现代工业企业自动化丛书

模糊控制理论与应用技术

汤兵勇　路林吉　王文杰　编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书从现代工业企业实际应用角度出发,较系统地探讨并介绍了模糊控制的主要理论方法与应用技术,内容包括:模糊数学基础知识、基于模糊推理的模糊控制器、基于 T-S 模型的模糊控制、基于模糊数的模糊自适应控制、工业企业生产过程模糊控制、工业企业模糊产品设计以及工业企业模糊管理与控制等,其中大部分是近些年的最新研究成果。本书注重理论联系实际,兼顾学术性与实用性,内容丰富,通俗易懂,具有较大的理论意义和使用价值。

本书可供工业企业研究开发人员、工程技术人员和经营管理人员等阅读使用,并可作为高等院校自动化、计算机、信息管理及其他相关工程专业的研究生和本科高年级学生的教材或参考书。

版权所有,翻印必究。
本书封面贴有清华大学出版社激光防伪标签,无标签者不得销售。

书　名: 模糊控制理论与应用技术
作　者: 汤兵勇　路林吉　王文杰　编著
出版者: 清华大学出版社 (北京清华大学学研大厦,邮编 100084)
http: // www .tup .tsinghua .edu .cn
印刷者: 北京国马印刷厂
发行者: 新华书店总店北京发行所
开　本: 787×1092 1/ 16　印张: 12　字数: 285 千字
版　次: 2002 年 9 月第 1 版　2002 年 9 月 第 1 次印刷
书　号: ISBN 7-302-05375-8/ TP・3161
印　数: 0001～4000
定　价: 16 .80 元

第 1 章　绪　　论

1 .1　模糊控制简介

模糊控制是以模糊集合论、模糊语言变量以及模糊逻辑推理为基础的一种计算机控制方法[1]。从控制器的智能性来看,模糊控制属于智能控制的范畴。

智能控制是人工智能、控制理论和管理科学相结合的产物[2]。它依靠知识模型,把人类社会数以千万计的技术和非技术的人类行为和经验,归纳为若干系统化的规则(或规律),实现对系统的‘拟人智能’控制[3]。

模糊控制是智能控制的主要方法之一,它的知识模型是由一组模糊推理产生的规则(主要是由模糊控制规则和表示对象特性的语言规则)构成的,它的人机对话能力较强,能够方便地将专家的经验与思考加入到知识模型中。

1 .1 .1　模糊控制的研究对象

模糊控制作为智能控制的一种类型,是控制理论发展的高级阶段产物,它主要用来解决那些用传统方法难以解决的复杂系统的控制问题。具体地说,其研究对象具备以下一些智能控制对象的特点:

1 . 模型不确定性

传统的控制是基于模型的控制,这里的模型包括控制对象和干扰模型。对于传统控制通常认为模型已知或者经过辨识可以得到。而模糊控制的对象通常存在严重的不确定性。这里所说的模型不确定性包含两层意思: 一是模型未知或知之甚少;二是模型的结构和参数可能在很大范围内变化。无论哪种情况,传统方法都难以对它们进行控制,而这正是模糊控制所要解决的问题。

2 . 非线性

在传统的控制理论中,线性系统理论比较成熟。对于具有非线性特性的控制对象,虽然也有一些非线性控制的方法,但总的来说,非线性控制理论还很不成熟,而且方法也比较复杂。采用模糊控制的方法往往可以较好地解决非线性系统的控制问题。

3 . 复杂的任务要求

在传统的控制系统中,控制的任务或者是要求输出量为定值(调节系统),或者是要求输出量跟随期望的运动轨迹(跟踪系统),要求比较单一。对于模糊控制系统,任务的要求往往比较复杂。例如,在智能机器人系统中,它要求系统对一个复杂的任务具有自行规划和决策的能力,有自动躲避障碍并且运动到期望目标位置的能力。再如,在复杂的工业过程控制系统中,它除了要求对各被控物理量实现定值调节外,还要求能实现整个系统的自动启停、故

障的自动诊断以及紧急情况的自动处理等功能。

1.1.2 模糊控制是模仿人的控制

由人作为控制器的控制系统是典型的智能控制系统,其中包含了人的高级智能活动。模糊控制在一定程度上模仿了人的控制,它不需要有准确的控制对象模型,因此它是一种智能控制方法。

例如,一个操作员通过观察仪表显示对过程进行控制,仪表显示反映了过程的输出量。操作员通过仪表观察到输出量发生变化时,便根据所积累的知识和操作经验做出决策,并采取相应的控制动作。这是一个从过程变化到控制行动的映射。这个映射是通过操作员的决策来实现的,这个决策过程并不是通过精确的定量计算,而是依靠定性或模糊的知识来实现的。例如,若控制的过程是水箱中的水温,检测仪表给出的是精确值,比如 80℃,操作员将这个精确值转化为头脑中的概念量,比方说“温度偏高”。他将这个概念与头脑中已有的控制经验和模式相匹配,得到“温度偏高应该加入较多冷却水”的推断,进而需将“加入较多冷却水”这个模糊概念给出定量解释。例如,加入冷却水的流量应为 $10m^3/h$,然后按此定量值控制执行装置,从而完成整个控制过程的一个循环。这里操作员并不是按照某种控制算法进行了精确的计算,而是采用了一种模糊的控制方法,其中包含了他的智能行为。

