

第一章 问题描述

1.1 问题提出

人工智能的方法和技术已经应用到若干不同的学科领域,为今后讨论的方便,我们阐述其中的若干内容。

专家咨询系统。这些系统是在特定的学科领域中,代替专家的咨询工作,向用户提供咨询与建议。在已经建立的专家系统中,有能够诊断疾病的,有分析石油勘探数据的,有安排调度计划的,等等。这些系统通常都采用一种基于规则的推理方法。专家的知识用一组推理规则来表示,系统按下列方式工作:从给定的数据或事实出发,系统选择合适的规则,一边引导系统与用户之间的对话,一边产生新的结论。于是不断地运用推理规则,直至得到所需的结论为止。

机器定理证明。机器对数学中的某个定理寻找其证明。即从一组已知的公理出发,通过运用推理规则,不断地产生中间的定理,直到所需的定理被证明为止。

人工智能中不少的问题领域可以做类似的形式化,成为某种形式的推理过程。

自动程序设计、自动调度与决策、机器人动作规划等具有相似的性质,可以归纳成如下的一般性任务,即给定一个目标,要求机器在满足预先给定的约束条件下,规划出一系列的操作(或动作),

以达到给定的目标。这类问题又称约束满足 (Constraint Satisfaction) 问题。

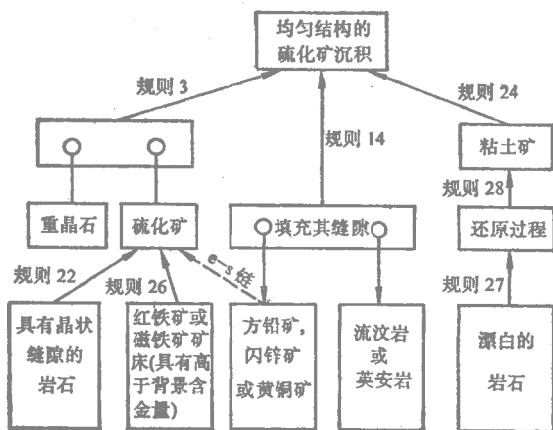
视听觉识别。即输入一组视觉或听觉的信号序列,要求机器理解所‘看到’或‘听到’的信号,即识别看到的是什么东西,听到的是什么内容。

凡此种种,均要求智能,它们都是人工智能的重要研究课题。为了建造具备上述智能的计算机,就要求对上述问题求解过程作形式的描述,简称问题描述。现先介绍两个常用的描述方法。

状态空间法 (State-Space Representation)^[1]。该方法以三个基本要素来描写要解决的问题。其一是符号结构或知识库来表示问题可能解的子集。其二是一组算子或产生式规则,描述各个符号结构之间的关系。当一个规则作用于某个符号结构上时,该符号结构被细化,产生新的符号结构,代表一个更精细的可能解的集合。最后一个要素是控制策略,代表着选取规则的原则与策略。有了以上三种要素,就可以把一个问题的求解过程描述为状态空间的搜索,或图的搜索。在这里,图中的每一个结点表示一个符号结构,连系两个结点的一条弧,表示一个推理规则。控制策略就是图的搜索策略。

状态空间法可以描述相当一类问题的求解过程,自动推理、机器定理证明等可以看成状态空间中目标结点的搜索问题。而机器人动作规划、自动程序设计等可形式化为状态空间的路径搜索问题。

以专家系统 PROSPECTOR 为例^[2]。它的任务是估计潜在的矿床。图 1.1 是以状态空间表示的推理网络的片断。图中的结点(以方框表示)表示其可能解的子集,如均匀结构的硫化矿沉积,表示一个可能解的类,具体的解(如某种矿床)包含在这个子集中。随着推理的深入,解也越来越明确。结点之间的连线表示不同的推理规则,如规则 3,14 等。这些规则代表了具体的探矿知识。



另一种描述方法称‘问题归约’法(Problem-Reduction Representation)^[1]，它把一个复杂的原问题分解为若干子问题，这些子问题一般比原问题简单。然后分别求解子问题，子问题又可进一步分解为更简单的子问题，直到可以解决为止。这种描述方法，把问题的求解变为‘与/或图’的搜索。它与状态空间法不同之处是，后者是搜索一个目标结点或一条路径，而前者是搜索一个目标子图。

举例来说，假设设计一台电子仪器。我们可以把整机的设计任务，分解为几个部件的设计，如电源部件、显示器部件设计等。部件设计又可分解为更小的部件设计，如电源进一步分解为变压器、整流器设计等等。如图 1.2 所示。

