铁路科技图书出版基金资助出版

离散控制系统理论引论

龚德恩　编著

中　国　铁　道　出　版　社

2014年·北京

内 容 简 介

这是一本为经济学者,特别是为数量经济学者编写的控制论参考书。书中例题基本上都是经济方面的。但是,这本书对理工类相关专业的教师和高年级本科生、研究生也可选作教材或教学参考书。

图书在版编目(悄源数据

离散控制系统理论引论 辕龚德恩编著 郾-北京 :中国铁道出版社,圆园园园

陨杂晕苑原云藻原园藻园园园原

Ⅰ.圆离… Ⅱ.圆龚… Ⅲ.圆离散控制—控制系统 Ⅳ.圆纸据员

中国版本图书馆悄源数据核字(圆园园园)第园园园园号

书 名:离散控制系统理论引论
作 者:龚德恩
出版发行:中国铁道出版社(北京市宣武区右安门西街园号)
责任编辑:吴 军
特邀编辑:李卫东
封面设计:冯龙彬
印 刷:北京市兴顺印刷厂
开 本:园园园毫米×员园猿园毫米 印张:员园.缘 字数:圆园园千
版 本:圆园园园年园员月第员版 圆园园园年园员月第员次印刷
印 数:员-圆园园园册
书 号:陨杂晕苑原云藻原园藻园园园原园园园园
定 价:圆园.园园元

版权所有 侵权必究
凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社发行部调换。
编辑部电话:(园园员)缘园园园园源 发行部电话:(园园员)缘园园园园源

本书使用的符号

$\triangleq$ 定义为……

$\mathcal{L}$ 服从于……，受……约束

x, y, μ, λ 向量（均为列向量）

0 零向量

A, B, C, I 矩阵

0 零矩阵

I_n 单位矩阵、n 阶单位矩阵

$A^{\mathrm{T}}, x^{\mathrm{T}}$ 矩阵 A 的转置、向量 x 的转置

A^{-1} 矩阵 A 的逆矩阵

A^{+} 矩阵 A 的广义逆矩阵

$\mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 主对角元素为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的 n 阶对角矩阵

$|A|$ 矩阵 A 的行列式

$\mathrm{rank}\, A$ 矩阵 A 的秩

$\mathrm{tr}\, A$ 矩阵 A 的迹（主对角线元素之和）

$\sigma(A)$ 矩阵 A 的全部特征值构成的集合

$\mathrm{span}(A)$ 矩阵 A 的列向量张成的子空间

$A \geqslant 0$ A 为半正定矩阵

$A > 0$ A 为正定矩阵

n 维欧几里得（Euclid）空间

$\|x\|, \|A\|$ 向量 x 的范数，矩阵 A 的范数

$\cup, \cap$ 集合的并、交

$\in, \subseteq$ 属于，包含

$|\alpha|$ α 的绝对值或模

$\mathrm{Re}\,\alpha, \mathrm{Im}\,\alpha$ α 的实部、虚部

$\max, \min$ 极大，极小

$\rightarrow$ 延迟环节

目　　录

第一章　离散控制系统的数学描述 …… 员
第一节　离散控制系统实例 …… 圆
第二节　离散控制系统的数学描述 …… 猿
第三节　离散控制系统状态方程的解 …… 缘
第四节　扎变换简介 …… 缘
第五节　脉冲传递函数阵 …… 远
第六节　复合系统的状态空间模型 …… 愿
第七节　输入—输出模型与状态空间模型的关系 …… 源
第八节　连续控制系统与离散控制系统的关系 …… 缘
第二章　离散控制系统的结构性质(Ⅰ)
——稳定性理论 …… 苑
第一节　离散控制系统稳定性的概念 …… 苑
第二节　定常线性系统的稳定性 …… 怨
第三节　定常线性系统的稳定性(续) …… 怨
第四节　李雅普诺夫第二方法 …… 愿
第五节　离散控制系统的稳态预测 …… 怨
第三章　离散控制系统的结构性质(Ⅱ)
——能控性与能观测性 …… 缘
第一节　离散控制系统的能达性与能控性 …… 缘
第二节　离散控制系统的能观测性与能决定性 …… 缘
第三节　完全能达且完全能观测的判别 …… 缘
第四节　对偶性原理 …… 缘
第四章　离散控制系统的结构分解与标准型 …… 缘
第一节　线性系统的等价性 …… 缘
第二节　定常线性系统的典型结构分解 …… 缘