模糊控制即是模仿上述操作员的控制过程,其中包含了操作员的控制经验和知识。因而从这个意义上说,模糊控制也是一种智能控制。模糊控制方法既可用于简单的控制对象,也可用于复杂的过程。

1.1.3 模糊控制研究的数学工具——模糊集合与模糊数学

在上面所举的操作员进行温度控制的例子中,“温度偏高”中的“偏高”、“加入较多冷却水”中的“较多”等都是一些模糊的概念,而利用这些概念最终却能实现稳定的控制。如何描述这些模糊的概念,并对它们进行分析、推理,正是模糊集合与模糊数学[4]所要解决的问题。

模糊集合理论的产生和发展到现在只不过 30 多年的历史,但它已经逐步渗入到自然科学和社会科学的各个领域,并且取得了引人注目的成果。笼统地说,模糊集合是一种特别定义的集合,它可用来描述模糊现象。有关模糊集合、模糊逻辑等的数学理论,被称为模糊数学。

模糊性是一种不确定性,但它不同于随机性,所以模糊理论不同于概率论。模糊性通常是指对概念的定义以及语言意义理解上的不确定性。例如,“老人”、“温度高”、“数量大”等所含的不确定性即为模糊性。可见,模糊性主要是人为的主观理解上的不确定性,而随机性则主要反映的是客观上自然的不确定性,或者是事件发生的偶然性。偶然性与模糊性具有本质上的不同,它们是不同情况下的不确定性。例如,“明天有雨”的不确定性,是由今天的预测产生的,时间过去了,到明天就变成确定的了。再有“掷一下骰子是 4 点”的不确定性是由于掷骰子之前推测产生的,实际做一下掷骰子实验,它就是确定的事件了。但是“老人”、“气温高”等的不确定性,即使时间过去了,即使做了实验,它仍然是不确定的,这是由语言意义模糊性的本质所确定的。

模糊集合是一种特别定义的集合,它与普通集合既有联系又有区别。对于普通集合来说,任何一个元素要么属于该集合,要么不属于,非此即彼,界限分明,决不模棱两可。而对

于模糊集合来说,一个元素可以是既属于又不属于,亦此亦彼,界限模糊。例如,一个人到苹果园去摘苹果,如果规定比 2 两重的苹果算作“大”苹果,则这是普通集合的概念。因此,若摘到一个 2 .5 两重的苹果,可以毫不犹豫地说这是一个“大”苹果;若摘到一个 1 .9 两重的苹果,也可以毫不犹豫地说它不是“大”苹果。这就是关于“大”的两值逻辑,是用精确的量作为边界来划分属于还是不属于该集合。如果规定差不多比 2 两重的苹果为“大”苹果,这是一个模糊集合的概念。这时若摘到一个 2 .5 两重的苹果,可以不假思索地算作“大”苹果。那么对于 1 .9 两重的苹果呢,这就需要人为地决定了。你可以说它不够“大”,但若这个苹果园中“大”苹果不够多的话,将它勉强算作“大”苹果也不为过。这就是关于“大”的逻辑值逻辑,是用人为的量作为边界来划分属于还是不属于该集合。

从上述例子可以看到,模糊性是人们在社会交往和生产实践中经常使用的,它提供了定性与定量、主观与客观、模糊与清晰之间的一个人为折衷。它既不同于确定性,也不同于偶然性和随机性。概率论是研究随机现象的,模糊数学则是研究模糊现象的,两者都属于不确定性数学。应当特别注意的一点是,不可认为模糊数学是模糊的概念,它是完完全全精确的,它是借助定量的方法研究模糊现象的工具。

1 .2　模糊控制的发展与应用概况

美国控制理论专家查德(L .A .Zadeh)教授于 1965 年首先提出了模糊集合的概念,开创了模糊数学及其应用的新纪元。模糊控制是模糊集合理论应用的一个重要方面。1974 年英国教授曼丹尼(E .H .Mamdani)首先将模糊集合理论应用于加热器的控制,其后产生了许多应用的例子。其中比较典型的有:热交换过程的控制、暖水工厂的控制、污水处理过程控制、交通路口控制、水泥窑控制、飞船飞行控制、机器人控制、模型小车的停靠和转弯控制、汽车速度控制、水质净化控制、电梯控制以及电流和反应堆的控制,并且生产出了专用的模糊芯片和模糊计算机。在模糊控制的应用方面,日本走在了前列。日本在国内建立了专门的模糊控制研究所,日本仙台的一条地铁的控制系统采用了模糊控制的方法取得了很好的效果。日本还率先将模糊控制应用到日用家电产品的控制,如照相机、吸尘器、洗衣机等,模糊控制的应用在日本已经相当普及。

1 .2 .1　模糊控制的产生及其与传统控制的差异

1973 年,L .A .Zadeh 继续丰富和发展了模糊集合论,提出了一种把逻辑规则的语言转化成相关控制量的思想,从而为模糊控制的形成奠定了理论基础[3]。他同时指出:模糊控制方法与通常分析系统所用的定量方法在本质上是不同的,它有 3 个主要特点:

(1) 用语言变量代替数学变量或两者结合应用;

(2) 用模糊条件语句来刻画变量间的函数关系;