上面讲述的两种问题描述方法，虽然可以描述相当广泛的问题求解过程，但它们还不能描述人类问题求解中的某些重要特点，而这些特点在反映人类智能上又是至关重要的。我们将进一步讨论这个问题。

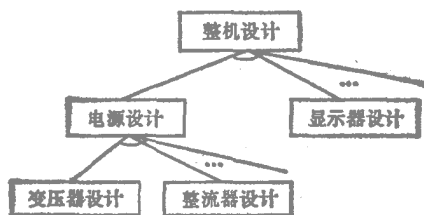


图 1.2 问题的归约描述法

人类智能的一个公认特点，就是人们能从极不相同的粒度 (Granularity)^[3] 上观察和分析同一问题。人们不仅能在不同粒度的世界上进行问题求解，而且能够很快地从一个粒度世界跳到另一个粒度的世界，往返自如，毫无困难。这种处理不同粒度世界的能力，正是人类问题求解的强有力的表现。

设想一位正在思考全厂生产规划的计划人员。当他考虑全厂的初步生产计划时，他立即忽略掉工厂的许多具体细节：机床是什么样，安装在什么地方等等。这时，工厂在他看来只不过是由若干个车间组成的“方块图”而已，即他以很粗的粒度来描述工厂。随着计划的深入，当不能不考虑车间内部的细节，如有多少工段，各工段又有几个班组时，于是他又进入一个较细粒度的世界观察和分析问题。一旦需要重新考虑某个全局性的问题时，他又马上返回工厂的粗粒度世界。总之，他可以在不同粒度的世界里来去自由。

对于一部计算机，事情就不那么简单了。我们即使把工厂的全部细节表示在计算机内部，如有多少机床，多少螺钉、螺母，多少工人等等。可是却存在计算机如何从中生成工厂全局的“方块图”，如何根据求解问题的需要选择合适的粒度，不同粒度世界之间又如何转换等等问题。

目前问题的描述方法，状态空间法也好，问题归约法以及其它表达方法也好，都难以处理上述问题。总之，我们缺少描述不同粒

度世界的手段。如果我们能够把人类的这种能力形式化,并使计算机也具备类似的能力,对于开发机器智能来讲其意义是十分重大的。

1.2 不同粒度世界的描述

如上所示,求解的问题不同,需要不同粒度的世界描述,有时解决同一个问题,却同时需要若干不同粒度的世界。

我们用一个三元组 $(X, f, \mathcal{F})$ 描述一个问题。

X 表示问题的论域。在上述关于制订工厂生产计划的例子中,工厂的全体,就是该问题的论域,记为 X 。

$(f \cdot)$ 表示论域的属性,可用函数 $f: X \rightarrow Y$ 表示,其中 Y 可以是实数集合, n 维空间 R^n 中的集合,可以是更一般的空间。 $(f \cdot)$ 可以是单值,也可以是多值的。对论域中任一元素 $x \in X$,有一个相应的 $f(x)$,表示元素 x 的某些属性。所以 $f(\cdot)$ 又称属性函数。在上述例中,当 x 指某个班组时,则 $f(x)$ 可对应于该班组的产品、产值、劳力等。

$\mathcal{F}$ 是论域的结构,指论域 X 中各元素的相互关系,如各班组之间的相互关系。

分析或求解问题 $(X, f, \mathcal{F})$,是指对论域 X 及其有关的结构、属性进行分析、研究。可是对 X 我们选择怎样大小的粒度进行研究,不同粒度之间又有何关系?

设 X 代表论域中最细的粒度,比如说到生产的班组,若对 X 进行简化,产生一个较大粒度的论域 $[X]$ 。那么就把原问题 $(X, f, \mathcal{F})$ 变成新层次上的问题 $([X], [f], [\mathcal{F}])$ 。

以工厂为例,如果在论域 X 中把班组看成元素,那么在简化了的论域 $[X]$ 中,就是把性质相近的班组看成是等价的,把它们归为一类,作为一个新元素——“工段”,然后把所有工段作为新的论域