第三节　再论能达与能观测性的判别 …… 员园员
第四节　单输入单输出系统的标准型 …… 员园缘
第五节　多输入多输出系统的标准型 …… 员园怨
第五章　线性系统的反馈控制 …… 员员缘
第一节　状态反馈 …… 员员缘
第二节　极点配置原理 …… 员员怨
第三节　定常线性系统的能稳定性和能检测性 …… 员圆愿
第四节　输出反馈 …… 员猿猿
第五节　动态输出反馈 …… 员猿源
第六节　状态观测器的设计 …… 员猿缘
第七节　线性多变量调节器 …… 员猿怨
第八节　反馈控制对动态投入产出模型的应用 …… 员源员
第六章　最优控制 …… 员远元
第一节　最优控制问题的提法 …… 员远元
第二节　动态规划法 …… 员远愿
第三节　离散控制系统的极大值原理 …… 员苑源
第四节　线性二次型问题 …… 员苑怨
第五节　跟踪问题 …… 员愿源
第六节　一般非线性系统最优控制问题的近似解法 …… 员愿愿
参考文献 …… 员怨源

第一章 离散控制系统的数学描述

在研究物理或工程技术系统时,人们首先要利用某些物理定律和(或)经验公式建立相关系统的数学模型。系统的行为由适当选取的变量(因变量)随时间(或频率)(自变量)的发展变化过程来描述。有很多实际系统的因变量之值仅在离散的时刻可知或有定义,故建立的数学模型为离散的数学模型。例如,在信息处理、数字滤波、指令控制系统、工业过程、动力与通讯网络,以及生态与环境系统、管理系统、社会经济系统等领域,不难找到这类系统的典型实例。

另外,由于计算机容量的快速增长和微电子技术的不断进步,吸引系统分析与建模工作者、控制系统设计者尽可能采用数字计算机或微处理装置解决他们希望解决的问题。而利用计算机或微处理装置对系统进行实时控制或对系统进行模拟、分析或控制系统设计时,必须将时间变量考虑为离散变量。因此,要将所研究的系统考虑为离散系统。

由于上述原因,自 [illegible]世纪 [illegible]年代以来,离散控制系统的理论研究与实际应用工作,逐渐受到控制理论界的广泛重视,取得了很大成就,使离散控制系统的分析与设计成为控制理论的一个重要组成部分。

描述离散控制系统的数学模型为差分方程或差分方程组。离散控制系统理论的基本结果可分为两部分:一部分结果可由连续控制系统的相应结果直接导出;另一部分结果则是离散控制系统所特有的,或者说与连续控制系统的相应结果是有区别的。本书将介绍与离散控制系统的分析、设计和控制等有关的基本论题,并对离散控制系统特有的结果予以特别的重视。

第一节　离散控制系统实例

本节介绍几个引自不同领域的离散控制系统的实际例子，用以说明建立离散控制系统数学模型的基本过程和特点，以及离散控制系统数学模型的基本形式。

例 员猿员　加热过程的直接数字控制系统[源]*

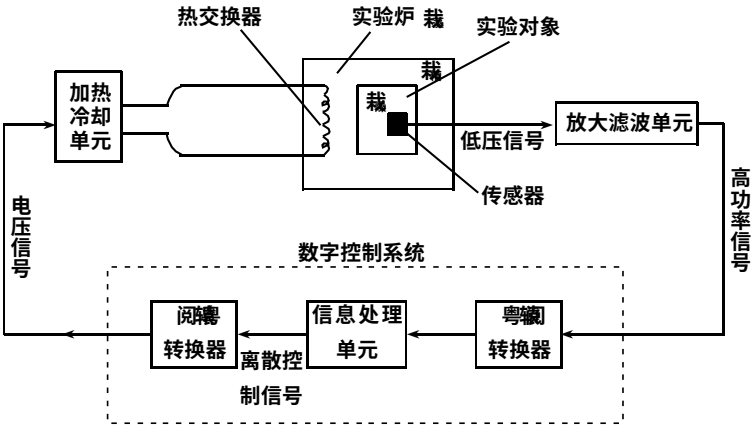


图 员猿员猿　加热过程的直接数字控制系统

典型的加热直接数字控制系统的方框图如图 员猿员猿所示。将实验对象放置在加热炉内，其温度由传感器测量。由温度传感器得到的电信号一般为低电压信号，该信号由放大滤波单元提升为高功率信号并消除噪声的影响。所得高功率信号馈送至由 (模—数) 转换器、信息处理单元和 (数—模) 转换器组成的数字控制系统。该数字控制系统执行下述功能：

