightarrow V_i(\omega)$ ，网络输出信号 $v_o(t)$ 的频谱 $V_o(\omega)$ 等于输入信号频谱与网络传输函数 $H(\omega)$ 的乘积，即

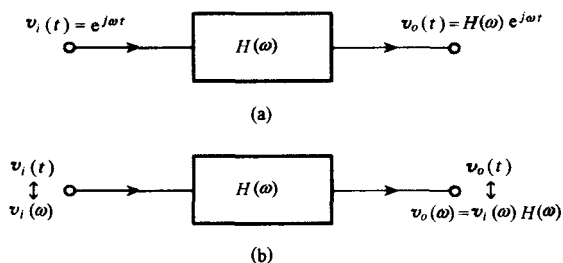


图 1-11 频域分析法示意图

$$V_o(\omega) = V_i(\omega)H(\omega) \quad (1-31)$$

如图 1-11(b) 中所示。

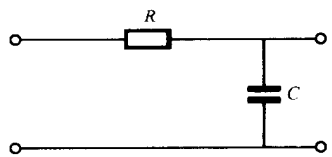
可以证明，线性网络的单位冲激响应 $h(t)$ 与传输函数 $H(\omega)$ 互为傅氏变换对，即

$$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$$

只要知道其中之一，由上式关系可导出另一特性。

例 1-3 试求图 1-12 中所示 RC 电路的电压传输函数 $H(\omega)$ 和单位冲激响应 $h(t)$ 。

解 利用符号法可求得该电路的电压传输函数为



$$H(\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

因为 $h(t) \leftrightarrow H(\omega)$ ，利用查表的方法或解析法求 $F(\omega)$ 的反变换 即可得

图 1-12 RC 低通电路

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t} \cdot u(t)$$

其中 $u(t)$ 为单位阶跃信号（具体推演过程从略）。

例 1-4 已知某线性网络的传输函数 $H(\omega) = Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}$ ，该网络的输入端上作用有图 1-14(a) 所示的矩形脉冲 试求网络的输出 $v_o(t)$ 。

解 方法 1(用时域法求解)

为了书写方便简洁起见，我们用符号 $G_\tau(t)$ 和 $T_\tau(t)$ 分别表示图 1-13(a)、(b) 中所示的幅度为 1 的矩形脉冲和三角形脉冲，其中下标 τ 表示脉冲宽度。则由题意可知，这时的输入信号可以写为

$$v_i(t) = AG_\tau(t)$$

这里 A 为输入脉冲的幅度。

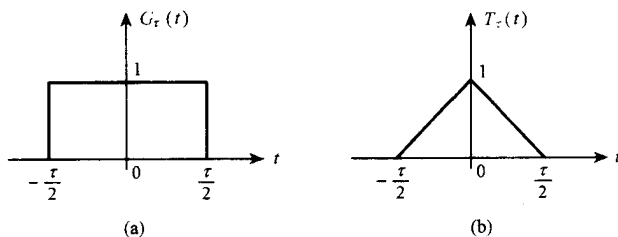


图 1-13 单位幅度的矩形脉冲和三角形脉冲

因为 $h(t) \leftrightarrow H(\omega)$ 该网络的单位冲激响应为

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}\right\} \quad (1-32)$$

由式 (1-16) 可知， $G_\tau(t) \leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ ，也即有： $\frac{1}{\tau}G_\tau(t) \leftrightarrow Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ ，再利用傅氏变换的时移性质，由式 (1-32) 可导出

$$h(t) = \frac{1}{\tau}G_\tau\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

它也是一个矩形脉冲，如图 1-14(b) 中所示。

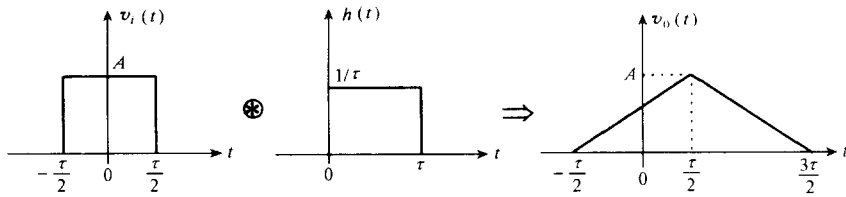


图 1-14 用时域法求网络的输出

根据式 (1-29), 可求得这时的输出为

$$\begin{aligned} v_o(t) &= v_i(t) * h(t) = AG_\tau(t) * \frac{1}{\tau}G_\tau\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \\ &= \frac{A}{\tau} \left[G_\tau(t) * G_\tau\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] = AT_{2\tau}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