$[X]$ 加以研究,如图 1.3 所示。

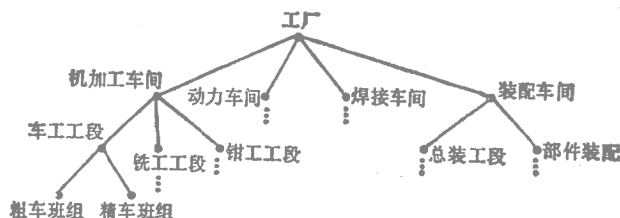


图 1.3 工厂组织的层次关系

这个简化过程与数学中商集 (Quotient Set)^[4]的概念完全相同,于是得到不同粒度世界的以下数学模型,简称分类的数学模型。

设 X 是论域,在 X 上给定一个等价关系 R ,对应于 R 得到商集 $[X]$,然后将 $[X]$ 当作新的论域,对它进行讨论。则称对 X 进行 R 分类,相应地得到一个较粗粒度的世界 $[x]$ 。

论域的划分,在讨论论域的划分之前,先介绍一些集合论中的概念和命题。

定义 1.1 设 X, Y 是两个集合, $X \times Y$ 是 X 与 Y 的积集, $R \subset X \times Y$ 。设 $\forall (x, y) \in X \times Y$, 有 $(x, y) \in R$, 则称 x 与 y 有关系 R , 记为 xRy , 称 R 为 $X \times Y$ 上的一个关系。

当 $X = Y$ 时,常简称 R 是 X 上的一个关系。

定义 1.2 设 X 是一集合, R 是 X 上的一个关系,并满足

- (1) 自反性, xRx
- (2) 对称性,若 xRy , 则 yRx
- (3) 传递性,若 xRy, yRz , 则 xRz

则称 R 是 X 上的一个等价关系,对等价关系 R ,通常将 xRy 记为 $x \sim y$ 。

定义 1.3 $\forall x \in X$, 令 $[x] = \{y | x \sim y\}$, 称为 x 的等价类。

定义 1.4 令 $[X] = \{[x] | x \in X\}$, 称 $[X]$ 是 X 关于 R 的商

集。

故商集是将等价类 $[x]$ 看成新元素而构成的新空间。

如上所述,我们将不同粒度的世界与数学上的商集概念统一起来,或者说以商集作为不同粒度世界的数学模型。

定义 1.5 $\{A_\alpha\}$ 是 X 的一个划分 $\Leftrightarrow (1) X = \bigcup_{\alpha} A_\alpha$, (2) 若 $\alpha \neq \beta$, 则 $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$, 其中 A_α 表 X 的子集。

我们有以下数学命题。

命题 1.1 设 R 是 X 上的一个等价关系, 则 $\{[x] | x \in X\}$ 是 X 的一个划分。反之, 给定 X 上的一个划分 $\{A_\alpha\}$, 就唯一确定 X 上的一个等价关系 R , 且 X 按 R 的等价类集 $\{[x] | x \in X\} = \{A_\alpha\}$ 。

由上述数学命题易于看出, 问题的不同粒度表示对应于不同的等价关系 R , 也就对应于不同的划分(分类)。在工厂的例子中, 可以把‘机加工’看成一个等价类(车间), 那么车工、铣工、钳工同属于一个车间(见图 1.3), 看成一个等价类。若再细分, 则在细的粒度下, 车工、铣工、钳工各为一个等价类(工段), 那么在这个粒度下, 三者为不同的元素。当然, 车工还可细分为粗车、精车等更细的粒度。总之, 不同的粒度, 只不过是论域进行不同的划分而已。

论域划分的原则是什么, 这是一个复杂的问题, 通常是由提出的目标而定, 并且与具体的论域有关。

下面讨论划分的一般方法。

1. 属性划分法, 即将属性相同或相似的元素归为一类。

设 $f: X \rightarrow Y$ 是属性函数, 若 f 是单值的, 则可利用 f 来定义划分。一般来讲, 我们对 Y 的结构比较清楚, 如 Y 是实数集或 R^n 欧氏空间, 我们可以利用 Y 的分类来定义 X 中对应的分类。方法如下。

设 $\{Y_i\}$ 是 Y 的一个划分, 定义

$$X_i = \{x | f(x) \in Y_i\}$$

则 $\{X_i\}$ 是 X 的一个划分。

[例 1.1] 设 X 是某年参加高考的考生的集合, $\forall x \in X, f(x)$ 表示考生 x 的高考总分。 $f: X \rightarrow [0, 700] = Y$ 。现将 Y 划分为: $Y_1 = [0, 420)$, $Y_2 = [420, 460)$, $Y_3 = [460, 520)$, $Y_4 = [520, 700]$ 。

定义 $X_i = f^{-1}(Y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$,

若规定 520 是重点大学的录取分数线, 460 是一般大学的录取分数线, 420 是大专的录取线。于是得 X_4 是所有有资格入重点大学的考生集合, X_3 是所有有资格入一般大学的考生集合……。总之, 我们由一个在实数子集 $[0, 700]$ 上的划分, 变换成对考生集合的一个划分。

