

高等学校教材

# 金属塑性变形与轧制原理

吕立华 主编

本书系统讲述了金属加工变形中变形物体内部应力及变形分布,金属流动及变形的基本规律,金属的塑性和变形抗力,摩擦与润滑等基础理论,确定变形力、变形功的理论及方法;较详细地介绍了轧制过程的基本概念,金属在轧制过程中的变形规律,工程计算法求解轧制过程的变形力、变形功及轧制力矩,连轧过程,轧制时的弹塑性曲线等基础理论。

本书可作为高等院校材料科学与工程专业及相近学科教材,也可作为从事材料加工专业领域的工程技术人员参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

金属塑性变形与轧制原理/吕立华主编. —北京:化学工业出版社, 2006.9

高等学校教材

ISBN 7-5025-9482-5

I. 金… II. 吕… III. ①金属-塑性变形-高等学校-教材②金属-轧制理论-高等学校-教材 IV. ①TG111.7  
②TG331

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第117971号

---

高等学校教材  
金属塑性变形与轧制原理

吕立华 主编

责任编辑:陶艳玲

责任校对:王素芹

封面设计:潘峰

\*

化学工业出版社出版发行

(北京市朝阳区惠新里3号 邮政编码 100029)

购书咨询:(010)64982530

(010)64918013

购书传真:(010)64982630

<http://www.cip.com.cn>

\*

新华书店北京发行所经销

北京市彩桥印刷有限责任公司印装

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 14½ 字数 352千字

2007年1月第1版 2007年1月北京第1次印刷

ISBN 7-5025-9482-5

定价:26.00元

---

版权所有 违者必究

该书如有缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责退换

# 前 言

《金属塑性变形与轧制原理》一书是根据材料科学与工程专业的教学大纲和作者多年的教学科研体会，参阅国内外塑性加工力学和轧制理论等方面的有关文献资料编写而成的。本书系统讲述了金属塑性加工学的基础理论和轧制原理两方面内容，详细阐述了该专业所必需的基本理论与实际知识：前者主要讨论了加工变形中变形物体内部应力及变形分布，金属流动及变形的基本规律，金属的塑性和变形抗力，摩擦与润滑等基础理论，确定变形力、变形功的理论及方法；后者较详细地介绍了轧制过程的基本概念，金属在轧制过程中的变形规律，工程计算法求解轧制过程的变形力、变形功及轧制力矩，连轧过程，轧制时的弹塑性曲线等基础理论。

本书编写力求做到物理概念阐述简单明了，深入浅出，保持理论的系统性，为便于课堂讲授和学生自学，希望学习者有一定的金属学和加工力学的理论基础。

本书可作为高等院校材料科学与工程专业及相近学科教材外，也可作为从事材料加工专业领域的工程技术人员参考。

本书由重庆大学吕立华副教授于1991年出版的《轧制理论基础》，通过长期从事本专业的教学和科研工作的体会，重新修订出版。

全书由吕立华副教授主编和审定。参加本书编写的有重庆大学吕立华（第1~3章、第7章、第9~11章）、刘维广（第6章）、张勇伟（第5章）、詹华（第4章），重庆科技学院马靳江（第8章）、刘饶川（第12章）。

由于编者水平有限，加之编写时间仓促，书中难免有不当和疏漏之处。敬请广大读者批评指正。

编 者  
2006年6月

# 目 录

绪论 .....	1
0.1 金属塑性成形技术的作用 .....	1
0.2 金属塑性成形方法的分类 .....	1
0.2.1 按温度特征分类 .....	1
0.2.2 按受力和变形方式分类 .....	2
0.3 金属塑性变形与轧制原理的基本内容 .....	3
1 应力及变形理论 .....	4
1.1 外力和应力 .....	4
1.2 直角坐标系中一点的应力状态 .....	5
1.3 应力平衡微分方程 .....	6
1.4 斜面上的应力 .....	8
1.5 主应力和应力不变量 .....	9
1.6 主剪应力和最大剪应力 .....	11
1.7 八面体应力 .....	13
1.8 球应力分量与偏差应力分量 .....	14
1.9 变形与位移的关系方程 .....	16
1.9.1 变形基本概念 .....	16
1.9.2 应变分量 .....	16
1.9.3 应变与位移的关系——几何方程 .....	17
1.9.4 一点应变、主应变、应变不变量、最大剪应变 .....	20
1.9.5 球应变分量和偏应变分量，八面体应变和等效应变 .....	21
1.10 应力与应变的关系 .....	22
1.10.1 弹性变形时应力与应变的关系 .....	22
1.10.2 塑性变形时应力与应变的关系 .....	23
1.10.3 塑性变形增量理论 .....	24
1.10.4 塑性变形的全量理论 .....	25
1.11 屈服条件 .....	25
1.11.1 屈雷斯加屈服条件（最大剪应力不变条件） .....	26
1.11.2 米塞斯屈服条件（弹性形变能不变条件） .....	26
1.11.3 屈服条件的几何解释 .....	27
1.11.4 屈服条件的简化形式 .....	29
习题 .....	30
2 金属塑性变形流动规律 .....	31
2.1 金属塑性变形时的体积不变条件 .....	31
2.2 金属流动及最小阻力定律 .....	35
2.2.1 最小阻力定律 .....	35

