21 世纪高等学校新理念教材建设工程

结 构 优 化 设 计

郭鹏飞　韩英仕　编著

东 北 大 学 出 版 社

· 沈　阳 ·

图书在版编目（CIP）数据

结构优化设计／郭鹏飞，韩英仕编著．— 沈阳：东北大学出版社，2005.12
（21 世纪高等学校新理念教材建设工程）

ISBN 7-81102-222-2

Ⅰ．结…　Ⅱ．①郭…②韩…　Ⅲ．结构设计—最优设计　Ⅳ．TU318

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 149295 号

内容简介

本书系统阐述了结构优化设计的基本理论和方法，其中包含作者在离散变量结构优化设计领域的部分研究成果。主要内容有：结构优化设计的基本概念、结构优化设计的数学基础、准则优化法、无约束优化设计方法、线性规划、非线性规划、动态规划、几何规划、离散变量结构优化设计的搜索算法、遗传算法理论和改进遗传算法、离散变量结构优化设计的混合遗传算法、离散变量多目标模糊优化的理论和解法。

本书共分 12 章，前 6 章可以作为土木建筑、道路桥梁、水利、机械、车辆、工程力学等各专业本科高年级学生选修教材；全书又可作为工程力学、结构工程等专业研究生教材。本书还可供有关专业的教师、工程技术人员学习、使用。

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市政二公司印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：184mm×260mm
印　　张：8.375
字　　数：220 千字
出版时间：2005 年 12 月第 1 版
印刷时间：2005 年 12 月第 1 次印刷
责任编辑：张德喜　　责任校对：铁　履
封面设计：唐敏智　　责任出版：杨华宁

定　　价：27.00 元

前　　言

结构优化设计是一门新兴的技术科学。它的任务是以现代数学、现代力学的理论与数值方法为基础，以电子计算机为工具，研究工程结构设计优化与自动化的理论与方法。它的出现，使设计者能从被动的分析、校核而进入主动的设计，这是结构设计上的一次飞跃。与常规结构设计方法比较，用优化设计方法可以显著提高工程设计效率和品质，节约设计成本，缩短设计周期。结构优化设计能最合理地利用材料的性能，使结构内部各单元得到最好的协调，并具有规范所规定的安全度。同时，它还可以为整体性方案设计进行合理的决策。优化设计是实现设计的最终目标——适用、安全和经济——的有效途径。因此，国内外相关学者和工程技术人员对工程结构优化设计方法的研究与应用十分重视，并开展了大量的工作。

本书是在作者多年从事结构优化设计教学、科研的基础上编著而成的。书中介绍结构优化设计的基本概念，各种优化设计方法的理论、算法和程序；书中许多内容反映了作者的研究成果，作者对离散变量结构优化设计开展了长期、系统、深入的研究工作，先后提出了一系列的算法，书中对此作了介绍。

全书共分 12 章。第 1 章至第 8 章介绍了结构优化设计的基本概念，结构优化设计的数学基础，常用的各种优化设计方法的理论、算法步骤、计算程序和数值算例。第 9 章至第 12 章介绍了作者在结构优化设计研究领域的成果，包括离散变量结构优化设计的基本概念、理论和直接搜索法——拟满应力方法；离散变量结构优化设计的混合遗传算法；离散变量多目标模糊优化的基本概念、理论和解法。书中还介绍了作者编制的结构优化设计程序系统，该系统是在 Windows 环境下用可视化编程语言 C++ Builder 5 编制开发，包括了结构分析和多种结构优化设计算法，程序系统具有方便的用户使用界面。

由于作者水平有限，本书的论述难免有所疏漏或失误，敬请各位专家和读者不吝赐教。

编　者

2005 年 9 月

目　录

□第 员章摇结构优化设计的基本概念

员员摇概摇述

员援员援员摇传统设计与优化设计

结构的优化设计是相对于传统结构设计而言。

传统的结构设计是设计者根据设计要求，按本人的实践经验，参考类似的工程设计，确定结构方案；然后进行强度、刚度、稳定性等各方面的计算。实际上这里的计算往往只是起一种校核及补充细节的作用，仅仅证实了原方案的可行性。当然，设计者有条件时总是还要研究几个方案来进行比较，从而对结构布局、材料选择、构件尺寸等进行修改，以便得到更为合理的方案。但是，往往由于时间的限制、工作量过大等原因，方案比较这一环节受到很大的限制，有时甚至是不可能的。传统的结构设计的特点是所有参与计算的量必须是以常量出现，用结构优化设计的术语来讲，这种设计是“可行的”而未必是“最优的”。当设计者的经验不足或遇到的是新型结构时，这样的设计一般讲只能是“可行的”设计。