(3) 用模糊算法来刻画复杂关系。

现有的控制理论可以用来处理许多控制问题。例如,利用卡尔曼滤波器可以对有噪声的系统进行状态估计;极大值原理可以用来解决某些最优控制的问题;分离原理为随机系统的控制提供了便利的方法;极点配置技术可以用来处理线性多变量系统的稳定性等问题;预测控制理论可对大滞后过程进行有效的控制。尽管这些理论在处理实际问题时都获得了不同程度的成功,但是它们都有一个基本的要求,就是必须知道被控对象的数学模型。然而在

实际中常出现这样的复杂情况：许多工业被控对象由于具有非线性、时变性、变结构、多层次、多干扰因素以及各种不确定性，难以建立精确的数学模型。即使对一些复杂对象能够建立数学模型，模型也往往过于复杂，既不利于设计也难以实现有效控制。这时前面提到的方法就无法解决这些对象的控制问题。虽然常规自适应控制技术可以解决一些问题，但其能力也是有限的。

在实际工作中，操作者却往往可以对这些难以建立数学模型的被控对象进行有效的控制。操作者对被控对象进行的控制主要是通过不断学习，积累操作经验来实现的。这些经验包括操作者对被控对象特性的了解、在各种情况下的控制策略以及性能指标判据。作为经验，这些信息通常是以自然语言的形式表达出来，它们的特点是定性的描述，所以具有不确定性和不精确性。这种特性使得人们无法用现有的定量控制理论对这些信息进行处理，但是人们却能根据这些信息建立一组行之有效的控制规则，来对被控对象进行控制。这是一组用语言信息表达的具有模糊性的控制规则。显然在这种情况下，需要一种能处理具有模糊性的语言信息的技术，它能根据语言信息构成一个能给出有效控制方法的控制器。

模糊集合理论就是具有处理语言信息能力的工具。模糊控制器就是人们根据模糊集合理论设计的、能够模仿操作人员手动控制作用的控制器，它不要求已知受控对象的数学模型。但是，需要强调指出：模糊控制器不要求受控对象的数学模型，并不等于在对受控对象先验知识一无所知的情况下就可设计一个具有良好控制效果的模糊控制器。恰好相反，它仍然要求对受控对象的特性有充分的了解，只不过它们是以知识模型(由人们对受控过程认识的模糊信息的归纳和操作经验的总结而形成的模型)而不是以数学模型的形式表达出来的。

1.2.2 模糊控制的几个典型应用案例

1. Sugoeno 的模糊小车

M .Sugoeno 设计了一个模型小车的模糊控制[4]。这是模糊控制应用的一个非常令人感兴趣的例子。利用模糊控制的方法可使该小车沿着预先设定的弯曲轨道停靠到车库指定位置。模糊控制的规则是通过向有经验的驾驶员学习而获得的。

2. 模糊自动火车运行系统

这是日本日立公司开发的系统。自 1987 年 2 月以来，该系统已成功地在日本仙台的城市地铁系统应用。在该系统中，目标评估模糊控制器对每一条可能的控制命令加以执行。该模糊系统包含两种规则库，一种是关于恒速控制，它要求火车启动后维持恒速前进；另一种是火车自动停站的控制，它调节火车的速度以准确地停靠在车站的指定位置。这些规则是基于对运行的安全性、乘坐的舒适性、停靠的准确性、能耗及运行时间等综合性能的评价。每 100ms 控制一次。运行结果表明，该模糊控制系统在乘坐的舒适性、停靠的准确性、能耗、运行时间及鲁棒性等方面均优于常规的 PID 控制。

3. 模糊自动集装箱吊车操纵系统

在该系统中，主要的性能指标为安全性、停放精度、集装箱摆动及吊运时间等。其中包含了两个主要的操作：台车操作和线绳操作。每一操作包含两个功能级：决策级和动作级。该模糊自动操作系统在日本的北九州港进行了实地实验。实验结果表明，由一个不熟

练的操作员来操纵该模糊系统,其货物处理能力为每小时 30 个集装箱,其操作性能、安全性、精确度等均可与非常有经验的操作员相媲美。

4. 模糊逻辑芯片和模糊计算机

第一个模糊逻辑芯片是 1985 年由 AT&T 贝尔实验室的 Togai 和 Watanabe 设计的。该模糊推理芯片可以并行地处理 16 条规则。它由四部分组成: 规则集存储器、推理处理单元、控制器和输入输出电路。规则集存储器是用静态随机存储器实现的,因而可动态地改变规则集。该芯片在 16MHz 的时钟下的执行速度可达 250k FLOPS。现在正在开发基于该芯片的模糊逻辑加速器(FLA)。1989 年 3 月,美国北卡罗来纳微电子中心的 Watanabe 设计制造了世界上最快的模糊逻辑芯片,该芯片包含有 688000 个晶体管,速度达到 580k FLOPS。

日本的 Yamaskawa 设计了一个模糊计算机的雏形。该模糊计算机由一个模糊存储器、一个推理机、一个 MAX 块、一个清晰化块以及一个控制单元组成。模糊存储器存储语言模糊信息,由推理机实现 MAX 和 MIN 操作。该模糊计算机能以高达 10M FLOPS 的速度处理模糊信息,它朝着真正的工业应用以及常用知识处理方向迈出了十分重要的一步。

1.3 本书结构与内容安排

本书从现代工业企业实际应用角度出发,较系统地讨论介绍了模糊控制理论与应用技术。首先介绍了模糊控制研究用数学工具——模糊数学基础知识;然后分别讨论 3 种不同类型的模糊控制的基本理论,即基于模糊推理的模糊控制器、基于 T-S 模型的模糊控制和基于模糊数的模糊自适应控制;最后从三个不同侧面介绍了模糊控制在现代工业企业中的应用技术,即工业企业生产过程模糊控制应用技术与案例、工业企业模糊产品设计案例分析以及工业企业模糊管理与控制应用方法与案例。