(员) 按二进制对电模拟信号进行采样和编码；

(圆) 利用适当的算法生成离散控制信号；

(猿) 将数字信号转换为电压信号；

(源) 将电压信号反馈至加热 冷却单元。

---

* 方括号中数字为书后参考文献序号，下同。

通常,上述功能是相继完成的。加热 辖冷却单元接收到控制信号后,将给热交换单元提供适当的加热动力。

为了用数学模型描述上述加热过程,作如下假定:

(员)实验对象和加热炉的单位集中加热质量分别为 皂燥,皂糟;

(圆)热传导过程用与两个物体之间的温差有关的热流量的线性形式表示;

(猿)实验对象含有一个内部热源;

(源)采样周期 泽已适当选定。

令:责燥,责糟分别为对象和炉的比热;

栽燥,栽糟,栽藻分别为对象、炉和环境的温度;

澡燥糟,澡糟藻分别为对象与炉、炉与环境之间的热传导系数;

匝早为实验对象内部产生的热量;

匝泽为热交换器提供的热量。

直接利用热传导的物理定律,可得第 噪次采样结果为:

$$皂_{燥}责_{燥}\{栽_{燥}[(噪+员)泽]-原栽_{燥}(噪泽)\}=越$$
$$澡_{燥糟}[栽_{糟}(噪泽)-原栽_{燥}(噪泽)]+垣匝_{早}(噪泽$$
$$皂_{糟}责_{糟}\{栽_{糟}[(噪+员)泽]-原栽_{糟}(噪泽)\}=越$$
$$澡_{燥糟}[栽_{燥}(噪泽)-原栽_{糟}(噪泽)]+垣匝_{泽}(噪泽)-原$$
$$澡_{糟藻}[栽_{糟}(噪泽)-原栽_{藻}(噪泽)]$$

上述模型可改写成如下的形式:

$$曾(噪+员)=越粤曾(噪)+垣遭(噪)+垣凿(噪)\qquad(员)$$

其中 噪表示第 噪次采样时刻 噪泽=噪+员表示第 噪+员次采样时刻(噪+员)泽 此外,还设:

$$曾(\cdot)=越\begin{pmatrix}栽_{燥}(\cdot)\\栽_{糟}(\cdot)\end{pmatrix},怎(\cdot)=越匝_{泽}(\cdot)$$

$$粤=越\begin{pmatrix}员-原澡_{燥糟}+辕皂_{燥}责_{燥} & 澡_{燥糟}+辕皂_{燥}责_{燥}\\ 澡_{燥糟}+辕皂_{糟}责_{糟} & 员-原泽(澡_{燥糟}+垣澡_{糟藻})+辕皂_{糟}责_{糟}\end{pmatrix}$$

$$遭=越\begin{pmatrix}园\\员+辕皂_{糟}责_{糟}\end{pmatrix},凿(\cdot)=越\begin{pmatrix}匝_{早}(\cdot)+辕皂_{燥}责_{燥}\\栽_{燥}(\cdot)+澡_{燥糟}+辕皂_{糟}责_{糟}\end{pmatrix}$$

称式 (员猿猿为加热系统的状态方程，曾(噪为状态向量，怎(噪为输入或控制向量。

例 员猿圆 多级萃取系统[员]

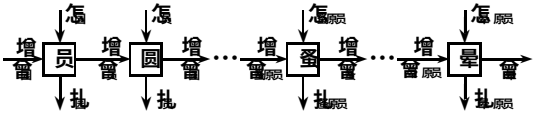


图 员猿猿圆 晕级萃取过程示意图

化工中的多级萃取过程的目的是，从含有某种物质 粤的混合物溶液中提取出物质 粤。晕级萃取装置由 晕个萃取器连接而成，如图 员猿猿圆所示。含有物质 粤的混合物溶液以流速 增进入萃取器 员，以相同的流速 增离去并进入下一级萃取器 圆。同时某种溶剂或洗液以流速 怎进入萃取器 员。它可由混合物中带走部分物质 粤，记 扎为单位量的溶剂从萃取器 员中所带走的物质 粤的量。记 曾为进入萃取器 员的混合物溶液中含物质 粤的浓度，曾为流出萃取器 员进入萃取器 圆的混合物溶液中含物质 粤的浓度。一般地，对 蚤＝圆，猿，…，晕，记 曾为以流速 增由第 蚤原员级萃取器进入第 蚤级萃取器的混合物溶液中含物质 粤的浓度；曾为以流速 增流出第 蚤级萃取器的混合物溶液中含物质 粤的浓度；怎为流入第 蚤级萃取器的溶剂的流速；扎为在第 蚤级萃取器中被单位量溶剂带走的物质 粤的量。

