

普通高等学校信息与计算科学专业系列丛书

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

计 算 智 能

(第二册)

——词语计算与 Fuzzy 集

王国俊 编著

高等教育出版社

内容简介

计算智能是以模型(计算模型、数学模型)为基础、以分布并行计算为特征的模拟人的智能求解问题的理论与方法。本书系统讲述计算智能的基本理论与基本方法。全书分三册出版:第一册从模拟智能生成过程的观点讲述模拟进化计算理论;第二册从模拟智能行为的观点讲述模糊逻辑与模糊推理;第三册从模拟智能结构的观点讲述人工神经网络理论。全书突出基础(特别是数学基础),强调背景(特别是生物与工程背景),着眼研究与发展。

本书除可作为信息与计算科学专业或选修课教材使用外,也可作为应用数学、计算数学、运筹与控制、信息科学、计算机科学、系统科学等专业研究生教材使用,亦可供各专业从事计算智能研究与应用的教师与研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

计算智能.(第二册)——词语计算与 Fuzzy 集 / 王国俊编著. —北京:高等教育出版社, 2005.2
ISBN 7-04-016032-3

. 计... . 王... . 人工智能-神经网络-计算
. TP183

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 132650 号

策划编辑 王瑜 责任编辑 舒敬江 封面设计 王凌波 责任绘图 杜晓丹
版式设计 胡志萍 责任校对 朱惠芳 责任印制

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http:// www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http:// www.hep.com.cn
		网上订购	http:// www.landaco.com
			http:// www.landaco.com.cn

经 销 北京蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷

开 本	787 × 960 1/16	版 次	年 月第 1 版
印 张	7.5	印 次	年 月第 次印刷
字 数	130 000	定 价	10.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号: 16032-00

信息与计算科学专业系列教材编委会

顾 问 李大潜 刘应明

主 任 徐宗本

副主任 王国俊 马富明 胡德焜

委 员 (以姓氏笔画为序)

韦志辉 叶中行 白峰杉 羊丹平 孙文瑜

吕 涛 阮晓青 陈发来 沈世镒 陈 刚

张志让 吴 微 柳重堪 凌永祥 徐 刚

徐树方 黄象鼎 雍炯敏

秘 书 李水根 王 瑜

前 言

信息技术被广泛认为是 21 世纪主导全球经济发展格局、引导社会发展进程的核心技术。信息技术的物质基础是光电子、微电子、传感器等，其载体是计算机，其核心是通讯技术，而其理论基础与支撑则是数学。数学技术不仅提供信息表示与编码的方式和语言，而且也提供信息处理（如转换、压缩、提取、加密等）信息加工与信息利用的直接基础与核心算法。对于很多高、新信息技术而言，它们的本质是数学技术。

信息技术当今的发展以数字化、网络化、智能化为特征。所谓数字化是指信息的表示、储存、传输与处理以数字（特别是离散数字）为基准；网络化是指承载信息，乃至处理、加工、应用信息的主渠道是网络，或者说，是分布式并行信息处理系统；智能化则是指在信息处理的方式上融入或模仿人的智能。让机器“听”懂人类语言、“看”清文字图像、与人“说”话，让信息处理系统像人那样具有综合、优化、联想、辨识、学习等能力，所有这些都是智能化信息技术所努力追求的目标。虽然说，目前的信息技术还远未达到上述所期望的那样高度智能化水平，但在过去的几十年间，人们的确取得了大批令人振奋并极大推动了信息处理智能化进程的成果，计算智能（computational intelligence）正是这些突出成果中的一个典型代表。

计算智能是借助现代计算工具模拟人的智能求解问题（或处理信息）的理论与方法，它是人工智能（artificial intelligence）的深化与发展。如果说人工智能是以知识库（更确切些，专家规则库）为基础、以顺序离散符号推理为特征的，计算智能则是以模型（计算模型、数学模型）为基础，以分布、并行计算为特征。前者强调规则的作用与形成，而后者强调模型的建立与构成；前者依赖专家个人知识，而后者强调自组织、自学习与自适应。