全书内容结构安排如图 1.1 所示。

图 1.1 本书内容结构图

参 考 文 献

1 李士勇等 .模糊控制和智能控制理论与应用 .哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社,1991

2 吕勇哉 .现代工业控制与人工智能 .信息与控制,1988, 5:32～40

3 张化光 .复杂系统的模糊辨识与模糊自适应控制 .沈阳: 东北大学出版社,1993

4 孙增圻等 .智能控制理论与技术 .北京: 清华大学出版社,南宁: 广西科学技术出版社,1997

5 L .A .Zadeh . Outline of a new approach to the annalysis complex systems and decision processes . IEEE Trans .Syst .Man Cybern,1973,SMS-3:28～44

6 李友善等 .模糊控制理论及其在过程控制中的应用 .北京: 国防工业出版社,1993

7 王学慧等 .微机模糊控制理论及其应用 .北京: 电子工业出版社,1994

8 汤兵勇 .模糊模型的辨识及应用 .北京: 中国环境出版社,1994

9 汤兵勇 .现代模糊管理数学方法 .上海: 中国纺织大学出版社,1999

第 2 章　模糊数学基础知识

本章首先介绍普通集合论的一些基本概念,然后推广到模糊集的概念,并进一步介绍其他一些模糊数学基础知识。

2.1　普 通 集 合

2.1.1　一般概念

一般地,把具有某种确定性质彼此可以区别的对象(或事物、个体等)组成一个整体,这个整体被称为集合或集。组成集合的每一个对象,均称为该集合的元素或简称为元。若用 X 代表一个集合, x 表示集合的元素,则把 x 属于 X,记为 $x\in X$;否则,则把 x 不属于 X,记为 $x\mid X$。

若集合的元素是有限的,那么这种集合称为有限集;否则称为无限集。

集合可以用列举法表示。所谓列举法是把一个集合的所有元素都写在一个花括号内,例如 $S=\{a,\ b,\ c,\ d\}$, $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}\right\}$ 等。显然这种表示法只适合有限集。集合的另一种表示法为条件定义法,即用记号

$$\{x\mid \Phi(x)\}$$

表示一个集合,它由满足条件 Φ 的元素 x 全体所组成。例如,中心在原点、半径为 1 的圆周上全体点组成的集合 X 可记为

$$X=\{(x,\ y)\mid x,\ y\text{ 是实数},\ x^2+y^2=1\}$$

花括号中竖线左边的 $(x,\ y)$ 表示集合 X 的元素为 xoy 坐标面上的点 $(x,\ y)$,竖线右边的内容表示集合 X 的元素 $(x,\ y)$ 应满足的条件,称为集合的定义条件。

下面几个概念是经常要用到的。

(1) 子集

定义 2.1　设 A, B 为两个集合,若"$x\in A$ 都有 $x\in B$,则称 A 包含在 B 内,记为 A B。这种关系也称 A 是 B 的子集。

若 A　B 且 B　A,则称集合 A 与集合 B 相等,记为 $A=B$。

定义 2.2　若 A　B 但 $A\neq B$,则称集合 A 为集合 B 的真子集(亦称 A 真包含在 B 内),记为 A　B。

(2) 空集

不含任何元素的集合叫做空集,记为　。空集可以用条件 $x\neq x$ 定义为

$$=\{x\mid x\neq x\}$$

空集是任一集合的子集,即对于任意集合 A,恒有　A。

(3) 论域

考虑一个确定的集合,使在过程中所涉及的一切集合都是这个集合的子集,也就是说所

研究的一切对象,都是这个集合的元素,这样的集合叫做论域或空间,常用大写字母 U, X 等表示。如考虑的是部分正整数的集合,则论域就可以取全体自然数组成的集合 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$。

论域 U 中的任一元素 x,对于某一确定的集合 A,要么 $x \in A$,要么 $x \notin A$,二者必居其一且只居其一。这是普通集合的一个特点。

(4) 特征函数

集合还有一种表示方法——特征函数法,它是用特征函数来确定一个集合。

设集合 A 是论域 U 的一个子集。所谓 A 的特征函数 $\chi_A(x)$ 是这样规定的:"$x \in U$,若 $x \in A$ 则规定 $\chi_A(x) = 1$;若 $x \notin A$ 则规定 $\chi_A(x) = 0$,即

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \mid A \end{cases} \tag{2.1}$$

任一特征函数都惟一确定了一个集合。特征函数 $\chi_A(x)$ 的图形一般地画成图 2.1 的形状,每一个 $x \in A$ 所对应的纵坐标 $\chi_A(x)$ 都是 1,而任何 $x \notin A$ 所对应的纵坐标均为零。

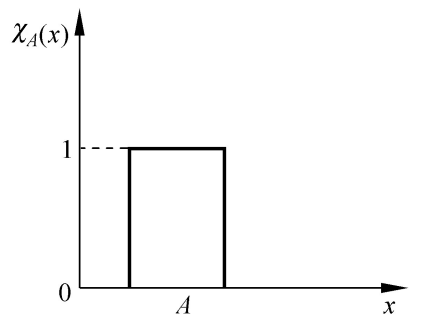


图 2.1 特征函数示意图

例 2.1 全体有理数组成的集合

$$\mathbf{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q}, \text{其中 } p, q \text{ 为互质数,且 } q > 0 \right\}$$

