

第 1 章 绪 论

第 1 节 目的与意义

到目前为止,在岩土稳定性分析的工程实践中,几乎没有例外地都采用极限平衡法。对于边坡一般采用条分法,条分法是 1916 年由瑞典人彼德莱提出的,以后经过费伦纽斯、泰勒等人的不断改进,他们假定岩土边坡稳定性问题是平面应变问题,滑裂面是个圆柱面,计算中不考虑土条之间的作用力。随着岩土力学学科的不断发 展,也有不少学者致力于条分法的改进。他们的努力大致有两个方面:其一是着重探索最危险滑弧位置的规律,制作数表、曲线,以减少计算工作量;其二是 对基本假定作些修改和补充,提出新的计算方法,使之更加符合实际情况。其中毕肖普等提出的关于安全系数定义的改变,对条分法的发展起到了非常重要的作用。跟一般建筑材料的强度安全系数相似,毕肖普等将边坡稳定安全系数 F_s 定义为沿整个滑移面的抗剪强度 s 与实际产生的剪应力 τ 之比。这不仅使安全系数的物理意义更加明确,而且使用范围更广泛,为以后非圆弧滑移分析及岩土条分界面上条间力的各种考虑方式提供了有利条件。

条分法迄今已有 70 年的历史,中间经过不少学者的研究和改进,计算方法已日趋完善,其基本出发点都是一样的就是假定岩土是理想塑性材料把土条作为一个刚体按极限平衡的原则进行受力分析,完全不考虑土体本身的应力应变关系。各种方法最大的不同之处仅仅在于对相邻岩土条之间的内力作不同假定,也就是如何增加已知条件使超静定问题变成静定问题。这些假定的物理意义不一样,所能满足的平衡条件也不相同。

条分法一般只能用于二维边坡稳定性分析,很少有人用于三维边坡的稳定性分析。而实际边坡由于地形的变化及材料性质的变化,大多属于三维边坡,只是目前的计算手段不便于按三维问题来处理,而近似地简化成二维边坡问题来处理,由此带来的计算误差没有办法估计,也很少有人去研究此问题。因此,很有必要对三维边坡稳定性的分析方法进行研究。

建立在极限平衡理论基础上的边坡稳定性分析方法,经过 70 多年的发展,已积累了丰富的使用经验近 10 年随着电算技术的进步,在计算方法上有了不少突破。但由于方法本身没有很好地考虑岩土内部应力应变关系,所求出的岩土条间内力和滑移面底部反力当然不能代表岩土在产生滑移变形时真实存在的力,根据这些无法分析稳定破坏的发生和发展过程,更无法考虑局部变形对边坡稳定性的影响。而实践经验表明,稳定和变形有着相当密切的关系,一个土坡在发生整体稳定破坏之前,往往伴随着相当大的垂直沉降和侧向变形。

岩土材料是一种应力应变关系很复杂的松散或块状材料,即使承受很小的外力,也表现出非线性性质。在较大的外力作用下,不仅会表现材料非线性,而且会表现几何非线性,如大位移、大应变等,甚至还 存在流变性质。如此复杂的岩土材料,采用简单的极限平衡法分析岩土问题的稳定性,其结果的可信度就可想而知了。

为此利用有限元法考虑到岩土的非线性本构关系求出每一计算单元的应力及变形,根

据不同的强度指标确定破坏区的位置及破坏范围的扩展情况，并设法将局部破坏与整体破坏联系起来，求得合适的临界滑裂面位置，再根据极限平衡求整体稳定性安全系数。这是一桩很有意义的工作。近 10 年来国内外都有人从事这方面的研究，但还没有得到系统的、有实用价值的结果。当然，如果利用有限元或别的方法对边坡进行透彻的分析，求出在各种工作状态下岩土内部的应力分布状况，然后确定一个破坏标准，以此衡量边坡的安全程度，这就完全脱离了极限平稳这个范畴，将为边坡稳定分析开辟一个新的求解途径。

弹塑性有限元法是一种通用成熟的数值分析方法，应用于各行各业，它不仅能考虑材料性质的非线性，而且能够考虑材料的几何非线性，允许考虑材料的复杂应力应变关系及应力平衡条件。只要单元划分得足够密，其分析结果的精度是可以满足要求的，因此，用弹塑性有限元法来求解岩土工程问题是一个很好的办法。

现在国外大型结构有限元分析软件有很多，如 SAP95、ASKA、NASTRAN 等。此类程序是针对结构问题开发出来的，没有岩土材料的弹塑性模型，所以，不能很好地适应具有复杂应力应变关系的岩土材料。国内也有一些弹塑性有限元程序，但这些程序都是根据具体需要编制出来的，适用范围有限，特别是前后处理程序编制得不完善，甚至没有前后处理程序。

当前国外的有限元程序，其功能在不断地改进，在国内使用领域很广，并在不断地扩大。而国内的弹塑性有限元程序很难推广使用，因其大多是根据所遇到的具体问题而开发、修改、研制出自己的弹塑性有限元程序，并没有商品化，这就阻碍了国内岩土弹塑性有限元程序的发展，再过几十年，很有可能大家都使用国外的有限元软件，无人去开发适合于中国国情的弹塑性有限元软件。这样做可以节省一些人力和物力，但也会带来一些问题，如使用国外的软件分析实际问题，其可靠性如何，将很难验证，因为软件的错误是很难发现的，而且可以人为地控制。因此，我认为尽管国外有很好的有限元软件，还是应该开发出自己的弹塑性有限元软件，对研究和实际应用都是有必要，且具有实际意义。

本书是在较为成熟和通用的 ADINA 程序基础上编写的，由于 ADINA 程序原来是在 VAX 机工作站上运行，改用在微机上使用后，其前后处理程序不能使用。而有限元程序前后处理程序是弹塑性有限元程序的关键部分，有限元的数据输入量大，特别是单元及单元节点数据量相当大，人工进行单元划分和形成单元及节点数据，要保证其不出错误几乎是不可能，以致于一般研究人员很难使用弹塑性有限元程序分析实际工程问题。因此，本书将研制弹塑性有限元程序前后处理程序并将 FORTRAN 90 加油站中强大的图形功能用于前后处理程序。ADINA 程序原来是用 FORTRAN66 版的语法规则进行编写的，改成微机版本用 FORTRAN90 加油站编译要做许多修改才能正常运行。加上 ADINA 程序是一个较大的软件，其源程序大约有 6 万条语句，读懂其源程序就有很大的难度。因此作者经过几年的努力对 ADINA 程序的原理和结构进行研究，修正了程序中的部分语法错误，并将岩土现有的部分弹塑性模型加入到程序中去，使其更加适合于岩土弹塑性有限元分析。

弹塑性有限元能对岩土工程问题进行应力、应变及位移分析，能得出在荷载作用下实际问题的破坏范围，但无法判别其稳定程度，因为岩土材料某点破坏则意味着整个岩土边坡或地基失去稳定，并不意味着其不能再承受荷载。实际上岩土某点达到破坏状态时，距整个岩土工程整体达到失稳滑动破坏状态还有相当一段加载过程。因此，就存在一个如何建立岩土工程整体失稳破坏或滑动的统一标准问题，最好的方法是利用弹塑性有限元分析结果建立岩土工程问题的整体滑动失稳破坏标准。