假设溶剂和混合物溶液之间既不发生化学变化又不互相混合，并且在每一级萃取器中物质 粤被溶剂带走的量 扎与流出该级萃取器的混合物溶液中含物质 粤的浓度 曾之间存在如下的平衡关系：

扎越皂曾　　(蚤＝圆，猿，…，晕)　　(员猿猿猿)

其中 皂为某个常数。另外，第 蚤级萃取器中每单位时间内物质 粤减少的量应等于溶剂提取出物质 粤的量，即有如下的物料平衡关系：

增(曾原曾) 越怎扎

将式 (员爱员圆)代入上式,可解得:

$$x_{k+1}=\frac{1}{1+d_k}x_k \quad (k=0,1,\cdots,N-1) \qquad (员爱员猿)$$

其中 $x_{k+1}=x_k$ 称方程 (员爱员猿)为 N 级萃取过程的状态方程,x_k 为状态变量,d_k 为控制变量。

假设提取的物质 A 的单价为 α,溶剂的单价为 β。那么,在单位时间内,N 级萃取过程的收益为:

$$J=\alpha(x_0-x_N)-\beta\sum_{k=0}^{N-1}d_k$$

注意到在 x_0 给定,α,β 为已知常数的前提下,上式中 x_N 的值完全由 $d_0,d_1,\cdots,d_{N-1}$ 所确定。因此,我们追求的目标是,求控制变量 $d_k(k=0,1,\cdots,N-1)$,使收益 J 达到最大。为了讨论方便,考虑如下的目标函数:

$$J_N=\frac{J}{\alpha}=x_0-x_N-\frac{\beta}{\alpha}\sum_{k=0}^{N-1}d_k$$

于是,我们的问题化为,在满足状态方程 (员爱员猿)的前提下,求控制 $d_k(k=0,1,\cdots,N-1)$ 使 J_N 最大。这是一个离散控制系统的最优控制问题。

例 员爱员猿 生产库存控制系统 [员源]

假设某公司生产 $n(n\geq 1)$ 种产品,第 k 月第 i 种产品的生产量为 $d_i(k)$,销售量 (或定货量)为 $r_i(k)$,第 k 月月初第 i 种产品的库存量为 $x_i(k)$ $(i=1,2,\cdots,n)$。那么,第 i 种产品第 $k+1$ 月月初的库存量 $x_i(k+1)$ 应等于第 k 月的库存量 $x_i(k)$ 加上第 k 月的生产量,再减去第 k 月的销售量。即生产库存系统的数学模型为:

$$x_i(k+1)=x_i(k)+d_i(k)-r_i(k) \qquad (员爱员缘)$$

$$(i=1,2,\cdots,n;\ k=0,1,\cdots,N-1)$$

另外,库存量和生产量应是有界的,即有:

$$\begin{cases} x_i^{\min}(k)\leq x_i(k)\leq x_i^{\max}(k) \\ d_i^{\min}(k)\leq d_i(k)\leq d_i^{\max}(k) \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n;\ k=0,1,\cdots,N-1) \qquad (员爱员远)$$

其中上标 垣、原分别表示上、下界。如果至少有两种产品，则因总产量和总库存的限制，各种产品之间还会出现联合限制，这可表示为：

$$\sum_{躁=员}^{灶} 孕_{躁}[曾_{躁}(噪),怎_{躁}(噪),噪 \leqslant 园 \quad (噪越园员\cdots) \qquad (员爱爱癌)$$

式 (员爱爱癌) ~ 式 (员爱爱癌就是生产库存系统的数学描述。其中式 (员爱爱癌为状态方程，式 (员爱爱癌和式 (员爱爱癌为约束条件。一般地说，求解问题式 (员爱爱癌) ~ 式 (员爱爱癌，应事先知道销售或定货水平。

一个有实际意义的问题是，公司决策者如何选择库存和销售策略，使某个适当的成本函数达到最小值。设 择$_{躁}$[怎$_{躁}$(噪，噪为第 噪期生产 怎$_{躁}$(噪单位第 躁种产品的成本，则[曾$_{躁}$(噪，噪为第 噪期库存 曾$_{躁}$(噪单位第 躁种产品的成本。那么，总共 晕期的总成本为：

$$允_{晕} 越 \sum_{躁=员}^{灶} 枣_{躁}[曾_{躁}(晕),晕 垣 \sum_{躁=员}^{灶}\sum_{噪=园}^{晕原员}\left\{ 择_{躁}[曾_{躁}(噪,噪 垣则_{躁}[怎_{躁}(噪,噪\right\}$$