的特征函数为

$$\chi_{\mathbf{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \chi \in \mathbf{Q} \\ 0, & \chi \text{ 为无理数} \end{cases}$$

这里取论域为全体实数组成的集合 $\mathbf{R}$。用特征函数表示集合,与前两种方法本质上是一样的。下面会看到,集合的运算一般可以通过其特征函数的某种运算来定义。

2.1.2 集合的运算

下面给出集合的并、交、余运算的定义。

(1) 并集

定义 2.3 设 A, B 为论域 U 上的两个子集,由属于集合 A 或集合 B 的所有元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集(简称并),记为 $A \cup B$,即

$$A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{ x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B \} \tag{2.2}$$

一般,可以定义 n 个集合的并:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \overset{\text{def}}{=} \{ x \mid x \text{ 至少属于 } A_i \text{ 之一}, i = 1, 2, \cdots, n \} \tag{2.3}$$

(2) 交集

定义 2.4 设集合 A, $B \subseteq U$,由既属于 A 又属于 B 的元素所组成的集合,称为 A 与 B 的交集(简称交),记为 $A \cap B$,即

$$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{ x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B \} \tag{2.4}$$

一般设 $A_i \subseteq U$, $i = 1, 2, \cdots, n$, n 个集合之交定义如下:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \overset{\text{def}}{=} \{ x \mid x \text{ 属于所有 } A_i, i = 1, 2, \cdots, n \} \tag{2.5}$$

例 2.2 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{4, 5, 6, 7\}$,则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},\ A \cap B = \{4, 5\}$$

例 2.3 设 $A=\{x \mid x^2 + x - 6 < 0\}$, $B=\{x \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$,通过解不等式得 $A=\{x \mid -3 < x < 2\}$, $B=\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$。显然, $A \cup B=\{x \mid -3 < x \leq 3\}$, $A \cap B=\{x \mid -1 \leq x < 2\}$。

(3) 差集

定义 2.5 设 $A, B \subset U$,由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集,记为 $A - B$(或 $A \setminus B$),即

$$A - B = \{u \mid u \in A \text{ 但 } u \notin B\} \tag{2.6}$$

这个定义中并不要求 $B \subset A$。

(4) 余集

定义 2.6 设集合 $A \subset U$,在论域 U 中由不属于 A 的元素组成的集合,称为集合 A 的余集(或补集),记为 $\sim A$,即

$$\sim A=\{x \mid x \notin A \text{ 但 } x \in U\} \tag{2.7}$$

例 2.4 设论域 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A=\{1, 2, 3\}$,那么 $\sim A=\{4, 5\}$,且 $\sim(\sim A)=\{1, 2, 3\}=A$。

关系 $\sim(\sim A)=A$ 对一般集合都是正确的。另外,设 U 为论域,显然 $\sim \varnothing = U$, $\sim U = \varnothing$。

此外,集合 A, B 的并、交、余的特征函数,均可用集合 A, B 的特征函数来定义。

(1) $\chi_{A \cup B}(x) \overset{\text{def}}{=} \max(\chi_A(x), \chi_B(x))$ 或 $\chi_A(x) \vee \chi_B(x)$ (2.8)

(2) $\chi_{A \cap B}(x) \overset{\text{def}}{=} \min(\chi_A(x), \chi_B(x))$ 或 $\chi_A(x) \wedge \chi_B(x)$ (2.9)

(3) $\chi_C(x) \overset{\text{def}}{=} 1 - \chi_A(x)$ (2.10)

(4) $A=\varnothing$ 当且仅当 $\chi_A(x) \equiv 0$

(5) $A=U$ 当且仅当 $\chi_A(x) \equiv 1$

(6) $A \subset B$ 当且仅当 "$x \in U$, $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$

(7) $A=B$ 当且仅当 "$x \in U$, $\chi_A(x)=\chi_B(x)$

注 这里,记号 $\vee$ 表示取极大者, $\wedge$ 表示取极小者。

2.1.3 集合运算的性质

下面列出的是集合运算的几个常用性质:

(1) **交换律**: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

(2) **结合律**: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) **分配律**: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(4) **传递律**: 若 $A \subset B$, $B \subset C$ 则 $A \subset C$

(5) **幂等律**: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$

(6) 互补律: $A \cup \overline{A} = U$; $A \cap \overline{A} =$

(7) 德摩根律: $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2.1.4 幂集、笛卡儿积集

定义 2.7 由集合 A 的一切子集所组成的集合(包含空集与集合本身),叫集合 A 的幂集,记为 $P(A)$,即

$$P(A) = \{X \mid X \quad A\} \tag{2.11}$$

例 2.5 设 $A = \{a_1, a_2\}$,则 $P(A) = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}, \quad\}$

设 $A = \{1,2,3\}$,则 $P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \quad\}$

定义 2.8 设 A, B 为两个集合,由 $a \in A$ 及 $b \in B$ 的一切有序偶 (a, b) 组成的集合,叫做集合 A 与集合 B 的笛卡儿积集(直积集),记为

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \tag{2.12}$$

注 有序偶 $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ 当且仅当 $x_1 = x_2, y_1 = y_2$。