岩土破坏形式主要是剪切破坏，岩土中某面上产生剪切滑动破坏时，面上剪应力达到其抗剪强度；岩土边坡整体破坏时，将形成与地面连通的连续滑移面。当然岩土的抗拉强度很低时，很容易产生开裂破坏，但一般岩土承受压应力作用，很少出现拉裂破坏。因此，岩土破坏与滑移面的形状及形成有较大的关系，在建立岩土整体破坏标准时，必须考虑滑移面的形状及位置。

过去对于平面问题，常假定滑移面为圆弧、对数螺线或折线等形状，具体位置由稳定安全系数取最小值的条件确定。对于空间问题，很少有人去研究，一般都是按平面问题近似处理，如此处理必然会带来一定的误差，其误差的大小也没有好的办法去估计，因此，本书将利用有限元对三维边坡的空间滑移面进行研究。

岩土的弹塑性应力应变关系问题是岩土界的难点问题，是岩土弹塑性有限元分析的基础，也是岩土界的关键问题和热点问题。此问题经过三四十年的研究和发展，许多研究人员提出了许多的岩土本构模型，如 Duncan - Cheng 模型、剑桥模型、黄文熙弹塑性模型、沈珠江弹塑性模型、俞茂宏的双剪统一强度准则等。如此之多的岩土本构模型，选择哪一种模型较为合适，确实令人眼花缭乱，无从下手，因为各种岩土模型都有不足之处，与岩土的实际应力应变关系之间存在较大的差异。因此，目前对岩土弹塑性本构关系的研究，主要是对已有的岩土模型进行验证、分析和综合，将非线性弹性模型与弹塑性模型有机地结合起来，形成岩土弹塑性模量矩阵。

岩土弹塑性模型有 3 个重要问题需要研究，一是破坏屈服面的构造，此问题已基本上解决，可以用双剪统一强度准则表达；二是帽盖部分的屈服面，该屈服面的大小随岩土塑性变形大小而变化，此问题较为复杂，暂无统一的帽盖屈服面表达式；三是加载与卸载的回弹模量，岩土加载与卸载过程并非弹性过程，其弹性常数也是变化的，此方面的问题被研究得较少，一般都是认为回弹模量是不变的，因此，本书将对岩土卸荷和加载弹性常数的变化规律进行研究。

利用弹塑性有限元分析岩土边坡的稳定性，建立岩土边坡整体滑动破坏标准是很重要的。一般在边坡内产生了与地面连通的滑移面，即认为岩土边坡将发生整体滑移破坏，而不是看个别点是否达到破坏状态。滑移面的产生是边坡稳定性分析的关键性问题，因此，本书将针对岩土滑移面或潜在滑移面进行研究，提出了与传统滑移线理论相似的潜在滑移线理论。该理论不仅可以用于二维平面问题，而且可用于三维空间问题；该理论是利用弹塑性有限元分析的应力结果进一步分析岩土滑移面，从根本上解决岩土滑移面确定问题。

传统的滑移线理论，也能确定平面应变问题的滑移线，但它只适合于摩尔 - 库仑强度准则及平面应变问题，不能用于确定空间滑移面，它确定的是岩土破坏面，即岩土破坏时的滑移面，岩土接近破坏时，它无法确定潜在滑移面，对于实际问题，往往要了解其潜在滑移面和稳定性问题；传统的滑移线是假定岩土所有点均达到破坏和为刚塑性材料，不考虑岩土的变形过程，只考虑静力平衡微分方程及强度准则。

俞茂宏教授提出的统一平面应变滑移线理论，在推导中考虑了中间主应力对强度准则的影响，文中认为任何强度准则都可用于传统的滑移线理论，但俞茂宏教授对中间主应力大小做了硬性假定：

$$\sigma_2 = \frac{m}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (1-1)$$

式中 m 为经验系数。

此假定可能导致中间主应力 σ_2 大于 σ_1 或小于 σ_3 的矛盾情况出现, 实际中间主应力的太小还应与材料性质有关。岩土破坏时, 假定中间主应力为不同的形式则将出现不同的结果, 因此除了摩尔 - 库仑强度准则以外, 其他强度准则均不能用于传统的滑移线理论。要近似地用于传统的滑移线理论, 必须修改中间主应力的假定, 为此, 作者提出了中间主应力的合理表达式, 并将各种强度准则近似地用于传统的滑移线理论。

本书针对传统滑移线理论存在的问题, 经过理论推导和证明, 提出了确定岩土潜在滑移面 (包括真实破坏面) 的方法, 因为该方法与传统滑移理论有相似之处, 因此称为潜在滑移面理论。该理论不仅可以确定二维潜在滑移线, 而且可以确定空间滑移面, 是确定岩土潜在滑移面的通用方法。潜在滑移面理论是根据弹塑性有限元的应力分析结果, 用数值积分方法确定岩土潜在滑移面。当岩土应力达到破坏状态时, 确定的潜在滑移面将转为真正的滑移面, 真正滑移面是一种特殊的潜在滑移面。

岩土材料性质不连续变化, 如不同材料性质岩土介质分界面处, 材料性质会出现不连续变化, 材料性质的不连续变化, 给潜在滑移面确定增加很大的难度。而不同岩土材料的实际分界面又并不明显, 因此一般可假定存在一个过渡区, 使得材料性质通过过渡区连续变化, 只是过渡区的厚度较小而已。为此, 对于岩土材料性质不连续变化的情况, 本书采用过渡薄层的方法进行连续化处理, 来近似地模拟实际岩土材料的分层性, 模拟软弱夹层。

本书根据作者提出的潜在滑移线理论, 研究二维及三维潜在滑移面的确定方法, 研制了相应的软件, 并对工程实例进行了大量的计算分析, 以验证本书所提出的潜在滑移面理论的正确性、有效性和实用性。

摩尔 - 库仑强度准则由面上抗剪强度表示为:

$$S = \sigma \tan \varphi + C \quad (1-2)$$

由主应力表示为:

$$\sigma = \sigma_3 \tan^2(45^\circ + \varphi/2) + 2c \cot(45^\circ + \varphi/2) \quad (1-3)$$

而其他强度准则往往直接由主应力表示, 其面上抗剪强度表达式是不知道的, 此问题也很少有人去研究。岩土破坏的主要形式是剪切破坏, 破坏时将出现滑移面, 滑移面上的剪应力等于面上抗剪强度。而面上抗剪强度表达式, 对滑移面确定和揭示岩土的真实强度准则有重要意义, 因此, 本书将对岩土面上抗剪强度表达形式进行理论研究。