它是一个幅度为 A 、宽度为 2τ 的三角形脉冲, 如图 1-14(c) 中所示。

方法 2(用频域法求解)

本题也可以用频域法求解。今已知网络的传输函数为

$$H(\omega) = Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}$$

输入信号 $V_i(t)$ 的频谱为

$$V_i(\omega) = \mathcal{F}\{v_i(t)\} = \mathcal{F}\{AG_\tau(t)\} = A\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

根据式 (1-31) 可求得输出信号的频谱为

$$V_o(\omega) = V_i(\omega)H(\omega) = A\tau Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}$$

于是 输出信号 $v_o(t)$ 为

$$v_o(t) = \mathcal{F}^{-1}\{V_o(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{A\tau Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}\right\} \quad (1-33)$$

因为 $T_\tau(t) \leftrightarrow \frac{\tau}{2} Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 故有

$$T_{2\tau}(t) \leftrightarrow \tau Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

此外, 考虑到傅氏变换的时移性质, 由式 (1-33) 最后可导出

$$v_o(t) = AT_{2\tau}\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

此结果与方法 1 中所得的完全一致。

第三节 随机信号的描述及分析方法

通信网中传输的信号, 例如语声信号、电视信号以及数据信号等, 通常总带有某种随机性, 即它们的某个或几个参数不能预知或不能完全被预知, 这种具有随机性的时间信号统称为随机信号。通信网中还必然存在着噪声, 例如各种电磁波噪声和通信设备本身产生的热噪声、散粒噪声等, 通常它们更是不能预测的, 凡是不能预测的噪声统称为随机噪声, 或简称噪声。无论随机信号还是随机噪声, 由于两者都是随机的, 可用相同的原理来描述, 也就是说, 它们不能用

一个确定的时间函数来描述，而必须根据随机过程理论来描述。

本节全面讨论这类随机信号的分析方法，特别是平稳随机过程的基本理论。掌握随机信号的分析方法对于理解和评价各种通信系统是必不可少的基础条件。

一、随机过程的一般描述

通信网中所遇到的随机信号和噪声可归纳为依赖于时间参数 t 的随机过程，这种过程的基本特征是：其一，在观察区间内是一个时间函数；其二，任一时刻上观察到的值是不确定的，是一个随机变量。其中每个时间函数称为一个实现，而随机过程就可看成是一个由全部可能的实现构成的总体。设有无数台性能相同的接收机，在同样条件下测其输出噪声可得到如图 1-15 所示的噪声波形 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots$ 。