2.2.2	不均匀流动和不均匀变形	35
2.2.3	基本应力和附加应力	37
2.3	变形及应力不均匀分布的原因和后果	38
2.3.1	引起变形及应力不均匀分布的原因	38
2.3.2	变形及应力不均匀分布的后果	41
2.3.3	减轻变形及应力不均匀分布的措施	42
2.4	残余应力	42
2.4.1	残余应力所引起的后果	42
2.4.2	减轻或消除残余应力的措施	43
2.4.3	残余应力的检测方法	43
2.5	变形及应力的实验分析	45
2.5.1	网格法	45
2.5.2	硬度法	45
2.5.3	光弹塑性实验法	45
2.5.4	云纹法	47
	习题	47
3	金属的塑性和变形抗力	48
3.1	塑性和变形抗力的概念	48
3.1.1	金属塑性的基本概念及测定方法	48
3.1.2	测定塑性指标的方法	48
3.1.3	塑性状态图(塑性图)	49
3.1.4	变形抗力概念	50
3.2	影响金属变形抗力的因素	51
3.2.1	金属化学成分及组织状态的影响	51
3.2.2	温度对变形抗力的影响	52
3.2.3	变形速度的影响	53
3.2.4	变形程度的影响	54
3.2.5	应力状态对变形抗力的影响	56
3.2.6	其他因素	56
3.3	影响金属塑性的因素	58
3.3.1	影响金属塑性的内部因素	58
3.3.2	影响金属塑性的外部因素	60
3.3.3	提高塑性的途径	64
	习题	64
4	金属塑性成形过程摩擦与润滑	65
4.1	金属塑性成形时外摩擦	65
4.1.1	外摩擦的定义及特点	65
4.1.2	金属塑性成形时摩擦的分类	65
4.1.3	黏着摩擦理论	66
4.1.4	分子-机械摩擦理论	67
4.1.5	塑性成形过程常用的摩擦定律	67

4.2	影响外摩擦系数的主要因素	68
4.2.1	工具表面粗糙度的影响	68
4.2.2	金属化学成分的影响	69
4.2.3	变形温度的影响	69
4.2.4	变形速度对摩擦系数的影响	69
4.2.5	接触面上单位压力的影响	70
4.3	摩擦系数的确定方法	70
4.3.1	夹钳-轧制法	70
4.3.2	圆环镦粗法	71
4.4	塑性成形时的润滑	71
4.4.1	对润滑剂的要求	71
4.4.2	润滑剂的分类	71
4.4.3	润滑剂中的添加剂	72
	习题	73
5	变形力和变形功	74
5.1	长矩形板镦粗时的变形力	74
5.2	用主应力法求全滑动摩擦时平面镦粗的变形力和平均单位压力	78
5.3	混合摩擦时平面镦粗的单位压力公式	79
5.4	用主应力法求圆柱体镦粗时变形力	84
5.5	变形功的确定	90
5.6	滑移理论法	93
5.6.1	滑移线与滑移线场	93
5.6.2	汉基定理	95
5.7	功平衡法	98
5.8	极值原理法	100
5.8.1	上限法	100
5.8.2	下限法	100
5.9	有限单元法	102
5.9.1	有限单元法简介	102
5.9.2	塑性有限单元法	103
5.9.3	有限单元法的分析步骤	104
5.9.4	应用实例	104
	习题	106
6	轧制过程的基本概念	107
6.1	变形区及其参数	107
6.2	咬入条件与稳定轧制过程	110
6.2.1	咬入条件	110
6.2.2	稳定轧制过程	111
6.3	金属在变形区内各不同横断面上的流动速度	113
6.4	轧制时金属的不均匀变形	114
6.4.1	薄轧件的变形 ( $l/\bar{h} > 2 \sim 3$ )	115