结构优化设计是设计者根据设计要求，在全部可能的结构方案中，利用数学手段，计算出若干个设计方案，按设计者预定的要求，从中选择出一个最好的方案。因而优化设计所得到的结果，不仅仅是“可行的”，而且是“最优的”。这里所说的“最优”，是相对设计者预定的要求而言。“最优”的概念是相对的，随着科学技术的发展及设计条件的变动，最优的标准也将发生变化。优化设计反映了人们对客观世界认识的深化，它要求人们根据事物的客观规律，在一定的物质基础和技术条件下，充分发挥人的主观能动性，得出最优的设计方案。

员援员援圆摇结构优化设计研究的内容

对于设计者评价涉及“优”的标准，在优化设计中称为目标函数。结构设计中的量，以变量形式参与结构优化设计者称为设计变量。设计时应遵守的几何、强度及刚度等条件称为约束条件。

结构优化设计中，选择设计变量，确定目标函数，列出约束条件，称为制定优化设计的数学模型。有了优化设计模型后，还要选择合适的优化方法，进行结构优化设计。

员援员援猿摇结构优化设计的特点

结构优化设计是一种现代的、科学的设计方法，与传统的设计方法相比较，它有如下三个特点：第一，设计的思想是最优设计，需要建立一个确定反映设计问题的数学模型；第二，设计方法是优化方法，一个方案参数的调整是计算机沿着使方案更好的方向自动进行的，从而选出最优方案；第三，设计的手段是计算机，由于计算机的运算速度快，因而可以从大量的方案中选出“最优方案”。结构优化设计是一门新兴的学科，尚不完善，也不够成熟，有待进一步开展科学研究并在实践中加以充实提高。

员圆摇结构优化设计的基本术语

【例 员援员】摇如图 员援员所示两杆桁架结构，材料的许用拉应力为 $[\sigma_{贼}]$，许用压应力为 $[\sigma_{糟}]$，垂直许用位移为 $[\delta]$。要求结构重量最轻，试确定两杆的横截面面积。

解摇(员) 设计变量摇两杆的横截面面积 $粤_员$，$粤_圆$。

(圆) 目标函数摇由于杆件都采用的是钢材，所以结构的重量可以用材料的体积 灾来衡量。

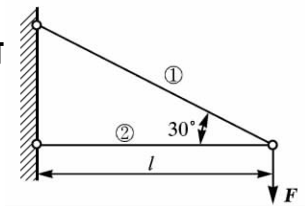

图 员援员

$$灾越粤_员\frac{圆造}{\sqrt{猿}}垣粤_圆造$$

(猿) 约束条件

① 杆的强度条件：$\sigma_员越\frac{云_{晕员}}{粤_员}越\frac{圆云}{粤_员}\leqslant[\sigma_{贼}]$

② 杆的强度条件：$\sigma_圆越\frac{云_{晕圆}}{粤_圆}越\frac{\sqrt{猿}云}{粤_圆}\leqslant[\sigma_{糟}]$

结构的位移条件：$\delta越圆\Delta造_员垣\sqrt{猿}\Delta造_圆越\frac{愿云造}{\sqrt{猿}耘粤_员}垣\frac{猿云造}{耘粤_圆}\leqslant[\delta]$

横截面积必须为正：$粤_员跃园$，$粤_圆跃园$

这个结构优化设计的数学模型可以表达如下：

求设计变量　$粤越\begin{bmatrix}粤_员\\粤_圆\end{bmatrix}$

使目标函数　$灾(粤)越粤_员\frac{圆造}{\sqrt{猿}}垣粤_圆造$

为最小，并满足约束条件

$$\sigma_员越\frac{云_{晕员}}{粤_员}越\frac{圆云}{粤_员}\leqslant[\sigma_{贼}]$$

$$\sigma_圆越\frac{云_{晕圆}}{粤_圆}越\frac{\sqrt{猿}云}{粤_圆}\leqslant[\sigma_{糟}]$$

$$\delta越圆\Delta造_员垣\sqrt{猿}\Delta造_圆越\frac{愿云造}{\sqrt{猿}耘粤_员}垣\frac{猿云造}{耘粤_圆}\leqslant[\delta]$$

$$粤_员跃园，粤_圆跃园$$

摇摇通过上面所举例子，可以归纳出几个常用术语和定义。结构优化设计首先要把结构设计问题转化为优化设计的数学模型，该模型一般由设计变量、目标函数、约束条件 猿个要素构成。

员援圆援员摇设计变量

优化设计中参与设计的量可以是常量也可以是变量，凡参与结构优化设计的变量称为设计变量。它是结构优化设计中要求解的主要对象。

设计变量可以是结构构件的截面参数，如截面面积、截面惯性矩等，也可以是和结构整

体有关的几何参数，如节点坐标、柱的高度、梁的间距等，还可以是有关结构材料的参数，如材料的弹性模量、混凝土标号，甚至复合材料的层数等。

设计变量的个数愈多，则结构优化问题愈复杂，所需的计算时间也愈长；另一方面，设计变量愈多，设计的自由度愈大，可望取得的结果愈好。所以设计者要精心选择那些对优化结果最有影响的参数作为设计变量，而且要合理地选择设计变量的数目。