2. 投影划分法

若元素 x 的属性函数是多维的, 如有 n 个属性函数分量 $f_1, f_2, \dots, f_n$ 。若暂不考虑其中 i 个属性 $f_1, f_2, \dots, f_i$, 将 $f_{i+1}, f_{i+2}, \dots, f_n$ 属性相同的元素归为一类, 称投影分类法。

[例 1.2] 设 X 是某大学一年级新生的集合, 如果要考察这批新生的身体素质, 我们可以用身高、体重、视力等属性(即 f_1, f_2, f_3 等)来描述他们。如果我们重点只研究其中身高 f_1 的情况, 这时需要把身高相同的新生归为一类加以研究, 那么所采用的就是投影划分法。

3. 结构划分法

把结构上或功能上关系密切的元素分为一类。如一部机器或一个大系统, 按功能或作用不同, 分为不同的部件或子系统。

4. 约束划分法

设有 n 个约束条件 $C_1, C_2, \dots, C_n$, 那么可按 C_i 进行划分。

如由约束条件 C_1 , 将 X 分成满足 C_1 与不满足 C_1 的两大类, 进而又按是否满足 C_2 条件的又分为两个子类, 如此下去, 将 X 分

成一个 2-叉树的结构。

当然, 对一个约束 C_1 , 也可按满足 C_1 条件的程度不同划分为几个大类。这样得到的是一般树的结构。

在实际问题中, 上述的划分方法的应用十分广泛。当我们讨论某个复杂问题时, 通常将一些条件先忽略去而考虑较简单的情况, 然后再将这些条件加上进一步深入讨论。这种方法就其本质来讲, 也是按约束条件进行划分的分析技术。

[例 1.3] 设要求设计一座住宅公寓, 需要满足一系列的约束条件, 如多少层楼, 占地面积, 分多少单元, 每套单元几间房子等等。设计者通常是根据主要的要求, 先设计出草图, 然后把进一步要求加进去, 一步步细化, 最终得到所要求的设计。那么满足某些设计要求的设计草案, 代表着满足该要求的住宅等价类, 随着设计的深入, 更多的约束条件加进去, 于是该‘等价类’进一步划分, 最后得到所需的住宅设计。

当然, 还可以列出其它各种不同的划分方法。在实际问题求解中, 粒度的划分有时是动态的, 即先进行一次分类, 在这个粒度上进行推理与分析, 得到一定的性质, 问题初步明朗后, 再进一步分类, 直至问题的解决。

分类有相交的情况: 当 X 中的同一元素 x 同时属于 X 中不同的类别时, 如一部仪器中的某些元件可以划分到不同的部件, 即分类的交界处不十分分明时, 称为分类有相交的情况。

我们有下面的定义。

定义 1.6 设 X 是论域, $A_i, i \in I$ 是 X 的子集, 其中 I 是下标集。若 $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, 现将 A_i 看作是新元素得到的集合, 记为

$\langle X \rangle = \{A_i\}$, 称 $\langle X \rangle$ 是 X 的一个层次。

这里 $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, 不一定都成立, 为了区别于分类不相交的情况, 我们用 $\langle \rangle$ 尖括号代替 $[]$ 方括号。

我们这里用符号 A_i 既表示 X 中的子集,记为 $A_i \subset X$ 也表示 $\langle X \rangle$ 中的元素,记为 $A_i \in \langle X \rangle$ 。

1.3 不同粒度世界的关系

不同粒度的划分是为了研究、分析问题的方便,特别是同一问题需要在不同粒度的世界中进行研究时,则要求研究和建立其间的关系。

1.3.1 半序格

设 $\mathcal{R}$ 是 X 上一切等价关系的全体。

定义 1.7 设 $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$, 若 $x, y \in X$,
 $xR_1y \Rightarrow xR_2y$, 则称 R_1 比 R_2 细, 记为 $R_2 < R_1$ 。

命题 1.2 $\mathcal{R}$ 在上面定义的“ $<$ ”关系下形成一完备半序格。

证明: 任给一族关系 $\{R_\alpha, \alpha \in I\} \subset \mathcal{R}$

定义 $\bar{R}: x\bar{R}y \Leftrightarrow \forall \alpha, xR_\alpha y$

$\underline{R}: x\underline{R}y \Leftrightarrow \exists$ 有限序列 $x = x_0, x_1, \dots,$