例 2.6 设 $X = \{x_1, x_2\}$, 则

$$X \times X = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_2, x_2)\}$$

例 2.7 设 $R = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$,则

$$R \times R = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R\}$$

R 为坐标轴上一切点的集合, $R \times R$ 为坐标面 xoy 上一切点的集合。

2.1.5 关系

1. 一般概念

定义 2.9 从集合 A 到集合 B 的一个二元关系 R,是笛卡儿积集 $A \times B$ 的一个子集 $R \quad A \times B$,如果元素 a, b ($a \in A$, $b \in B$) 之间有关系 R,就记为 aRb 或 $(a, b) \in R$,否则记为 $a\overline{R}b$ 或 $(a, b) \mid R$。从定义可知,所谓关系 R 就是一切有关系 R 的有序对组成的集合

$$R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, aRb\} \tag{2.13}$$

$(a, b) \in R$ 的第一个个体 a 允许取的所有元素组成的集合叫做关系 R 的定义域,记为 $\mathrm{dom}(R)$ 或 $\mathrm{D}(R)$; 第二个个体 b 允许取的一切元素组成的集合叫做关系 R 的值域,记为 $\mathrm{ran}(r)$ 或 $\mathrm{C}(R)$,即

$$\mathrm{dom}(R) = \{a \mid a \in A, \vee b \in B \text{ 使得 } (a, b) \in R\}$$

$$\mathrm{ran}(R) = \{b \mid b \in B, \vee a \in A \text{ 使得 } (a, b) \in R\}$$

(记号 $\vee a \in A$ 表示存在着属于 A 的元素 a),显然有 $\mathrm{dom}(R) \quad A$, $\mathrm{ran}(R) \quad B$。经常会碰到 $A = B$ 的情况,这时可以说关系 R 是建立在集合 A 上的二元关系 $R \quad A \times A$。

注 除二元关系外,尚有三元关系, …, n 元关系。

例 2.8 设某班的 5 个学生组成一个集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$,考试成绩的集合为 $B = \{$优,良,及格,不及格$\}$。直积 $A \times B$ 就是每个学生与其可能取得成绩的有序对集合,其中共有 $5 \times 4 = 20$ 个有序对。设某次考试(某一门课程)结果为

$R = \{(a_1$,良$), (a_2$,优$), (a_3$,及格$), (a_4$, 优$), (a_5$,及格$)\}$显然这时有 $R \quad A \times B$。

2．关系的矩阵表示法

有限集之间的关系用矩阵表示，可将关系的某些性质清楚地表达出来，尤其便于在计算机上对关系进行各种计算。

设集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 到集合 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ 存在着关系 R，列出如下表格，若 a_i, b_j 之间有关系 R，令 $u_{ij}=1$；若 a_i 与 b_j 无关系 R，令 $u_{ij}=0$。即

R	b_1	$\cdots$	b_m
a_1	u_{11}	$\cdots$	u_{1m}
$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$
a_n	u_{n1}	$\cdots$	u_{nm}

其中 $u_{ij}=\begin{cases}1, & (a_i, b_j)\in R\\ 0, & (a_i, b_j)\mid R\end{cases}$

这样，A 到 B 的关系 R 就用上表清楚地表示出来。这个表写成矩阵形式，就叫做关系 R 的矩阵，记为 $\boldsymbol{M}_R$，即

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{matrix}u_{11} & \cdots & u_{1m}\\ \cdots & & \cdots\\ u_{n1} & \cdots & u_{nm}\end{matrix}\qquad \text{其中 } u_{ij}=\begin{cases}1, & a_i R b_j\\ 0, & a_i / R b_j\end{cases}$$

显然，关系 R 的矩阵 $\boldsymbol{M}_R$ 均系布尔矩阵。在一般的讨论中，关系矩阵 $\boldsymbol{M}_R$ 常用代数中所使用的记号

$$\boldsymbol{M}_R=(u_{ij})_{n\times m},\qquad \text{其中 } u_{ij}=\begin{cases}1, & (a_i, b_j)\in R\\ 0, & (a_i, b_j)\mid R\end{cases}$$

集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 上的关系 R　$A\times A$，其矩阵为 n 阶方阵

$$\boldsymbol{M}_R=(u_{ij})_{n\times n},\qquad \text{其中 } u_{ij}=\begin{cases}1, & (a_i, a_j)\in R\\ 0, & (a_i, a_j)\mid R\end{cases}$$

例 2.9　5 个学生考试结果取得成绩的关系矩阵为

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{matrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{matrix}$$

其中，行自上而下为学生 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5，列自左至右为成绩优、良、及格、不及格。

3．复合关系(关系的合成)

定义 2.10　设 R 是由集合 X 到集合 Y 的关系，Q 是由集合 Y 到集合 Z 的关系。所谓关系 R 与关系 Q 的合成，是由 X 到 Z 的一个关系，它是这样定义的：对于 $x\in X$ 及 $z\in Z$，存在 $y\in Y$，使得 $(x, y)\in R$ 且 $(y, z)\in Q$，这时通过 Y，X 与 Z 的关系就叫做关系 R 与关系 Q 的合成，记为 $R\ Q$。用集合的记号给出，即

$$R\ Q=\{(x, y)\mid \forall\ y\in Y \text{ 使 } ((x, y)\in R, (y, z)\in Q)\}\qquad (2.14)$$