第 2 节 国内外相关研究的现状

岩土的本构关系、强度、承载力、稳定性及滑移面等问题是岩土界的最热点问题, 也是最关键性的问题。过去, 弹塑性有限元没有普遍被大家所接受, 加上受计算机运行速度的限制, 人们主要侧重于对岩土工程问题的近似方法研究, 如岩土压力、边坡稳定性和地基承载力等近似计算方法研究, 提出了各种各样的近似计算公式, 但由于在推导公式时, 作了种种违背岩土静力平衡和应力应变关系的假定, 计算结果与实际相差较大。近几年来, 也有人试图用弹塑性有限元法分析岩土工程问题, 了解其应力、变形及破坏范围, 但对滑移面和稳定性评判标准研究很少, 特别是对空间滑移面和稳定性评判标准的研究未见有报导。

国内外岩土边坡稳定性分析方法, 可大致分为如下几类:

1. 条分法

边坡稳定性分析的条分法是 1916 年由瑞典人彼德森提出的，以后经过费伦纽斯、泰勒等人的不断改进，发展出各种各样的边坡稳定性分析方法。目前，一般设计人员仍采用条分法进行边坡稳定性分析，条分法是一种传统的边坡稳定性分析方法，在其他岩土稳定性问题中也有采用条分法求解的。

岩土是一种特殊的介质，具有松散、裂隙等特性，其应力应变关系较复杂，而且具有各向异性和随机性。过去，人们对岩土的力学性能及规律认识有限，为了回避岩土的复杂力学性能，不考虑岩土的应力应变关系，想从静力平衡角度研究岩土的稳定性。但岩土的稳定性必然与岩土的应力应变关系有关，因此，必须对岩土稳定性问题作一些近似假定，使其转化为静定问题，条分法就由此而产生。

边坡滑移破坏时，必然会产生一滑移面，滑移面上的剪应力等于其面上抗剪强度；边坡未滑移时，其稳定程度如何，就得进行边坡稳定性分析。因此，得假定边坡的潜在滑移面形状，如假定潜在滑移面的形状为圆弧、对数螺线等，但潜在滑移面上的法向应力分布未知。如果潜在滑移面的法向应力已知的话，则潜在滑移面的切向剪应力可根据法向应力、抗剪强度和抗剪安全系数确定。

潜在滑移面上法向应力分布的确定必须借助于条分法，严格地讲应该由岩土的弹塑性应力应变关系确定。将潜在滑移面以上岩土竖向分为许多条块，假定条块之间的作用力大小、方向或作用点高度相等，然后利用条块的静力平衡条件确定条块底部潜在滑移面上的法向应力，达到确定潜在滑移面上的法向应力的目的，进而确定整个滑移面上的剪应力，使边坡稳定性分析问题转化为静定问题。

问题是如果假定条块之间的作用力不同，将导致不同结果。在相同的边界条件和力学参数情况下，采用不同的方法计算边坡稳定性安全系数的差值可达 20% ~ 30%，而岩土的力学参数的变异性也很大，因此，实际上条分法的计算精度很低。

(1) 瑞典圆弧条分法。假定条块之间没有作用力，然后，根据条块的静力平衡条件确定条块底部潜在滑移面上的作用力，而实际上它不满足平衡条件，由此带来的误差可达 10% ~ 20%。

(2) 毕肖普法。假定条块之间的作用力方向水平，忽略条块之间的切向力，由条块的竖向平衡条件确定潜在滑移面上的法向力。此方法较瑞典圆弧滑移法有所改进，考虑了条块之间的作用力，只是对方向作了硬性规定，实际上也不满足静力平衡条件。

(3) 简布的普遍条分法。它假定条块之间作用力的作用高度，适合于已知潜在滑移面计算其稳定性的情况。

(4) 斯宾塞法。假定条块之间作用力与水平线成 θ 角， θ 角及边坡稳定性安全系数 F_s 由条块的力矩和力的平衡条件确定，该方法满足力矩和力的平衡条件，但要假定条块之间的作用力方向相同。

(5) 摩根斯坦 - 普赖斯法。假定两相邻条块法向条间力和切向条间力之间存在一个对水平方向坐标的函数关系，实际上是假定条块之间作用力方向随水平坐标变化，变化的函数关系人为地确定，然后再由力矩和力的平衡条件确定潜在滑移面上的法向应力及边坡稳定安全系数。

2. 分段对数螺线法

作者曾根据变分法原理，推导出分层岩土边坡的潜在滑移面形状为分段对数螺线。由于分段对数螺线滑移面上的法向应力与切向摩擦应力的合力对分段对数螺线极点不产生力矩，只有滑移面上的粘聚力产生力矩。对分段对数螺线极点取力矩平衡求边坡稳定安全系数时，力矩与潜在滑移面上的法向应力无关，因此，不必用条分法确定潜在滑移面上的法向应力，不必假定条块之间作用力的大小、方向或作用点位置，并且满足整体静力平衡条件。此方法比条分法又进了一大步，但也没有考虑岩土的实际应力应变关系。

3. 有限元法

有限单元法可以得出计算范围内各点的位移和应力分布，提供了边坡分析的有用资料，但在工程上往往最关心边坡稳定性问题。目前根据有限单元法计算结果来评价岩土稳定性的方法主要有以下几种：

(1) 对计算范围内各单元或积分点的应力进行强度判别，凡其应力状态达到拉裂破坏或剪切破坏的部位称之为破损区，根据破损区的分布位置和范围大小可以对岩土工程的稳定性作出评价。这种方法概念清晰、明确，不足的地方是它只给出了各个部位的强度检验结果，而给不出反映工程整体稳定性的指标。对于破损区也可以有不同的理解，因为破损了的岩土还可以有一定的承载能力，它还没有与通常的岩土工程的“失稳”等概念建立直接的联系。

(2) 引入各部位抗剪安全系数的概念，如对平面应变问题用摩尔 - 库仑强度准则，面上的抗剪安全系数为：

$$F_s = \frac{S}{\tau} \quad (1-4)$$

式中 τ ——相应于潜在滑移面上的剪应力；

S ——相应于潜在滑移面上的抗剪强度。

这样 $F_s < 1$ 的范围相当于上述的剪切破损区，这里的 F_s 也只能反映该部位的应力与强度的比较情况，而不反映工程的整体稳定性。

(3) 在有限元应力分析的基础上分析边坡沿各可能潜在滑移面的抗剪安全系数，但潜在滑移面只能假定其为圆弧或其他形状，相应于最小安全系数 K_{\min} 的面即是最危险的潜在滑移面 K_{\min} 可以作为反映该边坡稳定程度的指标。

(4) 采用不断改变岩土材料的强度准则或破坏屈服面大小使岩土发生失稳破坏，来获取岩土边坡的稳定性安全系数，摩尔 - 库仑强度准则能求得边坡稳定性安全系数。但此方法要改变岩土强度参数，也就是说要改变岩土材料的应力应变关系，因此，求解出的应力和位移将不是岩土结构的实际应力和位移。对于几千上万个结点的岩土结构问题，进行一次弹塑性有限元分析用奔腾 II 计算机也得用上几个小时，更何况不断改变岩土材料参数重新进行弹塑性有限元计算，所需机时可想而知了。其次，该方法只适合于摩尔 - 库仑强度准则，其他强度准则不适应，对潜在滑移面也没有研究，同时假定岩土结构各点的抗剪安全系数完全相同，与实际情况不符。