$x_n = y$, 及 $R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}, \dots, R_{\alpha_n}$ 有 $x_i R_{\alpha_i} x_{i+1}, i = 0, 1, \dots, n-1$,
 简记 $[x = x_0, x_1, \dots, x_n = y]$ 。

下面证明, $\bar{R}$ 是 $\{R_\alpha\}$ 的上确界。

先证 $\bar{R}$ 是等价关系, 其自反性、对称性显然。只证其传递性,
 设 $x\bar{R}y, y\bar{R}z \Rightarrow \forall \alpha, xR_\alpha y, yR_\alpha z \Rightarrow \forall \alpha, xR_\alpha z \Rightarrow x\bar{R}z$ 。

设一关系 R 满足 $\forall \alpha, R_\alpha < R$, 于是, 若 $xRy \Rightarrow \forall \alpha, xR_\alpha y \Leftrightarrow$
 $x\bar{R}y$, 即 $\bar{R} < R$, 故 $\bar{R}$ 是上确界。

现证 $\underline{R}$ 是下确界。

先证 $\underline{R}$ 是一等价关系, 由定义 $\underline{R}$ 具自反性, 对称性是显然的。

设 $x\underline{R}y, y\underline{R}z \Rightarrow \exists x = x_0, x_1, \dots, x_n = y, [x = x_0, x_1, \dots,$

$x_n = y]$ $\exists y_0 = y, y_1, \dots, y_m = z, [y = y_0, y_1, \dots, y_m = z]$, 故有 $[x = x_0, x_1, \dots, x_n = y = y_0, \dots, y_m = z]$, 即 xRz , 得 R 具有传递性, 故 R 是一等价关系。

最后证 R 是下确界。设 R 是 $\{R_\alpha\}$ 的任一下界, 即 $\forall \alpha$, 有 $R < R_\alpha$ 。

设 xRy , 即 $\exists x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$, 及 $R_{\alpha_i}, x_i R_{\alpha_i} x_{i+1}$ 成立, $i = 0, 1, \dots, n$ 。对 $\forall i$, 由 $x_i R_{\alpha_i} x_{i+1}$ 及 $R < R_{\alpha_i}$ 得

$x_i R x_{i+1}, i = 0, 1, \dots, n$ 均成立。

再由 R 的传递性, 得

$x = x_0$ 与 $y = x_n$ 是 R 等价, 即 $xRy \Rightarrow R < R$

又因 $\forall \alpha$, 若 $xR_\alpha y \Rightarrow xRy$ 成立, 故 R 是下界。

两者合并得 R 是 $\{R_\alpha\}$ 的下确界。

故得 R 是完备半序格。证毕。

显然, 当 $R_1 < R_2$, 则 $[X]_{R_1}$ 是 $[X]_{R_2}$ 的商集, 其中 $[X]_R$ 表示 X 关于等价关系 R 的商空间。

如图 1.3, 如果把工厂全体看成一个等价类, 则 R_0 : 一切 $x \in X$ 都等价, 故 R_0 是 R 中最粗的关系。如果按照某种等价关系 R_1 , 把工厂分为机加工、装配、焊接等车间, 得到一个新的划分。继续细分下去, 直到把工厂中的基本元素, 如班组, 工人个人都看成不同的类, 即 $R_n: x \sim y \Leftrightarrow x = y$, 已经不能再细分了。则 R_n 是 R 中最细的关系。最后得到如下的序关系:

$$R_0 < R_1 < \dots < R_n$$

一般地讲, 设 G 是一个具有 n 层深度的树, 见图 1.4。若令 X 是 G 的叶结点的全体, $p \in G$ 是 G 中的某个结点。令 (p) 表示以 p 为根的子树上叶结点的全体。令 A_i 为第 i 层所有结点的集合。则每个 A_i 对应于 X 的一个划分, 即 $p \in A_i, (p)$ 为一等价类, 也就对应于一个等价关系 R_i 。

显然有 $R_0 < R_1 < \dots < R_n$ 。

反之,一个单调关系序列 $R_0 < R_1 < \dots < R_n$ 则可用一个 n 层的树来表示。

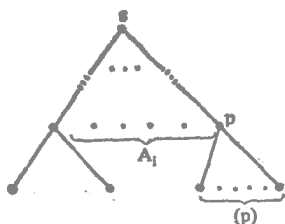


图 1.4 树的层次关系

这样,若每个叶结点 x 上定义一个函数 $f(x)$,则对树 G 的搜索问题,可化为在一个单调关系序列中的分层推理过程。即将树的搜索问题化成分层问题来处理。我们将在后面的章节里进一步讨论。