设计变量有的是连续的，有的则是离散的。如钢筋的截面积、型钢的惯性矩等都必须是产品所提供的规格，因而是离散的。

员援圆援圆摇目标函数

目标函数是设计变量的函数，它是用来评价目标函数优劣的数学关系式。优化设计就是从许多可行的设计中，以目标函数为标准，找出这个函数的极值（极大或极小），从而选出最优设计。

结构的体积、重量、刚度、造价、变形、承载力、自振频率、振幅等都可以根据需要作为优化设计中的目标函数。然而，最常用的目标函数是结构的重量和成本。

在结构优化设计中，有时不仅要求重量最轻，而且同时要求成本低，这时可采用加权目标函数，如

$$枣载 \ 越\alpha\ (重量)\ 垣\beta\ (成本)$$

式中的 α，β 为加权参数，随着具体要求的不同，两者的比例可以调整。

目标函数的取法不同，会导致不同的优化结果，所以合理地确定目标函数至关重要。

员援圆援猿摇约束条件

约束条件就是在结构优化设计过程中，对结构的设计变量所加的各种限制。它反映了有关设计规范、计算规程、安装、施工、构造等各方面的要求。大体上说，约束可以分为两大类，即几何约束和性态约束。属于几何约束的有：

构件截面尺寸的单边约束，如

$$曾_{蚤} \geqslant 园\ (非负约束)$$

$$曾_{蚤}\ 原曾_{皂葬曾} \leqslant 园\ (上界约束)$$

$$曾_{皂蚤灶}\ 原曾_{蚤} \leqslant 园\ (下界约束)$$

双边约束，如

$$曾_{皂蚤灶} \leqslant 曾_{蚤} \leqslant 曾_{皂葬曾}\ (上、下界约束)$$

等等。

性态约束是指结构在外因（如载荷、温度、震动等工作条件）作用下的各种响应值与设计规范中相应许用值的关系，如：

强度约束为

$$\sigma\ 原[\sigma] \leqslant 园$$

刚度约束为

$$\delta\ 原[\delta] \leqslant 园$$

稳定性约束为

$$\sigma\ 原[\sigma]_{灶藏} \leqslant 园$$

频率约束为

[ω] 原ω ≤ 园

等等。

员援猿援源摇结构优化问题的数学模型的一般形式

利用上述的术语，可以把结构优化设计问题用数学模型表示出来，其一般形式为

寻找 载越[曾员,曾圆,…,曾灶]载 ∈ 砸灶

使得 枣(载) 越 枣(曾员,曾圆,…,曾灶)

满足 早躁(载) ≤ 园(躁越员,圆,…,皂)

澡噪(载) 越 园(噪越员,圆,…,灶 摇责约灶)

(员援源)

员援猿援缘摇设计空间、可行域和非可行域

由 灶个设计变量可以组成一个 灶维设计空间，其中满足约束条件的点称为可行设计点（简称可行点），实际上就是满足规范要求的一个设计方案。所以可行点组成的区域称为可行域。

每个约束条件在设计空间以一个几何面（或线）的形式出现，它是以等式满足该约束条件的所有可行点的轨迹。它将设计空间划分为两个区域，一个为可行域，另一个为非可行域。现在以两个设计变量的情形为例，将上述几个概念用图形表述出来。

员援猿援远摇目标函数等值线

设目标函数值为 悦，满足目标函数为 悦值的设计变量理论上可以有无穷个组的解答，这些解答在设计空间中形成一个点集，而这点集称为目标函数为 悦的“等值线”。图中斜直线 悦员，悦圆，…表示目标函数的等值线，且 悦员约悦圆约…目标函数等值线表现为直线（当目标函数为设计变量的线性函数时）或曲线（当目标函数为设计变量的非线性函数时）。当设计变量为 灶（灶跃猿）时，表现为超平面或超曲面。

员援猿援苑摇工摇况

在进行结构设计时，往往需要考虑结构使用期间所可能遇到的几种载荷情况。在结构设计中认为这些载荷情况分别发生，互不影响。在结构优化设计中称每一种载荷情况为一种工况。显然在建立性态约束时必须考虑所有工况。