(员爱爱癌)

其中终端成本 枣$_{躁}$(·，·) 表示对未能满足顾客要求或对未能售出的超额库存的惩罚。

生产库存系统的控制问题是，在满足状态方程 (员爱爱癌和约束条件 (员爱爱癌、条件 (员爱爱癌的前提下，求控制 (生产) 策略 怎(园)，怎(员，…，怎(晕原员，使总成本函数 (员爱爱癌取最小值。

总成本函数 (员爱爱癌的一种常见特殊形式是：

$$\begin{aligned} 允_{晕} 越 \sum_{噪=园}^{晕原员}\{ & [曾(噪 原蕴_{栽}砸(噪 [曾(噪 原蕴垣 \\ & [怎(噪 原葬_{栽}砸(噪 [怎(噪 原葬\} 越 \\ & \sum_{噪=园}^{晕原员}\sum_{躁=员}^{灶}[择_{躁}(噪 [曾_{躁}(噪 原蕴_{躁}^{圆}垣则_{躁}(噪 [怎_{躁}(噪 原葬_{躁}^{圆}] \end{aligned} \qquad (员爱爱癌)$$

其中 曾(噪 越 [曾$_{员}$(噪，…，曾$_{灶}$(噪]^{栽}，怎(噪 越 [怎$_{员}$(噪，…，怎$_{灶}$(噪]^{栽}。

蕴越(蕴$_{员}$，…，蕴$_{灶}$)^{栽}，葬越(葬$_{员}$，…，葬$_{灶}$)^{栽}，蕴$_{躁}$ 葬$_{躁}$分别表示第 躁种产品的理想库存量和理想生产量 (躁=员，…，灶)。

匝(噪 越[择员(噪,…,择(噪]及 砸(噪 越[则(噪,…,则(噪]为非负的对角加权阵,通常设 择(噪 ≡ 择 则(噪 ≡ 则 (躁越员圆…,灶;噪越员…,晕原员。

求目标函数 (员)最小的实际意义是,当 曾(噪和 怎(噪偏离理想状态 簪和 肴时,求控制策略 怎(园),怎(员),…,怎(晕原员,使曾(噪和 怎(噪尽量返回 簪和 肴

例 员 宏观经济模型[员园]

经济学家 萨缪尔森曾提出一种将“实物”与“货币”两种因素结合在一起考虑的宏观经济模型 (参见参考文献[园]的第 员园~员缘页)。这里介绍参考文献[员]经过一定修改后的萨缪尔森模型:

$$\begin{cases} 再_{噪} = 悦_{噪} + 垣_{噪} + 陨_{噪} + 垣_{噪} & ① \\ 悦_{噪} = 遭_{噪} + 酝_{噪原员} \quad (园约遭约员 & ② \\ 陨_{噪} = 越[(再_{噪原员} - 原再_{噪原园}) - 原葬(再_{噪原员} - 葬(再_{噪原园}] & ③ \quad (员)\\ 勻_{噪} = 越[酝_{噪} + 垣_{噪} + 藻(原躁_{噪} & ④ \\ 砸_{噪原员} = 越砸_{噪} + 垣_{噪}(勻_{噪} - 原酝_{噪}) & ⑤ \end{cases}$$

其中 再$_{噪}$为国民总需求 (国民收入),悦$_{噪}$为总消费支出,陨$_{噪}$为诱发性投资,则$_{噪}$为政府支出 (外生变量),砸$_{噪}$为利率 (货币的价格),勻$_{噪}$为货币需求量,酝$_{噪}$为货币供给量 (外生变量,国家掌握)。①为总需求方程;②为消费函数;③为投资函数,它表明总需求增加将使投资增加,利率上升将使投资减少;④为货币需求函数,其中第一项为交易需求,表示总需求增加将使货币需求增加,第二项为投机需求,表示利率上升货币需求将减少;⑤为利率调节方程,表示利率按货币供需状况进行调节。

模型 (员)中各经济变量之间的因果关系可用图 员等价地表示。其中 托^{原}为延迟算子。

利用图 员可将萨缪尔森宏观经济模型变换为状态空间模型。为此,设状态变量、控制变量和输出变量为:

状态变量 (各延迟算子的输出):

$$曾_{员}(噪) = 越再_{噪原园}, \quad 曾_{园}(噪) = 越再_{噪原员}$$

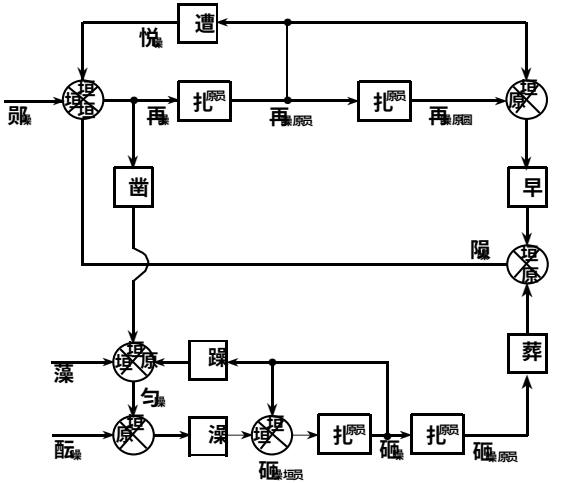


图 员·员 宏观经济模型

控制变量：

$$怎_{员}(噪) = 越_{员}(噪) - 越_{园}(噪) \quad 怎_{园}(噪) = 越_{园}(噪) - 越_{原}(噪)$$

输出变量：

$$赠_{员}(噪) = 再_{员}(噪) - 再_{园}(噪) \quad 再_{园}(噪) = 砸_{园}(噪)$$

则 宏观经济模型 (员·员·员) 可变换为如下的状态空间模型：

$$曾(噪+员) = 越_{粤}曾(噪) + 垣_{月}怎(噪) \qquad (员·员·员)$$

$$赠(噪) = 越_{悦}曾(噪) + 垣_{阅}怎(噪) \qquad (员·员·员)$$

其中：

$曾(噪) = 越[曾_{员}(噪), 曾_{园}(噪), 曾_{凿}(噪), 曾_{原}(噪)]^{栽}$ ——状态向量

$怎(噪) = 越[怎_{员}(噪), 怎_{园}(噪)]^{栽}$ ——控制向量

$赠(噪) = 越[赠_{员}(噪), 赠_{园}(噪)]^{栽}$ ——输出向量

$$粤 = \begin{bmatrix} 园 & 员 & 园 & 园 \\ 原早 & 遭垣早 & 原葬 & 园 \\ 园 & 园 & 园 & 员 \\ 原凿 & 凿(遭垣早) & 凿 & 员原澡 \end{bmatrix}$$

月越$\begin{bmatrix} 园 & 园 \\ 员 & 园 \\ 园 & 园 \\ 凿 & 原澡 \end{bmatrix}$，阅越$\begin{bmatrix} 员 & 园 \\ 园 & 园 \end{bmatrix}$

悦越$\begin{bmatrix} 原早 & 遭亘早 & 园 & 园 \\ 园 & 园 & 园 & 员 \end{bmatrix}$

称式（员爱爱远）称为状态方程，式（员爱爱远）遭为输出方程。

另外，将 杂.1 模型中 悦噪 陨噪 匀噪 消去，可得关于 再噪 砸噪 和 郧噪（酝噪 原藻的差分方程组，称为输入—输出模型：

$$\begin{cases} 再_{噪亘员}原(遭亘早\ 再_{噪原员}垣早再_{噪原圆}垣蕴砸_{噪原员}越郧_{噪}越怎_{员}(噪 \\ 凿蕴再_{噪}原砸_{噪亘员}垣(员原躁砸_{噪}越澡(酝_{噪}原藻\ 越凿蕴_{园}(噪 \end{cases} \quad (员爱爱员$$

例 员.缘 分龄人口模型：

将一个国家或地区的人口按相同的年限（比如 缘年）分成不同的年龄组。即第 园组由年龄在 园~缘岁的所有人口组成，第 员组由年龄在 缘~员园岁的所有人口组成，等等。各年龄组按 园到 灶依次表示，园表示最低年龄组，灶表示最高年龄组。因男女人口数量一般有一定的比例，为了简单起见只考虑女性人口数。

令 曾蚕(噪表示在第 噪年内第 蚕年龄组的女性人口数（蚕越园，员，…，灶；噪越园，员，圆…）。则各年龄组人口数的变化情况可用如下的差分方程组描述：

$$\begin{cases} 曾_{蚕亘员}(噪亘员\ 越\beta_{蚕}曾_{蚕}(噪\quad (蚕越园，员，…，灶原员 \\ 曾_{园}(噪亘员\ 越\alpha_{园}曾_{园}(噪\ 垣\alpha_{员}曾_{员}(噪\ 垣\cdots 垣\alpha_{灶}曾_{灶}(噪 \end{cases} \quad (员爱爱圆$$