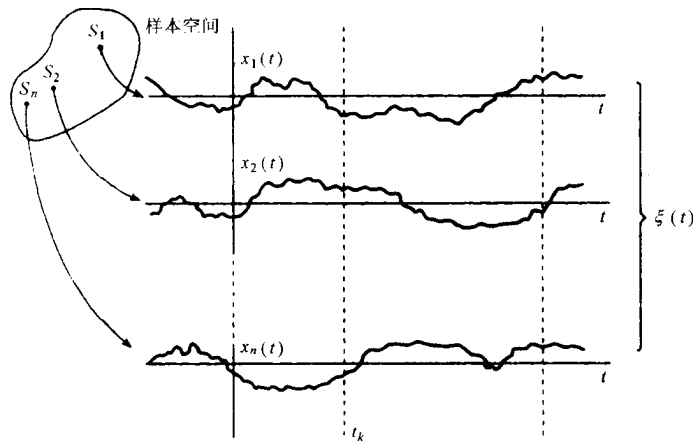


图 1-15 样本函数的总体

其中每条曲线 $x_i(t)$ 都是一个随机起伏的时间函数。这种时间函数不可能预先确定，只能通过测量获得。这种时间函数称为随机函数。无穷多个随机函数 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots$ 的集合在统计学中称做一个随机函数的总集（又称随机过程 $\xi(t)$ ）。总集 $\xi(t)$ 中每一个随机函数 $x_i(t)$ 叫做随机过程的一个实现或样本函数。同时，我们假定在这个样本空间内的适当的集合上所定义的概率分布是存在的，这样，各种事件的概率就具有明确的含义。就是说，我们不仅将随机过程定义为时间函数的总体及相应的概率规律，且可用它们确定与这些函数之一有关的任何事件的概率。随机过程和随机变量在定义方法是相似的，不同的是随机变量的样本空间是一个实数集合，而随机过程的样本空间是一个时间函数集合，因此，随机过程具有随机变量和时间函数的特点。下面将会看到，在用数学方法处理随机过程时正是利用了这两个特点。

随机过程的两重性使我们可用描述随机变量的相似方法，来描述它的统计特性。

设 $\xi(t)$ 是一个随机过程，则它在任意一时刻 t_1 的值 $\xi(t_1)$ 是一个随机变量。而随机变量的统计特性是可以概率分布函数或概率密度函数来描述的。我们把 $\xi(t_1) \leq x_1$ 的概率记作 $F_1(x_1; t_1)$ ，称为随机过程 $\xi(t)$ 的一维分布函数即

$$F_1(x_1; t_1) = P[\xi(t_1) \leq x_1] \quad (1-34)$$

可见 $F_1(x_1; t_1)$ 既是 t_1 的函数，又是 x_1 的函数。如果 $F_1(x_1; t_1)$ 对 x_1 的偏导数存在有

$$\frac{\partial F_1(x_1; t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1; t_1) \quad (1-35)$$

则称 $f_1(x_1; t_1)$ 为 $\xi(t)$ 的一维概率密度函数。显然在一般情况下 仅用一维分布函数或一维概率密度函数来描述随机过程的完整统计特性是极不充分的, 因为它们只描述了随机过程在任一瞬间的统计特性, 而没有说明随机过程在不同瞬间的内在联系。因此, 需要考察在足够多的时刻上随机过程的多维分布函数。

设随机过程 $\xi(t)$ 在 t_1, t_2 时刻的值分别为 $\xi(t_1)$ 和 $\xi(t_2)$ 均为随机变量。我们把 $\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2$ 的联合概率 $P[\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2]$ 称为随机过程 $\xi(t)$ 的二维分布函数, 并记为 $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 即

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P[\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2] \quad (1-36)$$

如果 $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 对 x_1, x_2 的二阶混合偏导数存在, 有

$$\frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} = f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) \quad (1-37)$$

则称 $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 为随机过程 $\xi(t)$ 的二维概率密度函数。

同理, $\xi(t)$ 的 n 维分布函数被定义为

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P[\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \dots, \xi(t_n) \leq x_n] \quad (1-38)$$

如果存在

$$\frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2 \cdot \dots \cdot \partial x_n} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (1-39)$$

则称它为 $\xi(t)$ 的 n 维概率密度函数。显然, n 越大用 n 维分布函数或 n 维概率密度函数去描述随机过程 $\xi(t)$ 的统计特性就越充分。在一般实际问题中, 二维概率密度函数用得最多。

二、随机过程的部分描述——数字特征

在许多实际应用中, 除关心随机过程的 n 维分布外, 常常还需要考察随机过程的数字特征。因为在有些场合要确定随机过程的 n 维分布并加以分析是比较困难, 甚至是不可能的。而数字特征既能刻画随机过程的重要特征, 又便于进行运算和实际测量, 最常用的数字特征是数学期望、方差和相关函数。

1. 数学期望

设随机过程 $\xi(t)$ 在任一时刻 t_1 的值为 $\xi(t_1)$ 且为一随机变量, 其概率密度函数为 $f_1(x_1; t_1)$ 则 $\xi(t_1)$ 的数学期望为

$$E\{\xi(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1; t_1) dx_1$$

注意这里 t_1 是任取的, 所以可以把 t_1 直接写为 t, x_1 改为 x 这时上式就变为随机过程在任意时刻的数学期望, 记作 $a(t)$ 于是

$$a(t) = E\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x; t) dx \quad (1-40)$$