1.3.2 性质的保持性

上面仅讨论了论域 X 与 $[X]$ 的关系,说明不同粒度的论域形成完备半序格。但是对于一个具体对象 $(x, f, \mathcal{F})$,结构 $\mathcal{F}$ 也是很重要的。当一个论域 X 被划分之后,其结构也发生了变化,一般来讲,是被简化了。我们关心的是,简化后的结构应该仍保持某些我们感兴趣的性质。这里我们将集中讨论不同粒度世界之间性质的保持性问题。

一般地讲,结构 $\mathcal{F}$ 很广泛、很复杂,要统一起来讨论有一定的困难。下面将集中讨论两类常见的情况。即 $(X, \mathcal{F})$ 是拓扑空间,其中 $\mathcal{F}$ 是 X 的拓扑; $(X, \mathcal{F})$ 是半序空间,其中 $\mathcal{F}$ 是半序关系 $<$ 。

1. $(X, \mathcal{F})$ 是拓扑空间

下面讨论中要用到一些拓扑的概念及其基本性质,不熟悉该内容的读者请先参阅附录 I 或其它有关参考书籍。

定义 1.8 设 X 是一集合, $\mathcal{F}$ 是 X 的一个子集族。若 $\mathcal{F}$ 满足

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$
- (2) 若 $u_1, u_2 \in \mathcal{F}$, 则 $(u_1 \cap u_2) \in \mathcal{F}$
- (3) 若 $u_{\alpha}, \alpha \in I \in \mathcal{F}$, 则 $\bigcup_{\alpha \in I} u_{\alpha} \in \mathcal{F}$

其中 I 是指标集, I 的势可以是任意的。

则称 $\mathcal{T}$ 是 X 上的一个拓扑, 称 $(X, \mathcal{T})$ 为一拓扑空间。 $u \subset X$
称 u 是开集 $\Leftrightarrow u \in \mathcal{T}$

[例 1.4] 令 $X = \{a, b, c, d\}$

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{c\}, \{a, b, c, d\}\}$$

则 $\mathcal{T}$ 是 X 上的一个拓扑。

应该指出, X 上可以有許多不同的拓扑, 即拓扑不是唯一的。

在一个集合 X 上给定一个拓扑, 就给出 X 中各元素之间的一个互相关系的结构。有不少论域 X , 其元素之间的互相关系可以用拓扑结构来描述, 这些论域我们就可以利用拓扑这一数学工具来研究。

定义 1.9 设 $(X, \mathcal{T})$ 是一拓扑空间, B 是 X 中一个子集族, 若满足

$$(1) u \in B \Rightarrow u \in \mathcal{T}$$

$$(2) \forall w \in \mathcal{T}, \text{ 则存在 } B \text{ 的子集 } B_1 \subset B, \text{ 使得}$$

$$w = \bigcup_{u_\alpha \in B_1} u_\alpha$$

则称 B 是 $(X, \mathcal{T})$ 的一个基。

条件(1)说明 B 是由开集组成, 条件(2)说明 X 中任一开集, 都可以表示为 B 中一些集合的并。

[例 1.5] X 为一维欧氏空间, 令 $B = \{(a, b) | a < b, a, b \in X\}$, 则 B 是 X 的一个基, (a, b) 表示开区间。

应该指出, 一个 X 当其基确定之后, 则其对应拓扑也就唯一地确定。反之, X 上拓扑 $\mathcal{T}$ 确定之后, 可以有不同的基存在。

设 R 是 X 上的一个等价关系, 对 R 可以得到对应的商集, 记为 $[X]$ 。现在在 $[X]$ 上定义由 $\mathcal{T}$ 诱导出的拓扑, 记为 $[\mathcal{T}]$, 其表示式为

$$[\mathcal{T}] = \{u | p^{-1}(u) \in \mathcal{T}, u \subset [X]\}$$

称 $[\mathcal{T}]$ 为商拓扑, $([X], [\mathcal{T}])$ 为商拓扑空间。

其中 $p: X \rightarrow [X]$ 是自然投影,其定义是

$$p(x) = [x]$$

$$p^{-1}(u) = \{x | p(x) \in u\}$$

[例 1.6] 令 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$$

显然 $\mathcal{T}$ 是 X 上的一个拓扑。

再设 R 为, $a_1 = \{1, 2\}, a_2 = \{3\}, a_3 = \{4, 5\}$, 得

$$[X] = \{a_1, a_2, a_3\}$$

现在按上面关于 $[\mathcal{T}]$ 的定义来构造 $[X]$ 的商拓扑, 有

$$a_3 = \{4, 5\} \in \mathcal{T}, \quad \therefore \{a_3\} \in [\mathcal{T}]$$

$$\{a_1, a_2\} = \{1, 2, 3\} \in \mathcal{T}, \quad \therefore \{a_1, a_2\} \in [\mathcal{T}]$$