20 世纪 50 年代 Drucker 和 Prager 把静力场和运动场结合起来并提出极值原理，建立了土体极限分析理论，为土体极限平衡课题求解开辟了新的途径。W. F. Chen (1975) 发表的专著《极限分析和土的塑性力学》，进一步阐明了极限分析理论在土工问题中的应用。从理论上

讲,由平衡条件、屈服条件、流动法则以及相应的边界条件足以确定应力场、速度场和破坏荷载,但由于实际问题的复杂性,要求全面满足静力方程、运动方程和相应边界条件的解答几乎不可能。为此,人们致力于开辟另一种求解途径,即引入变分原理,通过求极值方法求问题的解,这对上限原理的研究和应用起到了较大的促进作用。下限原理的求解有赖于一个好的应力场,然而,在实际问题中构造好的应力场十分困难,故下限原理的应用一直难以推广。随着现代计算机技术的发展和有限单元法的推广应用,近年来已有学者探索运用有限元法来求解极限平衡课题的下限解。

运用有限单元法求解的基本思路是:对土工结构进行有限元离散,并构造出相应的单元应力模式,根据下限原理建立满足平衡方程、屈服条件和应力边界条件的数学模型,引入数学规划方法寻求问题的下限解。计算结果不仅有问题的下限解,还有结构内部相应的应力场。但该方法没有考虑岩土的实际应力应变关系,假定岩土为刚塑性体,以单元节点应力作为未知量进行优化求解应力场。这种方法将岩土材料强度准则作为约束条件,要求应力不超过强度准则,可以在破坏屈服以内。此方法比传统的滑移线理论进了一大步,因为传统的滑移线假定岩土所有点都满足破坏条件和处于破坏状态,与实际不符。但此方法要对多变量进行优化求下限解,求解难度较大,也难以保证每次寻找到极小值,而且只适合于摩尔-库仑强度准则不适合其他强度准则和空间问题。

4. 传统的滑移线理论

传统的滑移线理论用于确定平面滑移线,它只适合于摩尔-库仑强度准则和平面应变问题,不能用于空间问题和其他强度准则,也不能用于边坡稳定性分析问题,并且假定为刚塑性和所有点都达到破坏,没有考虑岩土的实际应力应变关系。最难办的是无统一的滑移线求解程序,只能针对具体问题编制相应的程序进行数值求解。

第 3 节 研究内容

边坡稳定性的极限平衡法和极限分析方法已经相当完善,只要满足总体平衡的几个条件,不管做了什么样的补充假定,其计算结果都比较接近,但不满足平衡条件的方法,其计算结果相差较大。弹塑性有限元是分析岩土工程问题的一个有效方法,具有很好的应用前景,但弹塑性有限元在岩土滑移面及稳定性中应用还不成熟,特别是对空间滑移情况的研究非常有限。本书旨在研究岩土弹塑性本构模型的选取、弹塑性有限元的前后处理程序、适合岩土的非线性弹塑性有限元程序(包括大位移)、二维和三维岩土实体的潜在滑移面及稳定性评判标准和岩土面上抗剪强度通用表达式等,其主要研究内容如下:

1. 通过对岩土的弹塑性模型和非线性弹性模型进行综合分析,从破坏屈服面,加载塑性硬化、软化屈服面和加卸载弹性模量的变化规律 3 个方面选取和组合弹塑性模型,并对岩土材料加卸载弹性常数的变化规律进行研究

2. 研制岩土弹塑性有限元程序前处理程序

有限元前处理程序,对缩短实际工程问题的有限元分析时间,减少数据错误,起到了至关重要的作用。本书研制的有限元前处理程序包含 5 大部分:单元网格的自动划分、节点自动编号、节点编号的带宽优化、节点重新编号及形成单元及节点数据、单元及潜在滑移面的图形显

示。

3. 研制三维岩土实体弹塑性有限元程序

岩土工程问题适合于用弹塑性有限元分析，作者经过几年的努力，在较为成熟和通用的 ADINA 程序的基础上，经过对程序的原理和结构进行分析，引入岩土的弹塑性模型，考虑材料和几何非线性，开发出适合于岩土材料且较为通用的弹塑性有限元程序，并将 FORTRAN90 加油站的 OpenGL 三维图形功能直接用于中间结果的显示。

4. 岩土面上抗剪强度的研究

岩土面上抗剪强度对滑移面的确定和揭示岩土强度准则有重要的作用，因此，本书将对各种强度准则的面上抗剪强度表达式进行研究，通过理论推导得出了岩土面上抗剪强度通用表达式。

5. 各种强度准则的滑移线理论研究

传统的滑移线理论在岩土工程某些问题分析中仍起到了重要的作用，因此对各种强度准则的滑移线，本书提出了统一的求解方法。

6. 岩土的二维及三维潜在滑移线理论

岩土某点被剪切破坏时，过该点必然会产生两组滑移面，将岩土各点的滑移面光滑连接起来即可得两族滑移面。同样，岩土某点未被破坏时，过该点存在两组最危险的潜在滑移面，将各点的潜在滑移面光滑地连接起来，即可得两族潜在滑移面。在岩土稳定性分析中，往往需要求解潜在滑移面，因此，本书将对二维及三维潜在滑移面的求解进行研究，给出了各种岩土强度准则的潜在滑移面求解方法。潜在滑移面是根据弹塑性有限元的应力分析结果进行求解的，充分考虑了岩土的实际应力应变关系及加载过程等因素的影响。

7. 岩土边坡整体滑移失稳破坏标准的研究

由弹塑性有限元分析结果，可以了解岩土破坏的范围，变形大小等，但岩土边坡的稳定程度如何无统一的评判标准。岩土某个点的破坏，并不意味着整个岩土结构工程的承载力丧失和滑动失稳破坏，因此，本书想结合弹塑性有限分析结果和潜在滑移面理论，对岩土整体稳定破坏标准进行研究。

8. 研制二维及三维岩土边坡潜在滑移面及稳定性安全系数求解程序

二维及三维边坡的潜在滑移面及稳定性安全系数的求解，是根据弹塑性有限元分析结果，构造连续的应力场，求解主应力方向。然后由主应力方向与潜在滑移面方向的关系，确定潜在滑移面的方向，数值积分求解出潜在滑移面。应力场是由单元结点应力插值获得，整体坐标也是通过单元结点坐标插值求解的。已知局部坐标求整体坐标及应力比较容易，但已知整体坐标反求局部坐标非常困难，因此，潜在滑移面求解需转换到局部坐标系里进行。本书将对潜在滑移面的求解问题进行理论研究，并研制出相应的程序用于求解岩土空间潜在滑移面。