参考下面的图 2.2。

$R\ Q$ 为直积 $X\times Z$ 的一个子集，其特征函数为

$$\chi_{R\ Q}(x, z)=V_{y\in Y}(\chi_R(x, y)\wedge\chi_Q(y, z))\qquad (2.15)$$

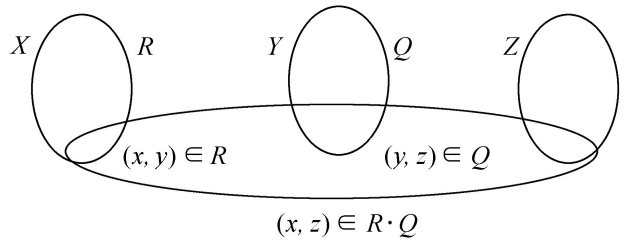


图 2.2　关系的合成示意图

若 R 的值域 ran(R) 与 Q 的定义域 dom(Q) 之交为空集，则 $R \circ Q$ 为空集。

关系 R 与其自己的复合 $R \circ R$，叫做关系 R 的幂，记为 R^2，即 $R^2 = R \circ R$。将图 2.2 中 3 个集合 X, Y, Z 均换成 A，而关系 R, Q 均改成 R，就说明了在一个集合 A 上的关系 R 的幂运算。此外还可以定义 n 次幂的运算 $R^n = R^{n-1} \circ R$。

如果两关系均用矩阵表出，则复合关系可用矩阵的“乘法”运算而得到。

例 2.10　设 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$，$Z = \{z_1, z_2, z_3\}$，$X$ 到 Y 的关系 $R = \{(x_2, y_3), (x_3, y_1), (x_4, y_3)\}$，$Y$ 到 Z 的关系 $Q = \{(y_2, z_3), (y_3, z_1)\}$。$R$ 与 Q 的关系矩阵为

$$\begin{array}{cccc} R & b_1 & \cdots & b_m \\ a_1 & u_{11} & \cdots & u_{1m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_n & u_{n1} & \cdots & u_{nm} \end{array}$$

按两矩阵乘法运算规则，将其中的“乘”换成“$\wedge$”，“加”换成“$\vee$”得到

$$\boldsymbol{M}_R \quad \boldsymbol{M}_Q = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} = \boldsymbol{M}_{R \circ Q}$$

根据式(2.15)直接算得 $R \circ Q = \{(x_2, z_1), (x_4, z_1)\}$，与上式结果一致。

定义 2.11　设 R 是一个从 X 到 Y 的关系，称从 Y 到 X 的关系 $\{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ 为关系 R 的逆关系，记为 R^{-1}，即

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\} \tag{2.16}$$

4. 等价关系

等价关系是二元关系中的一个重要关系，也是将一个集合的元素分类的重要依据。

所谓 R 是集合 X 上的等价关系指的是关系 R 同时具有自反性、对称性和传递性。下面先给出这三个性质的定义。

定义 2.12　设 R 是非空集 X 上的关系($R \in P(X \times X)$)，若 $\forall x \in X$ 都有 $(x, x) \in R$(任一 $x \in X$ 与其自己均有关系 R)，则称 R 是自反的，否则称 R 为非自反的。

据定义可知，自反关系 R 的矩阵主对角线上的元均为 1。

定义 2.13　设 R 是非空集 X 上的关系，$\forall x, y \in X$，若有 $(x, y) \in R$，则必有 $(y, x) \in R$($(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$)，称关系 R 为对称的，否则称 R 是非对称的。

据定义可知，对称关系 R 的矩阵必为对称矩阵。

例 2.11　在集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的关系 $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 1), (2, 3),$

$(3,3)\}$是自反但非对称的,这是因为在 R 中并非一切$(x,y)\in R$ 都有$(y,x)\in R$。

定义 2.14 设 R 是非空集 X 上的关系,"$x,y,z\in Z$,若$(x,y)\in R$ 且$(y,z)\in R$,则必有$(x,z)\in R((x,y)\in R$ 且$(y,z)\in R \quad (x,z)\in R)$,称关系 R 为传递的,否则称 R 为非传递的。

定义 2.15 设 R 是非空集 X 上的关系,若"$x,y,z\in X$ 为(1) 自反的,(2) 对称的,(3) 传递的,则称 R 是集合 X 上的等价关系。等价关系 R 常以记号"$\sim$"代替。

5. 序关系

等价关系是集合论中的一个重要概念,排序关系是集合论中的另一个重要概念。排序关系在常识中本来是每人都熟悉的概念,比如在实数集合中关系"$\leq$",就把全体实数按照大小排成了一个顺序。集合 A 的幂集上的"$\quad$"关系,将集合中的元素排成了一种顺序,这样的关系被称为序关系。在序关系中,有的能将集合中一切元素都排成序,有的序关系则只存在于部分元素之中。下面先给出偏序关系定义。

定义 2.16 设 R 是集合 A 上的一个关系 $R \quad A\times A$,如果对任意 $x,y,z\in A$,关系 R 都满足下面的 3 个条件

(1) $(x,x)\in R$ (R 是自反的)

(2) 若$(x,y)\in R$ 且$(y,x)\in R \quad x=y$ (R 是反对称的)

(3) 若$(x,y)\in R$ 且$(y,z)\in R \quad (x,z)\in R$ (R 是传递的)

称 R 是集合 A 上的偏序关系,偏序关系一般记为"$\leq$"(或 $=\leq$)。若 $x,y\in A$ 有偏序关系$\leq$,记为 $x\leq y$,称 x 在 y 的前面。