6.4.2	中等厚度轧件的变形 ( $2 \sim 3 \geq l/\bar{h} \geq 0.5 \sim 1.0$ )	115
6.4.3	厚轧件的变形 ( $l/\bar{h} < 0.5 \sim 1$ )	116
6.5	轧制时平均变形速度及平均变形程度的确定	116
6.5.1	平均变形速度	116
6.5.2	平均变形程度	117
6.6	轧制时变形温度的确定	118
6.6.1	传热学基本理论	118
6.6.2	热轧和冷轧时温度制度的特点	120
6.6.3	轧制温度降计算	121
6.7	轧制时变形抗力的确定	125
6.7.1	实验公式法	125
6.7.2	计算图表法	127
6.7.3	回归模型法	128
	习题	131
7	轧制过程中金属的横变形——宽展	132
7.1	宽展的组成和种类	132
7.2	各种轧制因素对宽展的影响	134
7.2.1	压下量的影响	134
7.2.2	轧辊直径的影响	135
7.2.3	轧件宽度的影响	135
7.2.4	摩擦系数的影响	136
7.2.5	轧制道次对宽展的影响	137
7.3	宽展的计算	138
	习题	141
8	轧制过程中金属的纵变形——前滑与后滑	142
8.1	轧制时的前滑与后滑	142
8.2	前滑值的计算	143
8.2.1	中性角 $\gamma$ 的确定	143
8.2.2	前滑值的计算	145
8.2.3	影响前滑值的因素	146
8.3	连续轧制中的前滑及有关工艺参数的确定	146
8.3.1	连轧关系和连轧系数	146
8.3.2	前滑系数和前滑值	147
8.3.3	堆拉系数和堆拉率	148
8.3.4	连轧张力及张力轧制	149
	习题	153
9	轧制单位压力的计算	154
9.1	轧制压力的概念	154
9.2	计算轧制单位压力的理论	155
9.3	卡尔曼单位压力微分方程式	155
9.3.1	卡尔曼微分方程式的假设条件	156

9.3.2	卡尔曼单位压力微分方程式推导	156
9.3.3	单位压力微分方程的求解	157
9.4	采利柯夫单位压力公式	158
9.5	奥罗万单位压力微分方程式	162
9.6	西姆斯单位压力公式	165
9.7	勃兰特-福特单位压力公式	166
9.8	混合摩擦的轧制单位压力公式	168
9.8.1	第一类轧制过程 ( $l/\bar{h} > 5$ )	168
9.8.2	第二类轧制过程 ( $l/\bar{h} = 2 \sim 5$ )	171
9.8.3	第三类轧制过程 ( $l/\bar{h} = 0.5 \sim 2$ )	171
9.8.4	第四种类型 ( $l/\bar{h} < 0.5$ )	171
	习题	172
10	轧制压力的计算	173
10.1	接触面积的确定	173
10.1.1	简单轧制过程	173
10.1.2	孔型轧制	173
10.1.3	考虑轧辊弹性压扁	175
10.2	计算平均单位压力	177
10.2.1	按采利柯夫公式计算平均单位压力	177
10.2.2	计算平均单位压力的西姆斯公式	180
10.2.3	勃兰特-福特轧制压力公式	181
10.3	斯通公式	185
10.4	其他轧制压力公式	189
10.4.1	爱克伦得单位压力公式	189
10.4.2	适合初轧条件的平均单位压力公式	191
10.4.3	适合简单断面的轧制平均单位压力公式	191
10.4.4	志田公式	191
	习题	192
11	轧机传动力矩及功率	193
11.1	轧制力矩	193
11.1.1	轧制力矩的概念	193
11.1.2	简单轧制条件下总压力的方向及力矩的确定	193
11.1.3	单辊驱动时总压力方向及力矩	195
11.1.4	轧辊直径不同时总压力方向及力矩	196
11.1.5	有前后张力作用轧制时总压力的方向及力矩	197
11.1.6	四辊轧机轧辊上作用力的方向及力矩	198
11.2	电动机传动轧辊所需力矩和功率	202
11.2.1	电机传动轧辊所需力矩	202
11.2.2	轧制力矩 $M_r$	202
11.2.3	附加摩擦力矩的确定	205
11.2.4	空转力矩的确定	205
11.2.5	动力矩的确定	206

11.2.6 轧制功率的确定 .....	206
11.3 电机负荷图 .....	207
11.3.1 速度制度 .....	207
11.3.2 绘制静负荷图 .....	209
11.3.3 可逆式轧机的负荷图 .....	210
11.3.4 电动机容量的选择和校核 .....	211
习题 .....	212
12 轧制时的弹塑性曲线 .....	213
12.1 轧件的塑性曲线 .....	213
12.2 轧机弹性曲线和弹跳方程 .....	214
12.2.1 轧机弹性曲线 .....	214
12.2.2 轧机刚度及弹跳方程 .....	214
12.2.3 刚度系数的测量方法 .....	215
12.3 轧制时的弹塑性曲线 .....	216
12.3.1 轧制弹塑性曲线 $P-H$ 图 .....	216
12.3.2 辊缝转换函数 .....	218
12.3.3 轧制弹塑性曲线的意义 .....	219
习题 .....	219
参考文献 .....	220