9. 工程实例分析

通过算例分析和工程实例的对比分析，验证二维及三维岩土潜在滑移线理论、岩土弹塑性有限元程序、岩土边坡潜在滑移面及稳定性安全系数求解程序等的有效性和正确性。

第 2 章 岩石的弹塑性应力应变关系

第 1 节 概 述

岩土材料的本构模型问题，一直是岩土界的热点问题。近二三十年来，由于近代土力学和岩石力学的进展及计算技术的进步，使得岩土本构模型的研究获得了迅速发展。当今正处于百花齐放，方兴未艾的阶段，不少学者做了大量的研究工作，提出了许多模型。在这些模型中，一部分属于岩土非线性弹性模型，另一部分属于岩土弹塑性模型。

岩土的本构关系不是凭空设想的，而是在整理分析试验结果的基础上提出来的，常用压缩仪、三轴仪、平面应变仪、真三轴仪等进行试验来获取岩土材料的应力应变关系。通过试验得到的应力应变关系反映了该土体的变形特性，但试验总是在某种简化条件下进行的，存在一定的局限性。在边坡、地基、土坝等实际问题中，土体各点的受力情况及变形历史等千变万化，无法在试验中模拟所有变化，因此，有必要在试验基础上提出某种数学模型，将其特定条件下的试验结果推广到一般情况，这种数学模型叫做本构模型。

岩土的本构模型是实际工程有限元分析的关键问题，有限元分析成果的好坏很大程度上取决于岩土的本构模型及参数的选取。岩土材料即使在很小的应力作用下，也可能表现出材料非线性，在较大的应力作用下还会表现出几何非线性，即大位移、大应变特性。因此在岩土工程有限元分析中，应考虑岩土的材料及几何非线性，只有考虑到岩石的这些非线性特性才有可能得出较正确且切合实际的结果。

常用的非线性弹性模型有两类。第一类是以 E （弹性模量）和 ν （泊松比）两个弹性常数表达的称做 $E-\nu$ 非线性弹性模型，这类模型以 Duncan - Chang 模型为代表。第二类是以 K （体积变形模量）和 G （剪切模量）两个弹性常数表达的称作 $K-G$ 非线性弹性模型，它以 Domaschuk 模型为代表。我国沈珠江教授对 Domaschuk 模型加以改进和推广，既能考虑硬化岩土，也能考虑软化岩土，还能考虑剪胀现象。由于非线性弹性模型参数少，较为简单，积累了大量试验资料，在岩土界应用较广，但实际岩土材料并非弹性材料，特别是岩土接近破坏状态时，用非线性弹性模型分析，可能会得到超出破坏屈服面的应力，与实际情况相矛盾。国内外提出的岩土弹塑性模型很多，根据弹塑性模型的形成可以分为两类：一类是从具体试验资料中直接确定屈服函数、加工硬化定律等经验公式，如 Lade - Duncan 模型，清华大学建议的模型等。另一类从能量公式出发，推导出其屈服函数，并选出加工硬化定律，从而建立应力应变关系，如著名的剑桥模型。

从过去 30 多年来对岩土弹塑性本构模型的研究来看，主要是针对破坏准则和屈服函数的研究，基本上是套用金属材料的弹塑性基本理论来处理岩石的弹塑性问题。沈珠江教授对岩土材料的破坏准则及屈服函数表达式进行了总结，认为目前已有的破坏准则及屈服函数表达式已经包括所有可能的情况，新建议的屈服函数及破坏准则不会有重大的实际意义，有关这方面的研究已经可以划上句号。俞茂宏教授提出的双剪统一破坏准则，实际上是一个比较简单

的线性破坏准则，考虑了中间主应力对岩土强度的影响，能较好地逼近各种可能的破坏准则，因而称其为统一破坏准则。作者认为关于岩土破坏准则和屈服函数的理论研究，在目前的试验手段和水平的情况下，不可能有很大的突破，而关键的问题是如何正确选用已有的破坏准则和屈服函数更切合于实际，发展真正适合于岩土材料的弹塑性理论。

岩土材料在加载和卸载过程中，其弹性模量和泊松比有较大的变化，而不像金属材料那样认为是不变的常数，大量的岩土材料试验证明岩土材料的回弹模量及泊松比与围压大小有关，此问题即弹塑性耦合问题。岩土材料的弹塑性耦合问题是一个非常复杂的问题，真正地用到实际岩土工程有限元分析中去是很困难的，但岩土材料又确实存在弹塑性耦合问题，不考虑此问题有可能得出不符合实际的分析结果，为此，使用比较简单的方法将弹塑性耦合问题考虑进去，这样一来使得复杂问题简单化，同时更切合于实际。

在岩土材料的弹塑性有限元分析中，考虑材料在加载与卸载过程中回弹常数的非线性变化，作者将非线性弹性模型与弹塑性模型有机地结合起来，将非线性弹性模型的试验成果用于弹塑性模型。对于岩土材料的强度准则及屈服面的选取，岩土材料的屈服面一般由两部分组成，一部分是锥体形成的破坏屈服面，另一部分是帽盖部分的屈服面。锥体形成的破坏屈服面可选用 Drucker - Prager 模型、摩尔 - 库仑强度准则或双剪统一强度准则，而帽盖部分屈服面随岩土材料性质的不同而变化较大，暂无统一的表达式。

第 2 节 非线性弹性模型

非线性弹性模型可以利用常规三轴剪切试验确定模型参数，相对来说比较简单，是国内外广泛采用的岩土模型，积累了大量的试验成果。

1. 切线弹性模量 E_t

Duncan 等人应用常规三轴压缩试验所得的 $\sigma_d - \varepsilon_1$ (轴向应变) - 组试验曲线 ($\sigma_3 =$ 常数) 找出其共同的数学公式，并以这一数学公式导出切线弹性模量 E_t 计算公式，同时结合试验所得的体积应变 ε_v 与 ε_1 的关系曲线，导出泊松比 ν_t ，并以此作为计算依据。这个模型称为 Duncan - Chang 模型或 $E - \nu$ 模型，是国内外应用很广的一种实用岩土模型。但在应用中也发现 ν_t 公式不够完善，1980 年 Duncan 和 Wong 等人将此式抛弃，并将 ν_t 改用体积压缩模量 K_t ，即采用 $E - K$ 模型。

R. L. Kondner 建议采用下列双曲线来代表 $\sigma_d - \varepsilon_1$ 试验曲线，即当 $\sigma_3 =$ 常数时，如图 2-1。

$$\sigma_d = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1} \quad (2-1)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{a\sigma_d}{1 - b\sigma_d} = f_1(\sigma_d, \sigma_3) \quad (2-2)$$

式中 a, b 为实验常数，由下述可见，它们都是 σ_3 的函数。

将图 2-1(a) 实验曲线改用图 2-1(b) 坐标绘制，立即可得 a, b 两个实验常数，当应变很小时，由式 (2-1) 得出的初始弹性模量为：

$$E_i = \left(\frac{\sigma_d}{\varepsilon_1} \right)_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} = \frac{1}{a} \quad (2-3)$$