员援源摇结构优化设计方法分类

优化设计方法很多，目前并没有统一的分类方法，为了便于今后的讲述和参考有关书刊，下面介绍几种分类方法。

员援源援员摇按目标函数或约束条件的数学特征来区分

以是否对目标函数求导来区分——不求导称为直接法，求导数称为解析法。

按有无约束条件来区分——分为有约束优化和无约束优化两类。

按设计变量的数目来区分——分为一维优化和多维优化两种。

按目标函数和约束条件的函数性质区分——分为线性优化和非线性优化两类。

员援猿援圆摇按优化方法的特征来区分

准则方法——确定某一种准则作为优化的目标，如满应力设计、满应变能设计等。

数学规划法——主要有线性规划、非线性规划、特种规划。

(员) 线性规划、非线性规划——研究设计变量在约束条件限制下，求目标函数的极值的方法；

(圆) 特种规划——指可用某些特殊规划的方法，如几何规划、动态规划、随机规划等；

(猿) 计算智能——遗传算法、神经网络等。

员援猿援猿摇按解决结构优化的程度来区分

结构构件截面尺寸的优化——在结构外形、材料、荷载确定的前提下，求结构的界面尺寸。

结构几何(形状)的优化——在结构拓扑、材料、荷载确定的前提下，选择最合理的结构形状。

结构拓扑的优化——在结构材料、荷载确定的前提下，选择最合理的结构拓扑。

结构布局的优化——在结构材料、荷载确定的前提下，求最合理的结构布置方案。

结构形式的优化——选择最合理的结构形式。

习摇题

员援员摇图 员援员所示为等厚度变截面梁，材料的许用应力为 $[\sigma]$，许用挠度为 $[\delta]$。要求梁的重量最轻，试确定横截高度 澡员，澡圆。建立优化设计的数学模型。

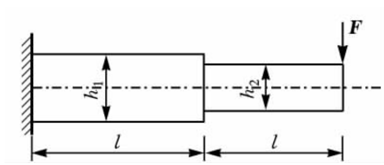

图 员援员

员援圆摇已知：材料的许用应力为 $[\sigma]$，$[\tau]$；许用挠度为 $[\delta]$。建立图 员援圆所示简支工字钢梁的重量最轻设计的数学模型。

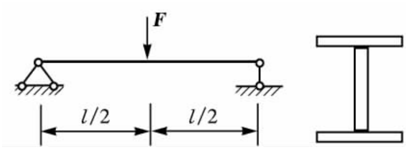

图 员援圆

□第 圆章摇结构优化设计的数学基础

圆员摇向量的有关知识

圆援员援员摇二向量的点积

二个 灶维的向量 载越[曾员,曾圆,…,曾灶]栽和 再越[赠员,赠圆,…,赠灶]栽的点积定义为

$$(\text{载},\text{再})\text{越}\text{载}^{\text{栽}}\cdot\text{再}\text{越}\sum_{\text{蚤越员}}^{\text{灶}}\text{曾}_{\text{蚤}}\text{赠}_{\text{蚤}} \qquad (\text{圆援员})$$

圆援员援圆摇 向量的模

灶维向量 载越[曾员,曾圆,…,曾灶]栽的模定义为

$$\|\text{载}\|\text{越}\left(\sum_{\text{蚤越员}}^{\text{灶}}\text{曾}_{\text{蚤}}^{\text{圆}}\right)^{\frac{\text{员}}{\text{圆}}}\text{越}\sqrt{(\text{载},\text{载})} \qquad (\text{圆援圆})$$

二向量点积与其模之间存在下述关系:

$$|(\text{载},\text{再})|\leqslant\|\text{载}\|\cdot\|\text{再}\| \qquad (\text{圆援猿})$$

称为 悦葬怎糟澡赠原杂糟澡憎葬则扎不等式。

圆援员援猿摇 向量之间的关系

(员) 两点之间的距离 摇 向量 载和 再所代表两点间的距离为 ‖再原载‖(图 圆援员)。

(圆) 两向量间的夹角 摇 两非零向量 载和 再间的夹角 θ 越 葬则糟糟燥泽 $\dfrac{(\text{载},\text{再})}{\|\text{载}\|\cdot\|\text{再}\|}$ (园≤ θ ≤π),从而可得出 (载,再)越‖载‖·‖再‖糟燥泽 θ,这表明点积 (载,再)等于 载在 再上投影与 再长度的乘积。

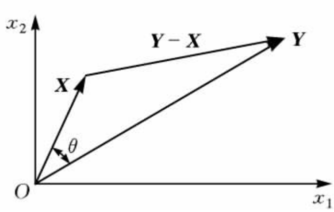

图 圆援员

(猿) 两向量共线 摇 若 载与 再共线,则 载越葬再,其中 葬为常数。

(源) 两向量正交 摇 若 载与 再的点积等于零,即 (载,再)越园,则 θ 越 $\dfrac{\pi}{\text{圆}}$,这时称此两向量正交。

圆圆摇 点的移动和函数值的变化

圆援圆援员摇 点的移动

用 灶维向量 载越[曾员,曾圆,…,曾灶]栽代表结构设计方案,则结构方案的改变就对应着 灶维空

间的 载的移动，如图 圆援表示一个二维向量的移动。灶维空间中，由一个初始点 载^{圆}移动到另一个点 载^{员}，可以写成

$$载^{员} 越载^{圆} 垣\alpha杂 \qquad (圆援源)$$

如果 杂为单位向量，即 $\|$杂$\|$ 越员，则称 杂为移动方向，称 α 为步长。不过一般把 α杂作为一个向量看待，不一定把 杂化为单位向量。常把与 杂相反的方向称为负 杂方向，因而步长 α 一般理解为非负实数。