# 绪 论

## 0.1 金属塑性成形技术的作用

金属塑性成形技术是利用金属的塑性，在外力作用下改变其原始形状、尺寸和性质，从而获得人们所需要的成品和半成品的一种加工方法。又称之为金属压力加工。

金属压力加工时，如不计切头、切尾、火耗等损失，加工过程中可以看作加工前、后重量不变，所以又叫无屑加工。金属压力加工与其他加工成形方法（铸造，切削，焊接等）相比具有如下优点。

① 金属材料经过相应的压力加工后，不但其形状，尺寸发生了变化，其内部组织和各种机械-物理性能都得到改善和提高。

② 利用金属压力加工方法得到的产品，由于近年来采用先进的技术和装备，精度日益提高。这些零件可进行少量的切削加工，甚至直接用于机械制造工业之中，这样既节约了金属又节省了能耗。

③ 金属压力加工方法具有很高的生产效率适合于大批量生产，成本低。

由于金属压力加工具有这些优点，因而占钢铁总产量 90% 以上都要采用金属压力加工方法获得成品和半成品。

## 0.2 金属塑性成形方法的分类

金属压力加工方法很多，目前分类方法也不统一，本书主要按加工时工件的变形温度特征和工件变形时受力及变形方式来分类。

### 0.2.1 按温度特征分类

① 热加工 在充分（完全）再结晶温度以上的温度范围内所完成的加工过程。一般是在其熔点热力学温度 0.75~0.95 倍的范围内。

② 冷加工 在完全不产生组织的恢复和再结晶的温度下的加工过程。一般是在其熔点热力学温度 0.25 倍以下，基本上是在室温条件下完成的加工过程。

③ 温加工 将金属加热到室温以上至再结晶开始温度以下进行的变形过程，称为温加工。

热加工是为了降低金属变形时的变形抗力和提高金属的塑性，从而获得外观尺寸精确和强度高、组织性能良好的产品。热加工时，为了获得优质产品，近年来常常采用控制加热温度、变形终了温度、变形温度和加工后金属材料冷却速度等新工艺，从而提高金属材料的强度和韧性。

冷加工的实质是：冷加工—退火—冷加工……成品退火等工序，可以得到表面光洁、尺寸精确、形状规整、组织性能良好的产品。

温加工的目的有的是为了降低变形抗力（如奥氏体不锈钢温轧）；也有的是为了在韧性不显著降低时提高钢材的强度。如合金结构钢在低温过冷不稳定奥氏体区进行温轧，然后冷却下来获得微细结构的马氏体，并进行回火，从而得到具有一定韧性的高强度钢。