集合 A 与偏序关系$\leq$组成的二元结构$(A,\leq)$称为偏序集,偏序集有时也简记为 A。

例 2.12 建立在自然数集 **N**,整数集 **Z**,有理数集 **Q** 及实数集 **R** 上的通常的不等关系$\leq$,都是这些集合上的偏序关系。如对所有 $a,b,c\in$**N**,显然有(1) $a\leq a$,(2) 若 $a\leq b,b\leq a \quad a=b$,(3) 若 $a\leq b,b\leq c \quad a\leq c$ 等。

在此例中,可以发现集合中任意两元素之间都存在偏序关系$\leq$。

定义 2.17 设在集合 A 上已建立了偏序关系$\leq$,若"$a,b\in A$, $a\leq b$ 或 $b\leq a$,总有一个成立,称这种偏序关系为全序关系或浅序关系。

集合 A 与全序关系$\leq$组成的二元结构$(A,\leq)$称为全序集,全序集有时也简记为 A。上例中(**N**,$\leq$),(**Z**,$\leq$),(**Q**,$\leq$),(**R**,$\leq$)均为全序集。

定义 2.18 设$(A,\leq)$为一偏序集

(1) 若存在一个元素 $a'\in A$,则对于所有 $a\in A$ 均有 $a\leq a'$,称 a'为偏序集 A 的最大元;若对于所有 $a\in A$ 均有 $a'\leq a$,则称 a'为偏序集 A 的最小元。

(2) 若存在一个元素 $a\in A$,另一个元素 $a'|\ A$,使得 $a\neq a'$,而有 $a\leq a'$(即"$a'\in A$ 只要 $a\neq a'$,则 $a\leq a'$不成立),则称 a 为偏序集 A 的极大元;若存在一个元素 $a'|\ A$,使得 $a\neq a'$,而有 $a'\leq a$,则称 a 为偏序集 A 的极小元。

显然,最大元、最小元若存在,它们都是惟一的,而极大元、极小元却不一定是惟一的。

定义 2.19 设 A 是偏序集$(X,\leq)$的子集,若存在 $x\in X$,对于一切 $a\in A$ 有 $a\leq x$,则称 x 为 A 的一个上界;若均有 $a\geq x$,则称 x 为 A 的一个下界。

若 $x\in X$ 是 A 的上界,且对每个 A 的上界 $x'\in X$ 均有 $x\leq x'$(上界集的最小元),则称 x

为 A 的上确界，记为 $x=\sup A$；若 $x\in X$ 是 A 的下界，且对每个 A 的下界 $x'\in X$ 均有 $x'\leq x$，则称 x 为 A 的下确界，记为 $x=\inf A$。

例 2.13 集合$\{1,2,3\}$的幂集为 $X=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\}$，则$(X,\leq)$为一偏序集。令 $A=\{\{2\},\{3\}\}\quad X$，则 A 无最大元，极大元为$\{2\},\{3\}$，上界是$\{2,3\},\{1,2,3\}$，上确界为$\{2,3\}$，A 无最小元，极大元为$\{2\},\{3\}$，下界和下确界都是 。

2.2 模 糊 集

2.2.1 基本定义与表示方法

定义 2.20 设 X 是一个经典集合，称为论域，其一般元素用 x 来表示。x 在 X 的经典子集 A 中的隶属度，通常用 X 到$\{0,1\}$的特征函数 μ_A 表示，即

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\mid A\end{cases}$$

$\{0,1\}$称为值集。

若值集是实数区间$[0,1]$，则称 A 为模糊集，μ_A 叫做 A 的隶属函数，$\mu_A(x)$表示 x 隶属于 A 的程度。

$\mu_A(x)$的值越接近于 1，表示 x 隶属于 A 的程度越大。显然，模糊集 A 是 X 的一个没有明确边界的子集，完全由其隶属函数来刻画。特别当 μ_A 的值集取闭区间$[0,1]$的两个端点，即为$\{0,1\}$两个值时，A 便退化为一个普通子集，隶属函数也就退化为一般的特征函数。由此可见，普通集合是模糊集合的特殊情形，而模糊集合是普通集合的推广。

常用的模糊集表示方法有以下 3 种：

(1) 序偶表示法

模糊集 A 可以用序偶表示为

$$A=\{(x,\mu_A(x)),x\in X\}\tag{2.17}$$

(2) 查德表示法

查德提出的标记法是，当 X 为有限集$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$时，X 上的模糊集可表示为

$$A=\mu_A(x_1)/x_1+\cdots+\mu_A(x_n)/x_n=\sum_{i=1}^{n}\mu_A(x_i)/x_i\tag{2.18}$$

当 X 为无限集时，记作

$$A=\int_X\mu_A(x)/x\tag{2.19}$$

例 2.14 $X=\mathbf{N}=\{$正整数$\}$，设 $A=0.1/7+0.5/8+0.8/9+1.0/10+0.8/11+0.5/12+0.1/13$ A 是近似等于 10 的整数模糊集。

例 2.15 $X=\mathbf{R}=\{$实数$\}$，设

$$\mu_A(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{5}(x-10)^2}$$，即 $$A=\int_R\frac{1}{1+\frac{1}{5}(x-10)^2}\mathrm{d}x$$

A 是聚集在 10 附近的实数的模糊集。