圆援圆援圆 函数的导数

目标函数或约束函数将随设计点 载的移动而变化。也就是说它是向量 载的函数，或 灶个自变量 曾$_{员}$,曾$_{圆}$,…,曾$_{灶}$的实值函数，表示为 枣(载)，其中 载$\in$ 砸^{灶}。

函数 枣(载) 的一阶导数可表示为一维列阵：

$$\nabla 枣(载) 越\left[\frac{\partial 枣(载)}{\partial 曾_{员}},\frac{\partial 枣(载)}{\partial 曾_{圆}},\cdots,\frac{\partial 枣(载)}{\partial 曾_{灶}}\right]^{栽} \qquad (圆援缘)$$

称为函数 枣(载) 的梯度向量或简称为梯度。

函数 枣(载) 的二阶导数，可表示为二维对称方阵：

$$匀(载) 越\left[\frac{\partial^{圆}枣(载)}{\partial 曾_{蚤}\partial 曾_{躁}}\right]_{灶\times灶} 越\begin{bmatrix} \frac{\partial^{圆}枣(载)}{\partial 曾_{员}^{圆}} & \frac{\partial^{圆}枣(载)}{\partial 曾_{员}\partial 曾_{圆}} & \cdots & \frac{\partial^{圆}枣(载)}{\partial 曾_{员}\partial 曾_{灶}} \\ \frac{\partial^{圆}枣(载)}{\partial 曾_{圆}\partial 曾_{员}} & \frac{\partial^{圆}枣(载)}{\partial 曾_{圆}^{圆}} & \cdots & \frac{\partial^{圆}枣(载)}{\partial 曾_{圆}\partial 曾_{灶}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{圆}枣(载)}{\partial 曾_{灶}\partial 曾_{员}} & \frac{\partial^{圆}枣(载)}{\partial 曾_{灶}\partial 曾_{圆}} & \cdots & \frac{\partial^{圆}枣(载)}{\partial 曾_{灶}^{圆}} \end{bmatrix} \qquad (圆援远)$$

称为函数 枣(载) 的 匀藻泽泽蚤葬灶方阵。

圆援圆援猿 函数的无约束极值条件

若函数 枣(载) 在 载* 处有一阶及二阶连续偏导数，且无约束条件，则 枣(载) 在 载* 取得局部极值的必要条件是

$$\nabla 枣(载^{*}) 越园 \qquad (圆援苑)$$

式中园为 灶维零列阵。

枣(载) 在 载* 取得局部极值的充分条件是：匀(载*) 为正定方阵，即对任何 灶维非零向量 载，有

$$载^{栽}匀(载^{*}) 载 跃园 \qquad (圆援愿)$$

圆援圆援源 函数的方向导数

设函数 枣(载) 在点 载^{园}处的值为 枣(载^{园})，则在 载^{园}附近的另一点 载^{园} 垣α杂处的值为 枣(载^{园} 垣α杂)，我们定义

$$枣'_{杂} 越\lim_{\alpha\to园}\frac{枣(载^{园} 垣\alpha杂) 原枣(载^{园})}{\alpha} \qquad (圆援怨)$$

为 枣(载) 在 载^{园}点沿 杂方向的方向导数。

按 栽葬赠造燥则公式，枣(载) 在 载^{园}点附近的 栽葬赠造燥则展开式为

$$枣(载^{圆}垣\alpha杂) 越 枣(载^{圆}) 垣 [\nabla 枣(载^{圆})]^{栽}\alpha杂垣砸(\alpha) \qquad (圆援圆)$$

其中 砸(α) 为 α 的高阶微量，所以

$$\frac{\partial 枣}{\partial 杂} 越 \lim_{\alpha\to 园}\frac{枣(载^{圆}垣\alpha杂) 原 枣(载^{圆})}{\alpha} 越 \lim_{\alpha\to 园}\left\{[\nabla 枣(载^{圆})]^{栽}杂垣\frac{砸(\alpha杂)}{\alpha}\right\} 越 [\nabla 枣(载^{圆})]^{栽}杂 \qquad (圆援员怨)$$

或

$$\frac{\partial 枣}{\partial 杂} 越 \| \nabla 枣(载^{圆}) \| 糟燥泽\theta \qquad (圆援圆园)$$