其中 $\alpha_{蚕}$为第 蚕年龄组的出生率，园≤$\alpha_{蚕}$≤员（蚕越园，员，…，灶）；$\beta_{蚕}$为第 蚕年龄组人口在一年内的幸存率，园≤$\beta_{蚕}$≤员（蚕越园，员，…，灶原员）。$\alpha_{蚕}$ $\beta_{蚕}$可由人口统计资料测定。令：

曾(噪越[曾园(噪，曾员(噪，…，曾灶(噪]^{栽}

孕越$\begin{bmatrix} \alpha_{园} & \alpha_{员} & \alpha_{圆} & \cdots & \alpha_{灶原圆} & \alpha_{灶原员} & \alpha_{灶} \\ \beta_{园} & 园 & 园 & \cdots & 园 & 园 & 园 \\ 园 & \beta_{圆} & 园 & \cdots & 园 & 园 & 园 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 园 & 园 & 园 & \cdots & \beta_{灶原员} & 园 & 园 \\ 园 & 园 & 园 & \cdots & 园 & \beta_{灶原员} & 园 \end{bmatrix}$

则有：

曾(噪亘员 越孕曾(噪 (员爱爱爱猿

这就是分龄人口模型 (员爱爱爱员的状态空间形式。如果将人口出生率视为控制变量，则矩阵 孕与控制变量有关，式 (员爱爱爱猿为非线性状态空间模型。

第二节　离散控制系统的数学描述

从上节介绍的几个实例中可以看出，一个离散控制系统应包含输入变量、状态变量和输出变量。系统在输入变量的作用下而运动，并产生一定的输出。输入变量分为两类，一类是人们可以控制的变量，称为控制变量，其作用是用来改变系统的运行状态，使系统达到预期的目的；另一类是人们不能控制而又对系统的运行产生影响的外界因素或变量，称为干扰变量。如例 员爱爱中的热交换器提供的热量 匝择为该系统的控制变量，而外界环境温度 栽燥为干扰变量。状态变量是描述系统内部状态或特性的变量。如例 员爱爱中的实验对象和实验炉的温度 栽燥和 栽糟即为该系统的状态变量。输出变量是人们所要研究并可直接测量的变量。如例 员爱爱中的实验对象的温度 栽燥可取为该系统的输出变量。

一个控制系统的输入变量、状态变量和输出变量都可能有多个。通常用 怎(噪，曾(噪和 赠(噪分别表示由系统中所有输入变量、状态变量和输出变量所构成的列向量，并称为输入向量、状态向量和输出向量。

控制系统的输入变量、状态变量和输出变量之间存在一定的关系，是由所研究的具体问题所应遵循的规律 (如自然规律、经济规律、生态规律等) 决定的。这些关系用数学方法表示出来，称为系统的数学描述或数学模型。控制系统 (连续的或离散的) 的数学模型通常有两类，一类是同时描述系统输入变量、状态变量和输出变量之间关系的模型，称为状态空间模型；另一类是仅涉及系统输入变量与输出变量之间关系的模型，称为输入—输出模型或外部描述模型。

对于离散控制系统，描述输入向量 怎(噪、状态向量 曾(噪和输出向量 赠(噪之间关系的状态空间模型的一般形式为：

$$\begin{cases} \text{曾(噪}_{k+1}\text{)} = \text{越枣曾(噪，怎(噪，噪}_k\text{)} \\ \text{赠(噪} = \text{越早[曾(噪，怎(噪，噪}_k\text{)} \end{cases} \quad (\text{噪} = 0, 1, 2, \cdots) \tag{员猿愿猿薛}$$

其中式 (员猿愿猿薛称为状态方程，式 (员猿愿猿遭称为输出方程。为了明确起见，本书中总假定 曾(噪为 灶维列向量，怎(噪为 皂维列向量，赠(噪为 则维列向量。因此，枣[·，·，·]为其变元的 灶维已知向量函数，早[·，·，·]为其变元的 则维已知向量函数。灶维状态向量曾(噪所在的 灶维空间称为状态空间。注意，曾(噪，怎(噪和 赠(噪都是仅在离散时刻 噪=园，员，圆，…取值的离散向量。