$a(t)$ 是一时间函数, 它表示随机过程各个时刻的数学期望随时间变化情况, 其本质就是随机过程所有样本函数的统计平均函数。图 1-16 画出了随机过程 $\xi(t)$ 的 n 个样本函数 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 和它的数学期望 $a(t)$ 。

2. 方差

随机过程的方差定义为

$$D\{\xi(t)\} = E\{[\xi(t) - a(t)]^2\}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
 D\{\xi(t)\} &= E[\xi(t)^2] - 2a(t)E[\xi(t)] + [a(t)]^2 = E[\xi(t)^2] - [a(t)]^2 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x;t) dx - [a(t)]^2
 \end{aligned} \tag{1-41}$$

$D\{\xi(t)\}$ 也常记作 $\sigma^2(t)$ 或 $\sqrt{\sigma^2(t)}$ 称为随机过程 $\xi(t)$ 的方差或均方差, 它表示随机过程在时刻 t 对于均值 $a(t)$ 的偏离程度 (见图 1-16)。

3. 协方差函数和相关函数

数学期望以 $a(t)$ 和方差 $\sigma^2(t)$ 描述了随机过程在各个孤立时刻的特征, 但没有反映随机过程不同时刻之间的内在联系。协方差函数 $C(t_1, t_2)$ 和相关函数 $R(t_1, t_2)$ 就是用来衡量随机过程在任意两个时刻上获得的随机变量的统计相关特性的。

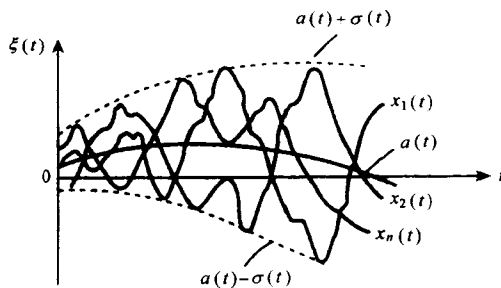


图 1-16 随机过程的数学期望和均方差

协方差函数定义为

$$\begin{aligned}
 C(t_1, t_2) &= E\{[\xi(t_1) - a(t_1)][\xi(t_2) - a(t_2)]\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2
 \end{aligned} \tag{1-42}$$

其中 t_1 与 t_2 为任意两个时刻, $a(t_1)$ 与 $a(t_2)$ 为在 t_1 和 t_2 上所得到的数学期望, $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ 为二维概率密度函数。

相关函数定义为

$$R(t_1, t_2) = E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \tag{1-43}$$

由式 1-42 和式 1-43 可得 $C(t_1, t_2)$ 和 $R(t_1, t_2)$ 之间的关系式为

$$\begin{aligned}
 C(t_1, t_2) &= E\{[\xi(t_1)\xi(t_2)] + a(t_1)a(t_2) - \xi(t_1)a(t_2) - \xi(t_2)a(t_1)\} \\
 &= E\{[\xi(t_1)\xi(t_2)]\} + E\{a(t_1)a(t_2)\} - E\{\xi(t_1)a(t_2)\} - E\{\xi(t_2)a(t_1)\} \\
 &= R(t_1, t_2) - a(t_1)a(t_2)
 \end{aligned} \tag{1-44}$$

式中若 $a(t_1)$ 为零 (或 $a(t_2)$ 为零) 则 $C(t_1, t_2)$ 和 $R(t_1, t_2)$ 完全相同。上面的 $C(t_1, t_2)$ 及 $R(t_1, t_2)$ 是衡量同一个随机过程, 因此, 又分别称为自协方差函数和自相关函数。

如果把上述概念推广到两个或更多个随机过程中去, 可得互协方差函数和互相关函数。设 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 分别表示两个随机过程, 则互协方差函数定义为

$$C_{\xi, \eta}(t_1, t_2) = E\{[\xi(t_1) - a_{\xi}(t_1)] \cdot [\eta(t_2) - a_{\eta}(t_2)]\} \tag{1-45}$$

而互相关函数定义为

$$R_{\xi, \eta}(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\eta(t_2)] \tag{1-46}$$