这样便得出了如下结论：函数 枣(载) 沿 杂方向的导数等于函数梯度 ▽枣(载) 与单位向量 杂的点积。也就是梯度 ▽枣(载) 在 杂方向的投影。

函数 枣(载) 取极值的必要条件表明，在极值点函数 枣(载) 沿任何方向的导数均等于零。

圆援员援缘 等值面和梯度向量

设图 圆援圆所示为函数 枣(载) 的一些等值线，在 灶维空间是等值面。在同一等值面上的各点，函数 枣(载) 的值保持不变。显然，在等值面上函数的变化率等于零，也就是说沿等值面的任意切线方向，函数 枣(载) 的方向导数应等于零。

$$\frac{\partial 枣}{\partial 杂} 越 (\nabla 枣,杂) 越 \| \nabla 枣 \| 糟燥泽\theta 越园 \qquad (圆援圆员)$$

这还表明等值面上各点的梯度 ▽枣在该点与等值面正交（垂直）。

函数 枣(载) 沿 杂方向的导数等于函数梯度 ▽枣在 杂方向的梯度投影，这一结论表明：

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial 枣}{\partial 杂}\right)_{皂葬曾} &越 \| \nabla 枣 \| \\ \left(\frac{\partial 枣}{\partial 杂}\right)_{皂蚤灶} &越原 \| \nabla 枣 \|\end{aligned}\right\} \qquad (圆援圆圆)$$

这两个方向都与等值面垂直。因此，函数值沿梯度方向上升得最快，而沿负梯度方向下降得最快。

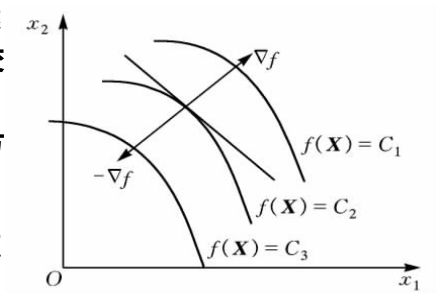

图 圆援圆

圆援圆 局部最优解与全局最优解

结构优化设计问题一般可以表述为

$$\left.\begin{aligned}&求解 \quad 载 越 [曾_{员},曾_{圆},\cdots,曾_{灶}]^{栽} \in 砸^{灶}\\ &皂蚤灶 \quad 枣(载) 越 枣(曾_{员},曾_{圆},\cdots,曾_{灶})\\ &泽援贼援 \quad 早_{噪}(载) \leqslant 园 \ (噪越员,圆,\cdots,皂)\\ &\qquad\quad 澡_{噪}(载) 越园 \ (噪越员,圆,\cdots,灶,责约灶)\end{aligned}\right\} \qquad (圆援圆猿)$$

式 (圆援圆猿) 中，载 $\in$ 砸^{灶}表示 载属于 灶维实数空间。若用集合的概念来表示，则满足约束条件的 载的集合称为可行集，以 阅表示。由于 早$_{噪}$(载) 越园可以用 早$_{噪}$(载) $\geqslant$ 园和 早$_{噪}$(载) $\leqslant$ 园来代替，且 早$_{噪}$(载) $\geqslant$ 园又可以用 原早$_{噪}$(载) $\leqslant$ 园代替。于是结构优化设计问题又可以叙述为

$$\left.\begin{aligned}&\min_{载\in 阅} 枣(载),载 \in 砸^{灶}\\ &阅 越 \{载渣早_{噪} \leqslant 园 \ (噪越员,圆,\cdots,皂)\}\end{aligned}\right\} \qquad (圆援圆源)$$

满足式 (圆援圆源) 的列向量 载* 越 [曾$^{*}_{员}$,曾$^{*}_{圆}$,…,曾$^{*}_{灶}$]^{栽}称为极小点，对应的 枣(载*) 称为目标函数的极小值，而 载* 和 枣(载*) 一起构成一个极小解。

定义 员 设在 砸^{灶}中的可行集 阅上有函数 枣(载)，如果存在一个正小数 δ 跃园，使得一切满

足 ‖载原载* ‖ 约δ(载∈阅) 的 枣载 都满足

枣载 ≥ 枣载*) (圆援苑)

称 载* 为 枣载 的局部极小点，枣载*) 为局部极小值。

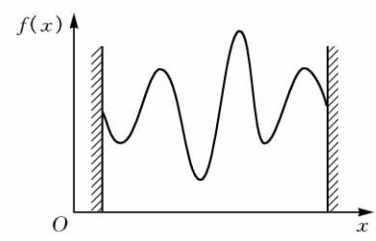

图 圆援猿

定义 圆摇 如果式 (圆援苑) 对一切 载∈阅成立，则称 载* 为 枣载 在 阅上的全局极小点，枣载*) 为全局极小值。

图 圆援猿表示了单变量函数局部极小和全局极小的情形。函数在其可行域 阅内只有一个极值点时，称为单峰函数，此时的局部最优也就是全局最优。有多个极值点时，称为多峰函数，这就有局部最优和全局最优的问题。一般来说，结构优化问题在有实际意义的范围内多为单峰问题。