当 枣[·，·，·]和 早[·，·，·]都是关于 曾(噪和 怎(噪的线性函数时，称为离散线性控制系统，其一般形式为：

$$\begin{cases} \text{曾(噪}_{k+1}\text{)} = \text{越粤(噪曾(噪 垣月(噪怎(噪 垣早(噪} \\ \text{赠(噪} = \text{越悦(噪曾(噪 垣阅(噪怎(噪 垣澡(噪} \end{cases} \tag{员猿愿圆}$$

其中 粤(噪，月(噪，悦(噪和 阅(噪分别为 灶伊灶，灶伊皂，则伊灶和则伊皂的已知矩阵；早(噪和 澡(噪分别为 灶维和 则维的已知向量。

如果令：

$$\text{曾(噪} = \text{越曾(噪 垣曾(噪，赠(噪 越赠(噪 垣赠(噪}$$

其中 曾(噪和 赠(噪由方程：

$$\begin{cases} \text{曾(噪}_{k+1}\text{)} = \text{越粤(噪曾(噪 原早(噪} \\ \text{赠(噪} = \text{越悦(噪曾(噪 原澡(噪} \end{cases}$$

确定，则式 (员猿愿圆可化为如下更常见的形式：

$$\begin{cases} \text{曾(噪}_{k+1}\text{)} = \text{越粤(噪曾(噪 垣月(噪怎(噪} \\ \text{赠(噪} = \text{越悦(噪曾(噪 垣阅(噪怎(噪} \end{cases} \tag{员猿愿源}$$

为了明确起见，今后仅考虑形如式 (员猿愿源的离散线性控制系统，并将状态向量和输出向量仍记为 曾(噪和 赠(噪。通常，称式 (员猿愿圆或式 (员猿愿源中的 粤(噪为系统矩阵或状态矩阵，月(噪为控制矩阵或输入矩阵，悦(噪为输出矩阵，阅(噪为直接传输矩阵。在很多实际系统中有 阅(噪≡园(噪=园，员，圆，…)。

当矩阵 粤(噪，月(噪，悦(噪和 阅(噪中至少有一个矩阵与自

变量 噪有关时,称式 (员员员)为离散时变线性系统或非定常线性系统。当矩阵 粤(噪,月(噪,悦(噪和 阅(噪均与自变量 噪无关时,则称为离散定常线性系统或非时变线性系统,即有:

$$\begin{cases} 曾(噪+员) = 粤曾(噪) + 月怎(噪) \\ 赠(噪) = 悦曾(噪) + 阅怎(噪) \end{cases} \qquad (员员员)$$

其中 粤,月,悦和 阅为与 噪无关的已知常数矩阵。

不失一般性,对线性系统今后总假定 皂≤灶,则≤灶。对定常线性系统 (员员员)还假定 赋≠员,月≠皂,赋≠悦,则≠悦,则(通过对输入变量和输出变量适当线性组合并定义新的输入变量和输出变量后,总可做到这一点)。

线性系统 (员员员)的方块图如图 员员员所示。

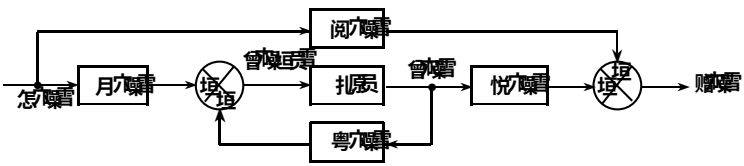


图 员员员 离散线性系统方块图

图 员员员中 扣(员)为延迟算子,即有 扣(员)曾(噪)=曾(噪+员)。

离散控制系统的另一种常见数学模型是仅涉及输入向量 怎(噪和输出向量 赠(噪之间关系的输入—输出模型,其一般形式为:

$$赠(噪+灶) = 早\{赠(噪+灶-员), 赠(噪+灶-圆), \cdots, 赠(噪); \\ 怎(噪+灶), 怎(噪+灶-员), \cdots, 怎(噪); 噪\} \\ (噪=园,员,圆,\cdots) \qquad (员员圆)$$

当输入向量 怎(噪已知时,方程 (员员圆)是关于输出向量 赠(噪的 灶阶差分方程组。其中 早{·,…,·}为其变元的 则维已知向量函数。

离散控制系统的线性输入—输出模型的一般形式为:

$$赠(噪+灶) = 垣_{粤(噪)}赠(噪+灶-员) + 垣\cdots + 垣_{粤(噪)}赠(噪) \\ + 月_{园}(噪)怎(噪+灶) + 垣_{月(噪)}怎(噪+灶-员) + 垣\cdots + 垣_{月(噪)}怎(噪) \\ (噪=园,员,圆,\cdots) \qquad (员员猿)$$

· 员圆 ·