## 0.2.2 按受力和变形方式分类

由压力的作用使金属产生变形的的方式有锻造、轧制和挤压

① 锻造 锻造是借助于锻锤和各种压力机压缩工件而实现塑性加工变形的一种工艺过程。其特点是锻造工具只做直线运动，并且是间隙、断续地动作，如图 0.1。

② 轧制 金属坯料通过转动的轧辊受到压缩，使其横断面减小、形状改变、长度增加性能提高的过程。轧制又可分为纵轧、横轧和斜轧。

(a) 纵轧 见图 0.2。工作轧辊旋转方向相反，轧件的运动方向与轧辊轴线相垂直。

(b) 横轧 见图 0.3。工作轧辊旋转方向相同，轧件运动方向与轧辊轴线相平行，轧件与轧辊同步旋转。

(c) 斜轧 见图 0.4。工作轧辊的旋转方向相同，轧件的运动方向与轧辊轴线成一定的倾角。

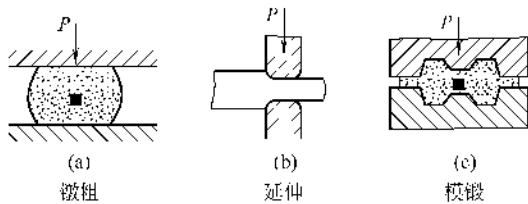


图 0.1 锻造

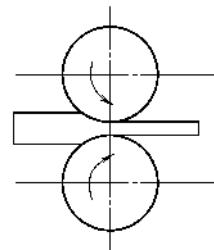


图 0.2 纵轧

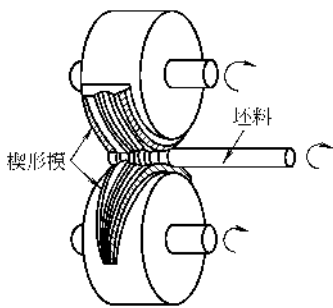


图 0.3 横轧

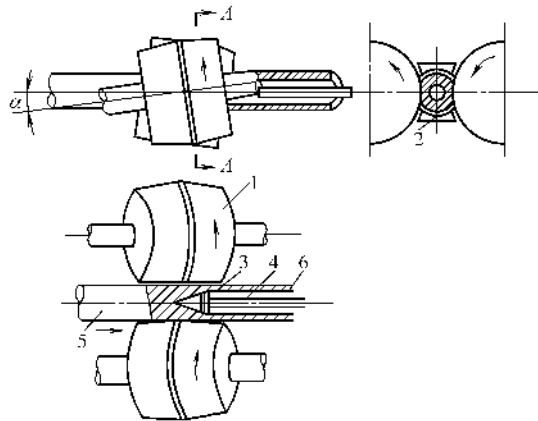


图 0.4 斜轧

1—轧辊；2—导板；3—顶头；4—顶杆；5—管坯；6—毛管

利用轧制方法，可以获得板材、带材、简单断面和异型断面的型材、管材、各种周期断面型材等。

③ 挤压 把坯料放在挤压筒中靠水压机的推头（或挤压杆）使金属从一定形状和尺寸的模孔中挤出，获得符合模子（截面形状）的型材和管材。挤压分为正挤压和反挤压。正挤压时，挤压杆的运动方向和从模孔中挤出的金属方向一致；反挤压时挤压杆的运动方向和从模孔中挤出的金属方向相反，如图 0.5 和图 0.6。

④ 拉拔 将大截面坯料通过一定形状和尺寸的模孔中拉出的成形方法，如图 0.7 利用拉拔可以产生各种断面的型材、线材和管材。

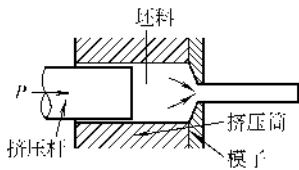


图 0.5 正挤压

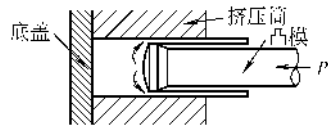


图 0.6 反挤压

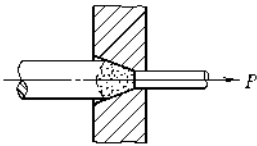


图 0.7 拉拔

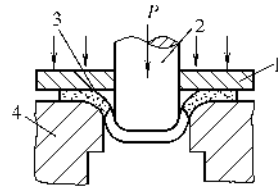


图 0.8 冲压

1—压边；2—凸模；3—坯料；4—凹模

⑤ 冲压（拉延） 压力机的冲头把板料顶入凹模中进行拉延，加工方法如图 0.8，可生产各种薄壳零件或成品。

金属塑性成形方法还有弯曲、剪切和组合变形等方法。

### 0.3 金属塑性变形与轧制原理的基本内容

塑性成形方法很多，尽管各有其特点，但是都是建立在共同的金属学和塑性加工力学基础上。本书将着重阐述下列内容：

① 在学习有关塑性力学、金属学理论知识的基础上，掌握塑性变形时金属流动和变形分布的基本规律，分析影响金属塑性和变形抗力的各种因素，以寻求最优的加工条件，获得尺寸精度高、性能优良的产品。

② 研究金属塑性成形过程中的摩擦与润滑，以便正确选用塑性成形时的摩擦定律来计算变形力和变形功，采用合理的润滑剂改善塑性加工条件，达到高产低消耗的目的。

③ 在研究加工变形中变形物体内部应力及变形分布的基础上，介绍了材料成形过程中应力应变的分布规律和确定变形力、变形功的主要方法（工程算法、滑移线法、上限法、下限法、有限元法等），主要讨论了工程算法求解锻造、轧制过程的变形力、变形功及轧制力矩等，以便正确选择压力加工设备和加工工具的结构和强度。

④ 详细讲述了轧制过程的基本概念、金属在轧制过程中的变形规律、连轧过程、轧制时的弹塑性曲线等基础理论。

# 1 应力及变形理论

塑性理论的方法就是假想把物体切成无数个极其微小的体积素——单元微分体。一个单元微分体代表物体的一个质点。根据单元微分体的平衡条件，写出平衡微分方程组。这样，方程就具有微分的形式，问题就归结为解一系列偏微分方程组。

本章主要研究以下几个问题：

- ① 应力，应变概念；
- ② 物体各点应力分量和应变分量函数之间的关系，即平衡微分方程和相容方程；
- ③ 物体内的一点，沿各个不同方向应力之间和应变之间的关系，即一点的应力状态和一点的应变状态的分析；
- ④ 塑性变形时，应力与应变之间的关系，标志进入塑性流动的应力条件即屈服条件或塑性方程等。

## 1.1 外力和应力

物体所承受的外力可以分成两类，一类是作用在物体表面上的力，叫做面力或接触力，它可以是集中力，但更一般的是分布力。第二类是作用在物体每个质点上的力，例如重力、磁力以及惯性力等，叫做体力。塑性成形时，除了少数特殊情况之外，体力相对面力而言是很小的，可以忽略不计。一般都假定面力是静力平衡力系。