圆源摇 函数的凸性及凸规划

圆援源援员摇 凸集

设 孕$_{员}$和 孕$_{圆}$是某集合中任意两点，连接 孕$_{员}$和 孕$_{圆}$，若线段 孕$_{员}$孕$_{圆}$上的一切点都在集合中，则这样点的集合是凸集。若线段上的一切点不都在集合中，则这种集合便是非凸集。如图 圆援源中 (葬) 为凸集，(遭) 为非凸集。

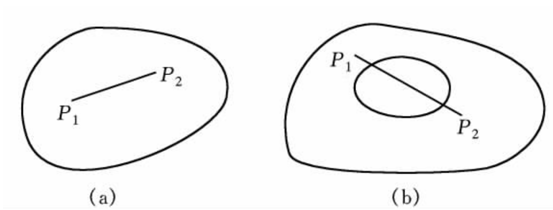

图 圆援源

圆援源援圆摇 凸函数

设函数 枣载 在凸集 阅上有定义，若对任意实数 α (园≤ α ≤ 员) 和 阅中任意两点 载$^{(员)}$和 载$^{(圆)}$恒有

枣α载$^{(员)}$垣(员原α) 载$^{(圆)}$) ≤ α枣载$^{(员)}$) 垣(员原α) 枣载$^{(圆)}$) (圆援愿)

成立，则 枣载 为定义在 阅上的凸函数。图 圆援缘(葬) 表示单变量的凸函数。若将式 (圆援愿) 中的“≤”改为“≥”，则称 枣载 为凹函数。图 圆援缘(遭) 表示单变量的凹函数。

圆援源援猿摇 凸规划

设要求

皂蚤灶摇枣载 (载∈砸^{灶})

约束条件为

早$_{躁}$(载) ≤ 园 (躁越员,圆,…,皂)

若其中 枣载 是凸函数，早$_{躁}$(载) 亦是凸函数，则这样的数学规划问题称为凸规划。

凸规划的一个重要性质是，它的局部极小点就是全局极小点，局部极小值就是全局最小

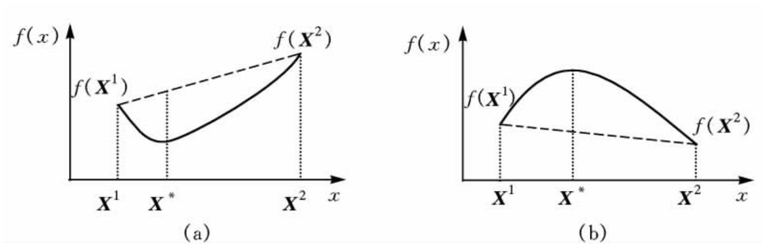

图 圆原缘

值。现在来证明这个结论。

设已知 载 是一个局部极小点。这里用反证法，设它不是全局极小点，而全局极小点为 载乙 由于 载 ≠ 载乙 故可作 载 和 载乙的连线，连线上的任一点 载可表示为

载 越α载 垣(员原α) 载乙(园≤ α ≤ 员)

由于目标函数是凸函数，故有

枣(载) 越枣(α载 垣(员原α) 载乙) ≤ α枣(载) 垣(员原α) 枣(载乙)

由于假设 载 为局部极小点，而 载乙为全局极小点，所以有 枣(载) 跃枣(载乙)。将上式右端的 枣(载乙) 换为 枣(载)，应有

枣(载) 约α枣(载) 垣(员原α) 枣(载) 越枣(载)

或

枣(α载) 垣(员原α) 载乙约枣(载)

此式对所有的 园≤ α ≤ 员都成立，但 α 越员时，有

枣(载) 约枣(载)

这显然是矛盾的，所以 载 必是全局极小点。

在结构优化中，因为目标函数和约束函数(尤其是约束函数)的凸性很难检验，所以优化结果只能看作一个局部最优解。常常需要从几个不同的初始点出发进行迭代计算，求得几个局部最优解，然后进行比较，从而确定一个假设性的全局最优解。

圆缘 Lagrange 乘子法

数学规划的一般形式为

枣蚤造 载∈ 砸灶
皂蚤灶 枣(载)
泽援贼援 早躁(载) ≤ 园 (躁越员,圆,…,皂)　　(圆原猿)

按 蕴葬早则葬灶早藻乘子法，求上述问题的极值的必要条件与如下所示 蕴葬早则葬灶早藻函数取无约束极值的必要条件等价。蕴葬早则葬灶早藻函数为

蕴(载,λ,γ) 越枣(载) 垣∑(躁越员 to 皂) λ躁[早躁(载) 垣γ躁圆]　　(圆原源)