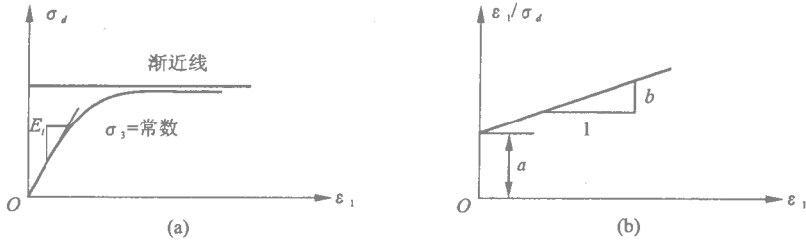


图 2-1 三轴压缩试验曲线

a 即为初始弹性模量的倒数，而当应变很大时，由式 (2-1) 得出应力的极限值，即有侧限抗压强度：

$$(\sigma_d)_{ult} = (\sigma_d)_{\epsilon_1 \rightarrow \infty} = \frac{1}{b} \quad (2-4)$$

方程 (2-4) 是这条应力应变曲线的渐近线，实际应力应变曲线在破坏时为侧限抗压强度 $(\sigma_d)_f$ 常达不到极限值 $(\sigma_d)_{ult}$ 两者之间有一比值 称为破坏比 R_f ，即：

$$R_f = \frac{(\sigma_d)_f}{(\sigma_d)_{ult}} = b(\sigma_d)_f \quad (2-5)$$

或

$$b = \frac{R_f}{(\sigma_d)_f} \quad (2-6)$$

一般 R_f 在 0.75~1.0 之间 并认为 R_f 与侧限压力 σ_3 无关，但从国内试验结果来看， R_f 并非常数，它随 σ_3 变化而变化，将其代入方程 (2-1) 可得：

$$\sigma_d = \frac{\epsilon_1}{\frac{1}{E_i} + \frac{\epsilon_1}{(\sigma_d)_f} R_f} \quad (2-7)$$

或

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_d}{E_i \left[1 - \frac{\sigma_d}{(\sigma_d)_f} R_f \right]} \quad (2-8)$$

试验时， σ_3 值的不同，试验曲线也将不同，但这些曲线都可用 (2-1) 式表示 只是其中 E_i 值随 σ_3 变化。根据试验结果分析，采用如下经验公式：

$$E_i = k P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \quad (2-9)$$

式中 P_a 为大气压， k, n 为试验常数，对不同土类， k 值可能小于 100 也可能大于 3500， n 值一般在 0.2~1.0 之间。

切线模量：

$$E_t = \frac{\partial \sigma_d}{\partial \epsilon_1} = \frac{1/E_i}{\frac{1}{E_i} + \frac{R_f \epsilon_1}{(\sigma_d)_f}} \quad (2-10)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_d}{E_i \left[1 - \frac{R_f(\sigma_1 - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \right]} \quad (2-11)$$

将此式代入式(2-10)得:

$$E_t = (1 - R_f S)^2 E_i \quad (2-12)$$

其中,

$$S = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} = \frac{\sigma_d}{(\sigma_d)_f} \quad (2-13)$$

根据莫尔-库仑破坏准则,有:

$$(\sigma_d)_f = \frac{2c \cdot \cos\varphi + 2\sigma_3 \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \quad (2-14)$$

将式(2-14)代入式(2-13)、(2-12)得:

$$E_t = \left[1 - \frac{R_f(1 - \sin\varphi)\sigma_d}{2c \cdot \cos\varphi + 2\sigma_3 \sin\varphi} \right]^2 E_i \quad (2-15)$$

2. 回弹模量

卸荷和重复加荷时弹性模量设为:

$$E_w = K_w P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \quad (2-16)$$

K_w 值也应通过试验测定,一般情况下 $K_w > K$, 上式说明岩土在卸荷和重复加荷时弹性模量并非常数,随 σ_3 变化。

在有限元计算中,什么情况下使用 E_w 难以准确规定,这实际上是一个屈服准则,无法像弹塑性模型的屈服准则那样严格,只能粗略地规定,常采用如下标准:当 $\sigma_1 - \sigma_3 < (\sigma_1 - \sigma_3)_0$, 且 $S < S_0$ 时,用 E_w , 否则用 E_t , 式中 $(\sigma_1 - \sigma_3)_0$ 为历史上曾经达到的最大应力, S_0 为历史上曾达到的最大应力水平。

Duncan 模型没有给出固结压力降低情况下弹性模量的确定方法,这是另一种性质的回弹,固结压力降低后为超固土,其弹性模量与先期固结压力有关。

3. 泊松比 ν_i

Duncan 假定 $\varepsilon_3 - \varepsilon_1$ 的关系曲线亦为双曲线:

$$\varepsilon_3 = \frac{h\varepsilon_1}{1 - D\varepsilon_1} = f_2(\sigma_d, \sigma_3) \quad (2-17)$$

$$h = G - F \lg(\sigma_3/P_a) \quad (2-18)$$

式中 D, G, F 都是试验常数,通常 F 值约 0.1 ~ 0.2, 故 $h = G$ 。

由式(2-17)、(2-18)可知 ε_1 是 σ_d 函数,所以 ε_3 也是 σ_d 函数。对式(2-17)微分得:

$$d\varepsilon_3 = \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_d} d\sigma_d + \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_3} d\sigma_3 \quad (2-19)$$

当 $\sigma_3 =$ 常数,得:

$$\nu_i = \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial f_2 / \partial \sigma_d}{\partial f_1 / \partial \sigma_d}$$

$$= \frac{G - F]g(\sigma_3/P_a)}{\left\{ 1 - \frac{D(\sigma_1 - \sigma_3)}{KP_a(\sigma_3/P_a)^n [1 - R_f(\sigma - \sigma_3)(1 - \sin\varphi)/(2c \cdot \cos\varphi + 2\sigma_3 \sin\varphi)]} \right\}^2} \quad (2-20)$$

其中 D 为试验常数 如果计算所得 v_i 值大于 $1/2$ 则可采用 $v_i = 0.49$ 计算, 因为式 (2-20) 的计算值常偏大。1980 年, Duncan 改用体积变形模量 K_v 计算参数:

$$K_v = \frac{dP}{d\varepsilon_v} = K_b P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^m \quad (2-21)$$

式中 K_b 及 m 为试验常数 大部分土的 m 在 $0.0 \sim 1.0$ 之间, m 值小于零表示随着围压 σ_3 增大, 体积变形模量减小, 这种超乎寻常的情况, 是由于高压作用下土颗粒结构被破坏所致。

随着 σ_3 值的改变 K_v 值有 10 倍左右的变化 当 $v_i \leq 0.49$ 时 K_v 值可以出现较高的值, $K_v = 17E_i$ 。

4. 非线性弹性模型存在的不足

非线性弹性模型用于增量计算时, 能反映应力路径对变形的影响。它通过回弹模量 E_w 与加载模量 E_i 的差别部分体现加载历史对变形的影响, 但它没有反映固结压力增加与降低的差别, 也没有反映加载和卸荷时 v 的差别, 没有考虑岩土剪胀和应力路径问题。