从以上讨论可见, 随机过程的统计特性一般都与时刻 t_1, t_2, \dots 有关。就相关函数而言, 它的相关程度与选择时刻 t_1 和 t_2 有关。如果 $t_2 > t_1$ 可令 $t_2 = t_1 + \tau$ 则相关函数 $R(t_1, t_2)$ 可表示为 $R(t_1, t_1 + \tau)$ 这说明相关函数依赖于起始时刻 (或时间起点) t_1 及时间间隔 τ 即相关函数是 t_1 和 τ 的函数。后面将会看到某些随机过程的协方差函数和相关函数只与 τ 有关而与 t_1 的选择无关。

三、平稳随机过程

有一类随机过程称为平稳随机过程，在通信领域中占有重要地位。平稳随机过程的重要性来自两个方面：其一，在实际应用中，特别在通信中所遇到的过程大多属于或很接近平稳随机过程；其二，平稳随机过程可以用它的一维、二维统计特征很好地描述。由此，发展了平稳随机过程的理论。

1. 平稳随机过程定义

所谓平稳随机过程，即指它的 n 维分布函数或概率密度函数不随时间的平移而变化，或者说不随时间原点的选取而变化。用数学表示，即如果对于任意的 n 和 h 随机过程 $\xi(t)$ 的 n 维概率密度函数满足

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + h, t_2 + h, \dots, t_n + h) \quad (1-47)$$

则称 $\xi(t)$ 是平稳随机过程。概率密度函数不随时间平移而变化的这一特性反映在平稳随机过程的数字特征方面有着自身的规律，它的一维分布与时间 t 无关，二维分布只与时间间隔 τ 有关。下面就来讨论这一点。

设 $\xi(t)$ 是一个平稳随机过程，把式 (1-47) 应用于一维概率密度即 $n=1$ 并令 $h=-t_1$ ，于是

$$f_1(x_1; t_1) = f_1(x_1; t_1 + h) = f_1(x_1; 0)$$

可见，平稳随机过程的一维概率密度与时间 t 无关，这样可把时间 t 省掉把它记作 $f_1(x_1)$ 。于是 $\xi(t)$ 的均值(数学期望)为

$$E\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1) dx_1 = a \quad (1-48)$$

所以，平稳随机过程的数学期望为常数，观察图 1-16 设想 $a(t)=a$ 常数，可见平稳随机过程的各样本函数是围绕着一水平线而起伏，说明了它的平稳性。同样，可以证明平稳随机过程的方差和均方差也是常数，即 $\sigma(t)=\sigma$ ，这说明它的起伏偏离数学期望的程度也是常数。再把式 (1-47) 用于二维概率密度即 $n=2$ 并令 $h=-t_1$ 则有

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; t_1 + h, t_2 + h) = f_2(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1)$$

这说明二维概率密度仅依赖于时间间隔 $\tau=t_2-t_1$ 而与时间的个别值 t_1 和 t_2 无关把它写成 $f_2(x_1, x_2; \tau)$ 。因此，当设 $t_1=t, t_2=t+\tau$ 时，将其应用于式 (1-43) 自相关函数成为

$$E\{\xi(t)\xi(t+\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R(\tau) \quad (1-49)$$

即单变量 τ 的函数。

以上表明对于平稳随机过程：数学期望和方差与 t 无关且分别为 a 及 σ^2 ；②自相关函数只与时间间隔 τ 有关即

$$R(t_1, t_2) = R(t_1, t_1 + \tau) = R(\tau) \quad (1-50)$$

注意到式 (1-47) 定义的平稳随机过程对于一切 n 都成立，这在实际应用上是十分困难的。幸好，在应用上通常只需考虑二维分布，于是又定义了一类称为广义平稳随机过程，如果

$$\begin{cases} E[\xi(t)] = \text{常数} \\ E[\xi^2(t)] < +\infty \\ E[\xi(t)\xi(t+\tau)] = R(\tau) \end{cases} \quad (1-51)$$

则称 $\xi(t)$ 为广义平稳随机过程，而相对地按式 (1-47) 定义的平稳随机过程称为狭义平稳随机

过程。因为广义平稳随机过程的定义只涉及与一维、二维概率密度有关的数字特征，所以一个狭义平稳随机过程只要 $E[\xi^2(t)]$ 均方值有界，则它必定也是广义平稳随机过程，但反过来一般是不成立的。今后若不特别说明，一般所说的平稳随机过程都是指广义平稳随机过程或简称平稳过程。