式中 λ躁称为 蕴葬早则葬灶早藻乘子，γ躁是一些实值变量，它们都是 蕴葬早则葬灶早藻函数 蕴的自变量。蕴葬早则葬灶早藻函数 蕴在 载 点取得无条件极值的必要条件是

∂蕴/∂曾蚤 越∂枣/∂曾蚤 垣∑(躁越员 to 皂) λ躁 ∂早躁/∂曾蚤 越园 (蚤越员,圆,…,灶)　　(圆原缘)

$$\frac{\partial 蕴}{\partial \lambda_{躁}} 越早_{躁}(载) 垣 \gamma_{躁}^{圆} 越园 \quad (躁越员,圆,\cdots,皂) \qquad (圆援圆圆)$$

$$\frac{\partial 蕴}{\partial \gamma_{躁}} 越圆\lambda_{躁}\gamma_{躁} 越园 \quad (躁越员,圆,\cdots,皂) \qquad (圆援圆猿)$$

$\gamma_{躁}$被称为松弛变量，这是因为$\gamma_{躁}^{圆}$给出了点 载*到约束界面 早$_{躁}$(载) 越园的“距离”，或者说是“松弛程度”的某种度量。由式 (圆援圆圆) 可知，如果 $\gamma_{躁}$越园，则不等式约束 早$_{躁}$(载*) 越园表现为临界约束；若 $\gamma_{躁}\neq$园，则 早$_{躁}$(载*) 必为负值。载*满足该不等式约束。式 (圆援圆猿) 表示 $\gamma_{躁}\neq$园，则 $\lambda_{躁}$越园，而这时虽有 早$_{躁}$(载) 约园，但 $\lambda_{躁}$早$_{躁}$(载) 越园；另一方面，若 $\lambda_{躁}\neq$园，必有 $\gamma_{躁}$越园，即 早$_{躁}$(载*) 越园，因而也必有 $\lambda_{躁}$早$_{躁}$(载) 越园。这表明下面二式

$$\left.\begin{array}{l} 早_{躁}(载) \leqslant 园 \\ \lambda_{躁}早_{躁}(载) 越园 \end{array}\right\} \qquad (圆援圆源)$$

与式 (圆援圆圆)，式 (圆援圆猿) 等价。因而可用它们代替极小值点必要条件式 (圆援圆圆)，式 (圆援圆猿)。

若松弛变量 $\gamma_{躁}\neq$园，则 $\lambda_{躁}$越园，因而在式 (圆援圆员) 中就可以不必考虑这个不等式约束。这就是说在式 (圆援圆员) 中只考虑 $\gamma_{躁}$越园的那些临界约束。这时式 (圆援圆园) 中将只保留已达到临界的那些不等式约束 (躁 允)。允为这些临界约束的下标组成的集合。即

$$允越\{躁早_{躁}(载) 越园，躁越员,圆,\cdots,皂\} \qquad (圆援圆缘)$$

式 (圆援圆员) 转化为

$$\frac{\partial 枣}{\partial 鲁_{蚤}} 越原\sum_{躁\in允}\lambda_{躁}\frac{\partial 早_{躁}}{\partial 鲁_{蚤}} \quad (蚤越员,圆,\cdots,灶) \qquad (圆援圆远)$$

该式表明，在最优点处，目标函数的梯度向量落在临界不等式约束的函数梯度向量所组成的子空间。

圆述摇Kuhn-Tucker 条件

匀援宰援运怎澡灶 和 粤援宰援栽怎糟噪藻则证明，若 载*为局优点，则不仅式 (圆援圆远) 成立，而且该式所包含的 蕴葬早则葬灶早藻乘子非负，即应满足

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial 枣}{\partial 鲁_{蚤}} 越原\sum_{躁\in允}\lambda_{蚤}\dfrac{\partial 早_{躁}}{\partial 鲁_{蚤}} \quad (蚤越员,圆,\cdots,灶) \\ \lambda_{蚤}\geqslant 园 \end{array}\right\} \qquad (圆援圆苑)$$

这就是 运怎澡灶原栽怎糟噪藻则局优性条件。

为了证明局优性条件，下面首先介绍可行方向的概念，然后再作进一步解释。

圆援猿援员摇可行方向

为了能比较形象地说明问题的实质，下面采用二维的图形来加以解释。设图 圆援远所示 载为约束面 早(载) 越园上的一个点，并沿 杂方向移动以寻求局优点。这时对 杂有以下两点要求。

(员) 移动时目标函数值下降，为此要求目标函数沿 杂方向移动的导数小于零，即

$$枣_{杂}'(载) 越\nabla 枣 \cdot 杂约园 \qquad (圆援圆愿)$$

(圆) 移动时不离开可行域，即不破坏约束条件，也就是要移动时约束函数值下降或不变，即

$$早_{杂}'(载) 越\nabla 早^{载} \cdot 杂\leqslant 园 \qquad (圆援圆怨)$$