5. 弹性模量矩阵 $[D]$

对于非线性弹性模型, 其增量应力应变关系为:

$$\{d\sigma\} = [D] \{d\varepsilon\} \quad (2-22)$$

$$\{d\sigma\} = \{d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z, d\tau_{xy}, d\tau_{yz}, d\tau_{zx}\}^T \quad (2-23)$$

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon_x, d\varepsilon_y, d\varepsilon_z, d\gamma_{xy}, d\gamma_{yz}, d\gamma_{zx}\}^T \quad (2-24)$$

$$[D] = G \begin{bmatrix} \alpha & & & & & \\ \beta & \alpha & & & & \text{对 称} \\ \beta & \beta & \alpha & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2-26)$$

$$\alpha = \frac{K}{G} + \frac{4}{3} \quad \beta = \frac{K}{G} - \frac{2}{3} \quad (2-27)$$

第 3 节 弹塑性理论

塑性增量理论假定岩土应变分为可回复的弹性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^e$ 和造成永久变形的塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 两部分, 这两部分的总和就是总应变增量 $d\varepsilon_{ij}$, 即:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (2-28)$$

弹性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^e$ 可用式 (2-22) 计算 其中 E 和 ν 应该采用卸荷与重新加载应力应变曲

线部分的 E, ν 值。

塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 按塑性应变增量理论计算, 该理论包括 3 个部分的内容:

- (1) 关于屈服面理论 (Theory of yield surface);
- (2) 关于流动规则理论 (Theory of flow rule);
- (3) 关于加工硬化 (或软化) 定律理论 (Theory of strainhardening law)。

根据回弹和塑性应变增量理论, 最后可得出用于弹塑性应力应变分析的弹塑性模量矩阵 $[D]_{ep}$, 这个矩阵实际上代表弹塑性材料最普遍的应力 - 应变关系。

1. 屈服面

材料受应力作用产生变形, 随着应力增加到一定程度时, 变形由弹性变形转变成塑性变形, 即开始产生永久变形, 由弹性过渡到塑性的条件是什么? 也就是说物体从自然状态开始加载, 当应力达到什么程度时开始产生塑性变形, 以及随着应力的变化塑性变形如何继续发展, 这就是从初始屈服到继续屈服的过程。

物体受到外界荷载作用以后, 最初是产生弹性变形, 随着载荷的逐渐增加到一定程度时, 物体内应力较大的部分就开始出现塑性变形, 这种材料由弹性状态进入塑性状态的过程就称为屈服。受应力作用的材料到什么程度开始屈服, 材料内部某点开始出现塑性变形时其应力所应满足的条件, 即初始屈服条件, 屈服条件的数学表示就称为屈服准则, 初始屈服准则可表示为:

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2-29)$$

材料的后继屈服发生于下列两种情况: 一种情况是材料进入塑性状态后卸载, 此后再重新加载, 此时应力和应变的变化仍服从弹性关系, 直至应力加载到卸载前曾经达到的最高应力点时, 材料才再次进入塑性状态, 产生新的塑性变形, 这个应力点就是材料在经过了屈服 - 卸载过程所出现的新的屈服点, 对于理想塑性材料来说, 它与原先的屈服点重合, 对于强化材料来说它比原先初始屈服点更高 另一种情况是强化材料达到初始屈服后继续加载而出现的继续屈服。后继屈服与初始屈服不同, 它在应力应变曲线上的位置不是固定的, 而是依赖于塑性变形的过程, 即塑性变形的大小和历史。对于理想塑性材料, 后继屈服面和初始面重合, 但对于硬化材料由于硬化效应两者不重合 随着塑性变形的不断发展 后继屈服面不断变化 所以后继屈服面又称为硬化面。一般后继屈服函数可表示为:

$$\phi(\sigma_{ij}, H_\alpha) = 0 \quad (2-30)$$

式中 $H_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots)$ 表征由于塑性变形引起物质微观结构变化的参量, 称为硬化参量, 它们与塑性变形历史有关, 可以是塑性应变各分量, 塑性功或代表热力学状态的内变量。

2. 破坏屈服面

材料进入无限塑性状态时称作破坏, 理想塑性的初始屈服面就是破坏面, 而硬化材料从初始屈服起经过屈服阶段才能达到破坏, 所以屈服面逐渐发展直至破坏屈服面为止, 破坏屈服面准则一般表示为:

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2-31)$$

3. 加卸载准则

材料达到屈服后, 加载与卸载情况下的应力应变曲线规律不同, 这说明塑性应力应变关系与载荷状态有密切关系, 只有应力增量满足塑性准则时, 才有可能产生塑性应变增量, 卸载时

只有弹性变形恢复,而塑性变形保持不变,所以卸载状况是区别非线性弹性体与塑性体的一个标志,判别是加载状态还是卸载状态的条件即加卸载准则,由屈服函数得:

$$\text{卸载准则: } \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad (2-32)$$

$$\text{中性变载准则: } \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad (2-33)$$

$$\text{加载准则: } \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \quad (2-34)$$

由此可知弹塑模型有严格的加卸载标准,而非线性弹性模型只能粗略地规定加卸载标准。

4. 塑性位势理论与流动法则

塑性位势理论用于研究塑性材料应变与应力之间的一般关系及塑性流动规律。由于加载和卸载时规律不一样,只能建立应力与应变之间的增量关系。1928年米赛斯把弹性位势函数概念推广应用于塑性理论,他提出塑性流动方向(塑性应变增量矢量的方向)与塑性势函数 Q 的梯度方向一致。

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2-35)$$

上述塑性位势 $Q(\sigma_{ij})$ 是在主应力空间中形成的一个塑性势面。假定材料屈服后其弹性性质是各向同性的,弹性常数 E, ν 为常数,按广义虎克定律确定弹性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^e$ 为:

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{d\sigma_{ij}}{2G} - \frac{3\nu}{E} d\sigma_m \delta_{ij} \quad (2-36)$$

5. 弹塑性模量矩阵 $[D]_{ep}$

总应变增量 $\{\delta\varepsilon\}$ 是弹性应变增量 $\{\delta\varepsilon^e\}$ 与塑性应变增量 $\{\delta\varepsilon^p\}$ 之和,即:

$$\{\delta\varepsilon\} = \{\delta\varepsilon^e\} + \{\delta\varepsilon^p\} \quad (2-37)$$

故,

$$\{\delta\varepsilon\} = [D]^{-1} \{\delta\sigma\} + d\lambda \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (2-38)$$

或

$$[D] \{\delta\varepsilon\} = \{\delta\sigma\} + d\lambda [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (2-39)$$

因,

$$\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right\}^T \{\delta\sigma\} = (-1) \frac{\partial \phi}{\partial H_\alpha} \cdot dH_\alpha \quad (2-40)$$

又,

$$Ad\lambda = (-1) \frac{\partial \phi}{\partial H_\alpha} dH_\alpha \quad (2-41)$$

代入上式得:

$$\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right\}^T \{\delta\sigma\} - Ad\lambda = 0 \quad (2-42)$$

由(2-38)得:

$$\{\delta\sigma\} = [D] \{\delta\varepsilon\} - d\lambda [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (2-43)$$