2. 各态历经性与时间平均

平稳随机过程在满足一定条件下有一个非常重要的特性，称为各态历经性。这种平稳随机过程，它的数字特征完全可由随机过程中的任一实现的数字特征，即数学期望、方差和自相关函数来决定，这样就可以用时间平均来代替统计平均。

设 $x(t)$ 是从平稳随机过程 $\xi(t)$ 中任意的一个实现，取它的时间平均值 \bar{a} 为

$$\bar{a} = \overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (1-52)$$

其中 T 为观察时间； \bar{a} 和 $x(t)$ 上标符横道 “—” 表示时间平均值。时间平均的方差 σ^2 为

$$\sigma^2 = \overline{[x(t) - \bar{a}]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - \bar{a}]^2 dt \quad (1-53)$$

时间平均的自相关函数为

$$\overline{R(\tau)} = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) dt \quad (1-54)$$

对于具有各态历经性的平稳随机过程下列式子成立

$$\begin{cases} \bar{a} = \overline{x(t)} \\ \sigma^2 = \overline{[x(t) - \bar{a}]^2} \\ \overline{R(\tau)} = \overline{x(t)x(t+\tau)} \end{cases} \quad (1-55)$$

上式表明，各态历经性的平稳随机过程要求它的数字特征，不必作无限多次试验，而只需要求得一次试验的结果，从而使统计平均（集合平均）可用时间平均来代替，使计算过程大为简化。可见，各态历经性的含义是：从随机过程中得到的任一个实现，好象它经历了随机过程的所有可能状态，因此，用一个实现的时间平均就可以代替它的统计平均（集合平均）。不过应注意，具有各态历经性的随机过程必定是平稳随机过程，但平稳随机过程不一定是各态历经性的。对于自相关函数为 $R(\tau)$ 的零均值平稳高斯随机过程，只需满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau < \infty \quad (1-56)$$

则一定是各态历经性的。幸好，通信中所遇到的信号和噪声一般均满足上述条件，所以在后面的讨论中都把它们作为各态历经性的平稳随机过程来处理。

3. 平稳随机过程自相关函数的性质

平稳随机过程的自相关函数是特别重要的函数，其一，平稳随机过程的统计特性，如数字特征等，可通过自相关函数来描述；其二，自相关函数与平稳随机过程的谱特性有着内在的联系，这一点将在下一个问题中讨论。

重写平稳随机过程自相关函数的定义式（1-49）则为

$$R(\tau) = E[\xi(t)\xi(t+\tau)] \quad (1-57)$$

它具有下列重要性质：

$$(1) R(0) = E[\xi^2(t)] = S \text{ 为平稳随机过程 } \xi(t) \text{ 的平均功率。} \quad (1-58)$$

$$(2) R(\infty) = E^2[\xi(t)] \text{ 为 } \xi(t) \text{ 的直流功率。} \quad (1-59)$$

$$(3) R(0) - R(\infty) = \sigma^2 \quad (1-60)$$

式(1-60)是方差,为 $\xi(t)$ 的交流功率。这一点可直接从式(1-41)得到。注意,该式中 $[a(t)]^2$ 即为 $E^2[\xi(t)]$, 其物理意义就是平稳随机过程的平均功率与直流功率之差等于它的交流功率。

$$(4) R(\tau) = R(-\tau) \text{ 为 } \tau \text{ 的偶函数。} \quad (1-61)$$

$$(5) R(0) \geq |R(\tau)| \text{ 自相关函数 } R(\tau) \text{ 在 } \tau=0 \text{ 时有最大值, 为它的上界。}$$

以上可知,用自相关函数几乎可表达 $\xi(t)$ 的所有数字特征,因而 $R(\tau)$ 的这些性质很有实用意义。

4. 平稳随机过程的功率谱密度

傅立叶分析方法揭示了信号的时域和频域的关系,那么,能否适用于随机过程并建立时域与频域的联系?回答是肯定的。这就是平稳随机过程的自相函数和功率谱密度为一对傅立叶变换。为便于理解先讨论确知信号,然后分析平稳随机过程。