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \in \mathcal{T}, \quad \therefore \{a_1, a_2, a_3\} \in [\mathcal{T}]$$

$$\emptyset \in [\mathcal{T}]$$

$$\text{最后得 } [\mathcal{T}] = \{\emptyset, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_2, a_3\}\}$$

[例 1.7] 设 E^2 是二维欧氏平面, $\mathcal{T}$ 就是由欧氏距离定义的拓扑

设等价关系 R 为, $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2) \in E^2$,

$$p_1 \sim p_2 \iff x_1 = x_2$$

这个等价关系的几何直观是, 将过 x 轴上点 x_1 而垂直于 x 轴的直线看成是一等价类而得的商空间。若将商空间 $[X]$ 与 x 轴上点作一一对应, 则 $[X]$ 的商拓扑就等价于 x 轴上的欧氏拓扑。

[例 1.8] 如果我们研究一部电子仪器, 那么其元件的全体 X , 如电阻、电容、集成电路等, 是我们的论域。由这些元件组成的线路图是 X 的结构 $\mathcal{T}$ 。如果将仪器中功能相近的元器件归为一类, 得到电源、放大器等部件, 记其全体为 $[X]$, $[X]$ 构成一个新论域。那么由这些部件组成的方框图则是 $[X]$ 的结构 $[\mathcal{T}]$ 。它是原来线路图的简化。

简化图的一般性作法是, 设 G 是一网络, V_1 是 G 的顶点的一

个子集,若将 V_1 缩成一点, $\forall p \notin V_1$, 且 $p \in G$, p 与新点 V_1 有边相连 $\Leftrightarrow \exists p_1 \in V_1$, p 与 p_1 有边相连。其它部份不动而得的图形, 记为 G_p 。称 G_1 是对 G 进行压缩的结果。所以上述的方框图即仪器线路图压缩的结果。

由拓扑学的原理[4]知,从商拓扑空间的结构可以了解原拓扑空间的某些性质。有以下拓扑学的命题。

命题 1.3 $p: (X, \mathcal{T}) \rightarrow ([X], [\mathcal{T}])$ 是自然投影, 故 p 是连续的。若 $A \subset X$ 且 A 是 X 中的连通集, 则 $p(A)$ 是 $[X]$ 中的连通集。

很多实际的问题求解, 可以化为求某一集合的连通性。命题 1.3 表明, 若一个问题在原论域 X 中有解(是连通的), 在适当的粗粒度论域 $[X]$ 上也有解。反之, 若粗粒度论域上无解, 则原问题必无解(不连通)。这是一个很有用的性质。

举例来说, 假设我们要规划一个室内机器人的运动路径。机器人从房间甲出发, 中间穿过许多不同的房间, 最后到房间乙去取某件东西。机器人的任务是自动寻找一条通路。如果房间内部以及各房间之间的通路很复杂, 机器人若一开始就考虑所有的房间细节, 那么规划的效率一定很低。假如把规划分为两步, 第一步先考虑房间之间是否有通路, 把没有通路的删去不考虑。第二步只对剩下的考虑其中的细节, 问题自然得到了简化。当我们把从房间甲到房间乙不存在通路(即无解)的房间删去时, 实际上运用了命题 1.3 的性质。

2. $(X, \mathcal{T})$ 是半序空间

设 $(X, \mathcal{T})$ 是半序空间, 即在 X 的部份元素上建立如下的关系 $<$, 满足

(1) $x < y$ 且 $y < x \Rightarrow x = y$

(2) $x < y, y < z \Rightarrow x < z$

(若条件(1)不成立, 则称 $(X, \mathcal{T})$ 是拟半序空间)。

为了使不同粒度之间建立一定的联系,希望在 $[X]$ 中引入的 $[\mathcal{T}]$ 也是半序,即 $([X], [\mathcal{T}])$ 也是一半序空间。而且希望当 $x < y \Rightarrow [x] < [y]$, 即具有保序性。

为了达到上述要求,需要分以下几步走:

(1) 将 $[X, \mathcal{T}]$ 化作某种相应的拓扑;

(2) 引入商拓扑空间 $([X], [\mathcal{T}])$;