将(2-41)代入(2-42)得:

$$\{\delta\sigma\} = [D] \{\delta\varepsilon\} - \frac{[D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{A + \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}} \{\delta\varepsilon\} = [D]_{ep} \{\delta\varepsilon\} \quad (2-44)$$

弹塑性模量矩阵的普遍公式为:

$$[D]_{ep} = [D] - \frac{[D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{A + \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}} \quad (2-45)$$

该式适合于硬化材料、软化材料和理想塑性材料,也适用于非耦合情况下相关联与非关联流动法则。(2-45)式可演算为:

$$[D]_{ep} = [D] - \frac{G[X]}{\frac{A}{G} + \Phi} \quad (2-46)$$

设,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha \frac{\partial Q}{\partial \sigma_x} + \beta \frac{\partial Q}{\partial \sigma_y} + \beta \frac{\partial Q}{\partial \sigma_z}, \alpha_4 = \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} \\ \alpha_2 &= \beta \frac{\partial Q}{\partial \sigma_x} + \alpha \frac{\partial Q}{\partial \sigma_y} + \beta \frac{\partial Q}{\partial \sigma_z}, \alpha_5 = \frac{\partial Q}{\partial \tau_{yz}} \\ \alpha_3 &= \beta \frac{\partial Q}{\partial \sigma_x} + \beta \frac{\partial Q}{\partial \sigma_y} + \alpha \frac{\partial Q}{\partial \sigma_z}, \alpha_6 = \frac{\partial Q}{\partial \tau_{zx}} \end{aligned} \right\} \quad (2-47)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_x} + \beta \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_y} + \beta \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_z}, \lambda_4 = \frac{\partial \phi}{\partial \tau_{xy}} \\ \lambda_2 &= \beta \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_x} + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_y} + \beta \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_z}, \lambda_5 = \frac{\partial \phi}{\partial \tau_{yz}} \\ \lambda_3 &= \beta \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_x} + \beta \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_y} + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_z}, \lambda_6 = \frac{\partial \phi}{\partial \tau_{zx}} \end{aligned} \right\} \quad (2-48)$$

$$[X] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \lambda_1 & \alpha_1 \lambda_2 & \cdots & \alpha_1 \lambda_6 \\ \alpha_2 \lambda_1 & \alpha_2 \lambda_2 & \cdots & \alpha_2 \lambda_6 \\ \alpha_3 \lambda_1 & \alpha_3 \lambda_2 & \cdots & \alpha_3 \lambda_6 \\ \alpha_4 \lambda_1 & \alpha_4 \lambda_2 & \cdots & \alpha_4 \lambda_6 \\ \alpha_5 \lambda_1 & \alpha_5 \lambda_2 & \cdots & \alpha_5 \lambda_6 \\ \alpha_6 \lambda_1 & \alpha_6 \lambda_2 & \cdots & \alpha_6 \lambda_6 \end{bmatrix} \quad (2-49)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \alpha_1 \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_x} + \alpha_2 \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_y} + \alpha_3 \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_z} + \alpha_4 \frac{\partial \phi}{\partial \tau_{xy}} + \alpha_5 \frac{\partial \phi}{\partial \tau_{yz}} + \alpha_6 \frac{\partial \phi}{\partial \tau_{zx}} \\ \Phi &= \lambda_1 \frac{\partial Q}{\partial \sigma_x} + \lambda_2 \frac{\partial Q}{\partial \sigma_y} + \lambda_3 \frac{\partial Q}{\partial \sigma_z} + \lambda_4 \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} + \lambda_5 \frac{\partial Q}{\partial \tau_{yz}} + \lambda_6 \frac{\partial Q}{\partial \tau_{zx}} \end{aligned} \right\} \quad (2-50)$$

第 4 节 岩土材料的弹塑性耦合

1. 考虑弹塑性耦合的广义正交流动法则

殷有泉教授及 Palmer 等人都认为弹塑性耦合与非关联活动法则不能截然分开, Palmer 很早就根据德鲁克公式证明非耦合情况下一定是关联流动。殷有泉教授等人提出了弹塑性耦合情况下的广义正交流动法则, 假定材料服从关联流动法则, 认为屈服过程中应变增量的不可逆部分 (指塑性应变增量与弹塑性耦合引起的应变增量之和) 与应力空间的屈服面正交, 应变增量 $d\varepsilon$ 看做可逆部分 $d\varepsilon^R$ 和不可逆部分 $d\varepsilon^I$ 组成, 而 $d\varepsilon^I$ 部分又由塑性部分 $d\varepsilon^p$ 和耦合部分 $d\varepsilon^C$ 组成, 即:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^R + d\varepsilon^I = d\varepsilon^R + d\varepsilon^p + d\varepsilon^C \quad (2-51)$$

定义不可逆的应力增量为:

$$d\sigma^I = [D]d\varepsilon^I \quad (2-52)$$

将式 (2-51) 代入上式可得:

$$d\sigma^I = [D](d\varepsilon - d\varepsilon^R) = [D]d\varepsilon - d\sigma \quad (2-53)$$

在弹塑性耦合情况下, $[D]$ 和 $[D]^{-1}$ 为硬化参数 H_α 的函数, 耦合应变增量是因为屈服 (内变量变化) 导致弹性模量变化而引起的。

$$d\varepsilon^C = d[D]^{-1}\sigma \quad (2-54)$$

$$d[D]^{-1} = \frac{\partial [D]^{-1}}{\partial H_\alpha} dH_\alpha, dH_\alpha = \{M'_\alpha\} \{d\varepsilon^I\} \quad (2-55)$$

设应变空间加载函数为 $\psi(\varepsilon, \varepsilon^p, H_\alpha)$, 应力空间中加载的函数为 $\phi(\sigma, \sigma^p, H_\alpha)$ 殷有泉教授提出了应变空间表达的广义正交法则:

$$d\sigma^I = d\lambda \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \quad (2-56)$$

写成应力空间表达的广义正交法则时为:

$$d\varepsilon^I = d\lambda \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (2-57)$$

经推导可得, 弹塑性耦合下的一般应力应变关系为:

$$\{d\sigma\} = \left[[D] - \frac{1}{A} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right\} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right\}^T \right] \{d\varepsilon\} = [D]_{\varphi} \{d\varepsilon\} \quad (2-58)$$

$$A = - \left[\left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T [K] + \frac{\partial \psi}{\partial H_\alpha} [M'_\alpha]^T + \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial D} \right\}^T \frac{\partial D}{\partial H_\alpha} [M'_\alpha] \right] [D]^{-1} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right\} \quad (2-59)$$

$$[D]_{\varphi} = [D] - \frac{1}{A} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right\} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right\}^T \quad (2-60)$$

式中的 A 为一标量因子。

2. 一般的弹塑性耦合应力应变关系

当考虑弹塑性耦合时, 弹性矩阵 $[D]$ 随硬化参量 H_α 变化而变化, 硬化参量 H_α 的增量可写成如下形式:

$$dH_\alpha = \{M_\alpha\}^T \{d\varepsilon^p\} \quad (2-61)$$