物体受外力作用产生变形时，内部各部分因相对位置改变而引起的相互作用称为内力。简言之，物体各质点之间就会产生相互作用的力，叫做内力。在材料力学中，为了对内力进行分析，常假设将物体沿某截面切开，或从节点拆开，取剩下的部分为隔离体，在一定假设条件下，直接利用内力和外力的平衡条件求出切面上的内力分布，这种方法叫做切面法。内力是连续分布的，用截面法确定的内力是这种分布内力的合力。为了描述内力的分布情况，需要引入应力的概念。现考虑一物体，它在外力系  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_8$  作用下处于

平衡状态，如图 1.1 所示。设物体内有任意一点  $Q$ ，过  $Q$  作一法线为  $N$  的平面  $A$ ，将物体切开而移去上半部。这时  $A$  面即可看成是下半部的外表面， $A$  面上作用的内力应该与下半部其余的外力保持平衡。这样，内力的问题就可以当成外力来处理。

在  $A$  面上围绕  $Q$  点取一很小的微面积  $\Delta F$ ，设该面积上内力的合力为  $\Delta P$ ，则定义  $S$  为：

$$S = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} = \frac{dP}{dF}$$

$S$  为  $A$  面上  $Q$  点的全应力。全应力  $S$  可以分解成两个分量，一个垂直于  $A$  面，叫做正应力，一般用  $\sigma$  表示；另一个平行于  $A$  面，叫做剪应力，用  $\tau$  表示。这时，面积  $dF$  可叫做  $Q$  点在  $N$  方向的微分面， $S$ 、 $\sigma$  及  $\tau$  则分别称为  $Q$  点

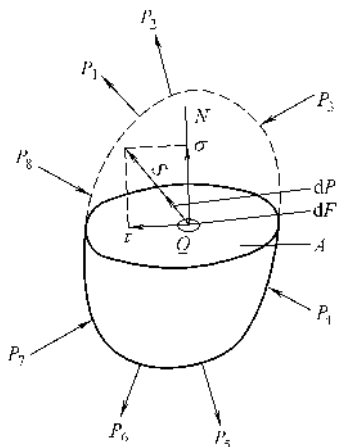


图 1.1 面力、内力和应力

在  $N$  方向微面上的全应力、正应力及剪应力。

通过  $Q$  点可以作无限多的切面。在不同方向的切面上， $Q$  点的应力显然是不同的。现以单向均匀拉伸为例图 1.2 进行分析。设一断面积为  $F_0$  的匀截面棒料承受拉力  $P$ ，通过棒料内一点  $Q$  作一切面  $A$ ，其法线  $N$  与拉伸轴成  $\theta$  角，将棒料切开而移去上半部。由于是均匀拉伸，故  $A$  面上的应力是均匀的。设  $Q$  点在  $A$  面上的全应力为  $S$ ，则  $S$  的方向一定平行于拉伸轴，而大小则为：

$$S = \frac{P}{F_0} = \frac{P}{F_0} \cos\theta = \sigma_0 \cos\theta \quad (1.1)$$

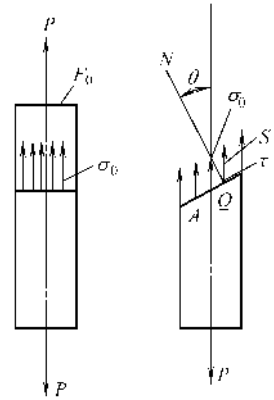


图 1.2 单向均匀拉伸时的应力

式中， $\sigma_0$  即为垂直于拉伸的切面上的正应力。

全应力  $S$  的正应力分量及剪应力分量可用下式求得：

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= S \cos\theta = \sigma_0 \cos^2\theta \\ \tau &= S \sin\theta = \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

在上述这种简单拉伸情况下，只要知道  $Q$  点任意一个切面上的应力，就可以通过式 (1.2) 求得其他截面上的应力。但是，仅仅用某一方向切面上的应力并不足以全面地表示出一点所受应力的情况。为了全面地表示一点受力情况，就需引入“点应力状态”的概念。

## 1.2 直角坐标系中一点的应力状态

一点处的应力与所作用的截面方位有关，同一点沿不同方位的截面上应力是不同的。过一点处所有不同方位的截面上的应力集合称为该点的应力状态。设直角坐标系中有一承受任意力系的物体，物体内有一任意点  $Q$ ，围绕  $Q$  切取一矩形六面体作为单元体，其棱边分别平行于三根坐标轴。取六面体中三个相互垂直的表面作为微分面，如果这三个微分面上的应力为已知，则该单元体任意方向上的应力分量都可以定出。这就是说，可以用质点在三个相互垂直的微分面上的应力完整地描述该质点的应力状态。