(3) 再由 $([X], [\mathcal{T}])$ 导出相应的半序,同时证明在一定的条件下的确具有保序性质。

设 $(X, \mathcal{T})$ 是半序集,对 $\forall x \in X$, 定义集合

$$u(x) = \{y | x < y, y \in X\}$$

令 $B = \{u(x) | x \in X\}$, 称以 B 为拓扑基的拓扑 $\mathcal{T}_T$ 为 X 的右序拓扑,记为 $(X, \mathcal{T}_T)$ 。这样,我们就将一个半序集变为对应的拓扑空间。

设 $[X]$ 是 X 的商集,记对应于 $(X, \mathcal{T}_T)$ 的商拓扑空间为 $([X], [\mathcal{T}_T])$ 。

右序拓扑有一个重要性质,在下面讨论半序集时经常用到。现介绍如下。

性质 1.1 设 $(X, \mathcal{T})$ 是一半序集, $\mathcal{T}_T$ 是由 $\mathcal{T}$ 诱导出的右序拓扑,则 $\forall x \in X$, 存在有包含 x 的最小开集 $u(x)$, 其中 $(x) \in \mathcal{T}_T$ 。

反之,若一个满足 T_0 分离公理的拓扑 $\mathcal{T}$, $\forall x \in X$, 均存在有一个最小开集 $u(x) \in \mathcal{T}$, 则按下面方法可以诱导出 X 中的一个半序 $\mathcal{T}$, 且 $\mathcal{T}$ 恰好是 $\mathcal{T}_T$ 对应的右序拓扑。

即 $\mathcal{T}_T: x, y \in X, x < y \Leftrightarrow y \in u(x)$, 其中 $u(x)$ 是包含 x 的最小开集。

注: 拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$, 若满足 $\forall x, y \in X$, 或存在 x 的邻域 $u(x)$, 使得 $y \notin u(x)$, 或存在 y 的邻域 $u(y)$ 使得 $x \notin u(y)$, 则称 $(X, \mathcal{T})$ 满足 T_0 分离公理。

定义 1.10 设 $(X, \mathcal{T})$ 是一拓扑空间, 用 $\mathcal{T}$ 定义如下的“ $<$ ”关系:

对 $x, y \in X, x < y \iff \forall u(x), \text{有 } y \in u(x), \text{其中 } u(x) \text{ 表示 } x \text{ 的开邻域}.$

由上述定义的 $<$ 关系满足传递性, 但一般未必能满足 $x < y, y < x \Rightarrow x = y$.

定义 1.11 设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间, 由定义 1.10 定义的关系 $<$ 满足 $x < y, y < x \Rightarrow x = y$, 则称拓扑 $\mathcal{T}$ 与 $<$ 是相容的.

若关系 $<$ 与 $(X, \mathcal{T})$ 的拓扑 $\mathcal{T}$ 是相容的, 则 $<$ 是半序, 且 X 在关系 $<$ 下成一半序集, 记为 $(X, \mathcal{T})_s$, 它是 $(X, \mathcal{T})$ 拓扑空间对应的半序集, 在不发生混淆的地方也简记为 $(X, \mathcal{T})$.

设商拓扑空间 $([X], [\mathcal{T}_T])$ 的 $[\mathcal{T}_T]$ 与由定义 1.10 定义的 $<$ 关系是相容的, 简称 R 是相容的, 则 $([X], [\mathcal{T}_T])_s$ 在 $<$ 关系下是半序集, 记为 $([X], [\mathcal{T}])$. 称这个半序集是由半序集 $(X, \mathcal{T})$ 导出的商结构, 这个商结构就是我们所需要的.

[例 1.9] 设半序集 $(X, \mathcal{T})$ 如

图 1.5 所示, 设等价关系 $R_1: a_1 = \{1, 3\}, a_2 = \{2\}, a_3 = \{4, 5\}$. 问在商空间 $[X]_1$ 上是否有商半序, 若存在, 则求出此商半序.

解:

(1) 求由 $\mathcal{T}$ 诱导的右序拓扑

$\mathcal{T}_T$

$$u(1) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$u(2) = \{2, 5\}$$

$$u(3) = \{3, 4, 5\}$$

$$u(4) = \{4, 5\}$$

$$u(5) = \{5\}$$

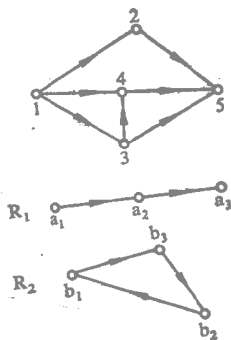


图 1.5 R 的相容性图