(1) 确知信号的功率谱密度

确知信号分为能量信号和功率信号。对于能量信号 $f(t)$ 如满足狄氏条件,且绝对可积,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < +\infty \quad (1-62)$$

则存在傅立叶变换 $F(\omega)$ 而它的能量 E 可表示为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (1-63)$$

上式为帕塞瓦尔等式,其中 $|F(\omega)|^2$ 称为 $f(t)$ 的能量谱密度。

对于功率信号,其能量为无限大,但其平均功率是有限的。如 $f(t)$ 为确知的功率信号,它不能满足式(1-62)条件,但我们可以研究它在 $-\infty, \infty$ 上的平均功率 P 即

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \quad (1-64)$$

并认为这个平均功率是存在极限的。为此,从 $f(t)$ 的波形上截取 $-T/2, T/2$ 的一段,称为它的截短函数,记为 $f_T(t)$ 即

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-65)$$

如图 1-17 所示。显然, $f_T(t)$ 满足条件式(1-62) 为能量信号,其能量为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(\omega)|^2 d\omega \quad (1-66)$$

其中 $F_T(\omega)$ 为 $f_T(t)$ 的傅立叶变换。考虑到式(1-64)及式(1-65)改写为

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f_T^2(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} d\omega \end{aligned} \quad (1-67)$$

当极限存在时,令

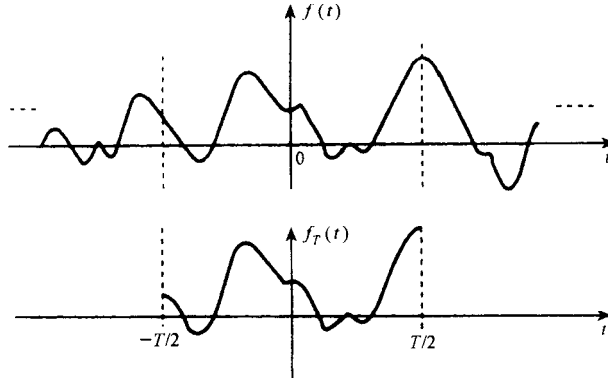


图 1-17 功率信号及其截短函数

$$p_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} \quad (1-68)$$

于是 $f(t)$ 的平均功率表示为

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p_f(\omega) d\omega \quad (1-69)$$

这里 $p_f(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的功率谱密度 表示角频率 ω 处的单位频带的功率, 而 $f(t)$ 的平均功率就是 $p_f(\omega)$ 在频域上的积分。

(2) 确知功率信号的自相关函数与功率谱密度的关系

可以证明两者的关系是一对傅立叶变换, 称为维纳-辛钦关系。

确知功率信号 $f(t)$ 的自相关函数定义为

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t+\tau)dt \quad (1-70)$$

在 $(-T/2, T/2)$ 上 $f(t)$ 可用 $f_T(t)$ 来代替 经过推导可得

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-T/2}^{T/2} F_T(\omega)F_T^*(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \int_{-T/2}^{T/2} |F_T(\omega)|^2 e^{j\omega\tau}d\omega$$

于是

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p_f(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega \quad (1-71)$$

所以 $R(\tau)$ 与 $p_f(\omega)$ 为一对傅立叶变换对 即

$$R(\tau) \leftrightarrow p_f(\omega) \quad (1-72)$$

(3) 平稳随机过程的功率谱密度

平稳随机过程的功率谱密度以及它与自相关函数的关系可以利用确知功率信号类似的方法来推导。

平稳随机过程的每个实现是一个时间信号, 且为功率信号, 因而每个实现的功率谱密度可由式 (1-68) 表示。但是 随机过程的每一个实现是不能预知的 因此 某一实现的功率谱密度不能当作平稳随机过程的功率谱密度, 而必须进行统计平均。

与确知功率信号相似 令 $\xi_T(t)$ 为平稳随机过程 $\xi(t)$ 的截短函数 且其傅立叶变换存在 即有 $\xi_T(t) \leftrightarrow F_{\xi_T}(\omega)$ 。同理, 可以得到平稳随机过程的功率谱密度 $p_\xi(\omega)$ 为