三个相互垂直微分面上的应力都可以按坐标轴的方向分成三个分量。由于每个微分面都与一坐标轴垂直而与另两坐标轴平行，故三个应力分量中必有一个是正应力分量，另两个则是剪应力分量。如图 1.3 所示。

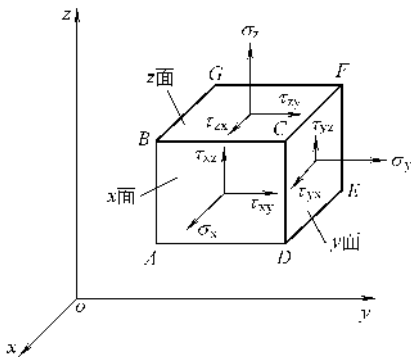
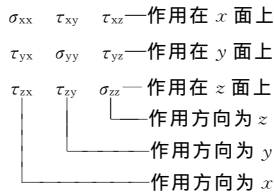


图 1.3 单元体上应力分量

为了清楚地表示出各个微分面上的应力分量，三个微分面都可用各自的法向方向命名，例如图 1.3 中  $ABCD$  面叫  $x$  面， $CDEF$  面叫  $y$  面等。每个应力分量的符号都带有两个下角标。第一个角标表示该应力分量的作用面，第二个角标则表示它的作用方向。由此可见，两个下角标相同的是正应力分量，例如  $\sigma_{xx}$  即表示  $x$  面上平行  $x$  轴的正应力分量。为了简单起见，通常将正应力的第二个角标删掉，于是  $\sigma_{xx}$ 、 $\sigma_{yy}$  及  $\sigma_{zz}$

可分别写成  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  及  $\sigma_z$ 。同样，两个下角标不同的是剪应力分量，例如  $\tau_{xy}$  即表示  $x$  面上平行  $y$  轴的剪应力分量。为了清楚起见，可将九个分量表示如下：



按以上的规则，为表示过一点的单元微分体上的三个相互垂直面上的应力，共需九个应力符号，这些应力分量就是三个正应力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$ ；六个剪应力： $\tau_{xy}$ 、 $\tau_{xz}$ 、 $\tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz}$ 、 $\tau_{zx}$ 、 $\tau_{zy}$ 。它们统称为一点的应力分量。

对各应力分量的正负号按以下方法确定：在单元体上，外法线的指向与坐标轴的正向一致的微分面（图 1.3 中的前、后及上三个面）叫做正面，反之称为负面。在正面上，应力分量指向坐标轴正向的取正号，指向负向的取负号。负面上的应力分量则相反，指向坐标轴负向的为正，反之为负。按此规定，正应力分量以拉为正，以压为负。图 1.3 中画出的剪应力分量都是正的。

### 1.3 应力平衡微分方程

在外力作用下处于平衡状态的变形物体内，各点的应力分量是不同的，但是必须满足应力平衡方程式。下面讨论平衡微分方程用直角坐标系表示。

设物体（连续体）内有一点  $P$ ，其坐标为  $x$ 、 $y$  及  $z$ 。以  $P$  点为顶点切取一个边长为  $dx$ 、 $dy$ 、 $dz$  的平行六面体。平面体另一顶点  $P'$  的坐标为  $x + dx$ 、 $y + dy$  及  $z + dz$ ，如图 1.4。

由于坐标的微量变化，各个应力分量也将产生微量的变化。一般情况下，人们认为应力分量都是坐标的连续函数，而且有连续的一阶偏导数。设  $P$  点

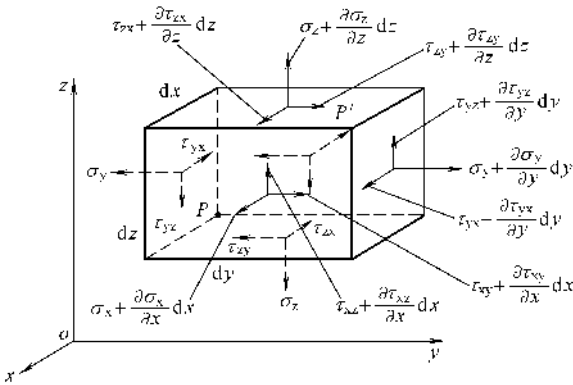


图 1.4 单元体六个面上的应力分量

在  $x$  面上的正应力分量为  $\sigma_x$ ，那么在  $P'$  点的  $x$  面上，由于坐标变化了  $dx$ ，故正应力分量表示为  $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ 。同理，如果以  $\tau_{yx}$  代表  $P$  点作用在  $y$  面上的  $x$  方向剪应力分量，则过  $P'$  点  $y$  面上的  $x$  方向剪应力分量应表示为  $\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$ ，因为这两个面在  $y$  坐标上相差了  $dy$ 。据此，也可以写出其余的应力分量。如图 1.4 所示。如果忽略体积力，则变形体内任意个体素必须满足以下六个静力平衡方程式：

$$\begin{aligned} \sum x = 0 \quad \sum y = 0 \quad \sum z = 0 \\ \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \end{aligned}$$

式中  $\sum x$ 、 $\sum y$ 、 $\sum z$ ——分别为  $x$ 、 $y$  及  $z$  方向的合力；

$\sum M_x$ 、 $\sum M_y$ 、 $\sum M_z$ ——分别为绕  $x$ 、 $y$  及  $z$  轴的合力矩。

由平衡条件  $\sum x=0$ ，有：

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dzdx + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dx dy - \sigma_x dydz - \tau_{yx} dzdx - \tau_{zx} dx dy = 0$$

经整理则得：

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

同理， $\sum y=0$ ， $\sum z=0$ ，分别得：

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

把以上三式联写在一起，则得出质点的三个平衡微分方程式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

这个方程实际上是应力分量函数（它们代表了物体各点的应力分量）间的一组微分关系。凡处于平衡状态的物体，其应力分量函数都应满足这个方程。

下面考虑力矩平衡。以过单元体中心且平行于  $x$  轴的直线为轴线取力矩，由于  $\sum M_x = 0$ ，则：

$$\left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy\right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz\right) dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} = 0$$

忽略微量后可得：

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

同理可得：

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

将上面三式联写在一起，得到任意一点处应力分量的另一组关系式：

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

这个结果表明：任意一点处的六个剪应力分量成对相等，称为剪应力互等定律。由此可得，前节所说一点的九个应力分量中，独立的只有六个应力分量。为了便于表示，把它们写成一个列矩阵，用  $\{\sigma\}$  代表，即：

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

上式称为应力列矩阵。

## 1.4 斜面上的应力

现假定，已知物体内部任意一点的六个应力分量  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$ 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ 、 $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ 。可以证明，过此点所作的任意斜切面上的应力，皆可通过这六个应力分量求出。也就是说，当已知一点上述六个应力分量时，该点的应力状态即可完全确定。

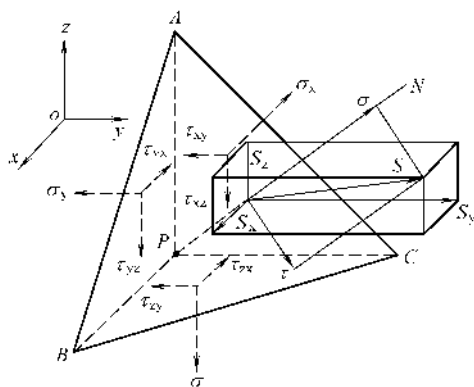


图 1.5 斜切微分面上的应力

取质点  $P$  (单元体) 与坐标系  $xyz$  中的原点  $o$  重合。单元体的六个应力分量已知。现有一任意方向的斜切微分面  $ABC$  把单元体切成一个微小的四面体  $PABC$  (图 1.5)，该微分面上的应力就是质点在任意切面上的应力，它们可以通过四面体  $PABC$  的静力平衡求得。设以  $dF$  表示微分面  $ABC$  的面积，则四面体上其余三个微分面  $PAC$ 、 $PBC$ 、 $PAB$  将分别为  $dF$  面在三个坐标面上的投影，即表示为  $dF_x$ 、 $dF_y$ 、 $dF_z$ 。以  $N$  表示  $ABC$  微分面的外法线， $N$  的方向余弦为  $l$ 、 $m$ 、 $n$ 。令  $l = \cos(x, N)$ 、 $m = \cos(y, N)$ 、 $n = \cos(z, N)$ ，则三个微分面的面积分别是：

$dF_x = ldF$ 、 $dF_y = mdF$ 、 $dF_z = ndF$

$$dF_x = ldF, \quad dF_y = mdF, \quad dF_z = ndF$$

设  $S$  为微分面  $ABC$  上的全应力，它的三个坐标方向的应力分量为  $S_x$ 、 $S_y$  及  $S_z$ 。由静力平衡方程式  $\sum x=0$ 、 $\sum y=0$ 、 $\sum z=0$ ，将有：

$$\left. \begin{aligned} \text{在 } x \text{ 方向} & \quad S_x dF - \sigma_x ldF - \tau_{yx} mdF - \tau_{zx} ndF = 0 \\ \text{在 } y \text{ 方向} & \quad S_y dF - \tau_{xy} ldF - \sigma_y mdF - \tau_{zy} ndF = 0 \\ \text{在 } z \text{ 方向} & \quad S_z dF - \tau_{xz} ldF - \tau_{yz} mdF - \sigma_z ndF = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

整理后得：

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ S_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ S_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$