模拟人的智能通常基于不同的观点与角度，例如，从模拟智能生成过程的观点，从模拟智能产生与作用所赖以存在的结构角度，从智能的表现行为角度等等。在所有这些方面，计算智能在近 20 多年的发展中都取得了巨大成就。本书编写目的是在上述诸方面的每一方面选择一个典型，以向读者系统介绍计算智能的基本理论、基本原理与基本方法。在智能生成过程模拟中，我们选择介绍了模拟进化计算；在智能结构模拟中，我们选择讲述了人工神经网络理论；在智能行为模拟中，我们则选择介绍了模糊逻辑与模糊推理。之所以如此选择，

一是作者们多年在这方面工作,二是它们既能代表计算智能过去 20 多年间发展的最突出成果,又能反映计算智能的当前研究热点。

国内外已有多本著作专门论述上述之一或全部内容,但很可惜它们或者内容过于宽泛,或者过于偏重工程应用,还没有一本能较好适用于为数学系学生讲授的著作。而鉴于近年来投身于信息科学研究的数学工作者越来越多,而且“计算智能”已被列为信息与计算科学专业的专业课之一,编著一套适宜于对数学系学生讲授而且能够引导青年数学工作者尽快进入计算智能领域的教材变得十分必要和紧迫,这即是编著本书的直接动机与原由。因此,本书的编著原则是:(1)突出基础(特别是数学基础)。尽可能以严密的理论和形式化的定义、定理、算法与模型的形式提出和表述问题,避免空泛;(2)强调背景。在注重形式化的数学表述基础上,突出介绍所述理论与方法的生物背景与工程应用背景,力求使读者对方法的“源头”和“流向”有明确的了解,对理论的价值与应用有直接的认识;(3)着眼于研究与发展。在内容的取舍上既考虑它们自身的理论与应用价值,也考虑它们的可研究性与可发展性,侧重介绍了那些既有重要理论与应用价值,又有广阔研究空间与发展前景的新理论与新方法。在每一册,我们也专章介绍与之相关的发展动态与研究进展,特别提出具体的研究问题。所有这些旨在使读者能尽可能快地直接进入计算智能研究的相关前沿。

为了满足各高校不同层次的教学需要,特别是既可将本书作为一门专业课讲授,亦可将本书的某些部分内容作为选修课讲授,我们将整体内容分册独立出版。

本书除可供信息与计算科学专业、数学与应用数学专业的本科生作为专业课或选修课教材使用外,也可作为计算数学、信息科学、运筹与控制、计算机科学、系统科学等专业的研究生教材使用,亦可供从事计算智能研究与应用的各学科研究工作者参考。

编著者

目 录

第 1 章 绪论 1

- §1.1 从数值变量到语言变量 1
- §1.2 走出传统二值逻辑的框架，树立程度化思想 4
- 习题一 6

第 2 章 Fuzzy 集 7

- §2.1 从语言变量到 Fuzzy 集 7
 - 2.1.1 Fuzzy 集及其边缘 7
 - 2.1.2 用 Fuzzy 集表示不精确概念 9
 - 2.1.3 修饰词的数学表示 12
 - 2.1.4 极限定理 14
- §2.2 Fuzzy 集的运算 15
 - 2.2.1 t 模与 s 模 15
 - 2.2.2 Fuzzy 集的基本运算 18
 - 2.2.3 分解定理 23
 - 2.2.4 Fuzzy 集的乘积 24
- §2.3 Fuzzy 集之间的距离 25
 - 2.3.1 X 上无结构时 X 的 Fuzzy 子集间的距离 25
 - 2.3.2 X 上有结构时 X 的 Fuzzy 子集间的距离 29
 - 2.3.3 Hausdorff 距离 29
- §2.4 Fuzzy 集之间的映射 31
 - 2.4.1 序同态 31
 - 2.4.2 Zadeh 型函数 33
- §2.5 Fuzzy 数 35
 - 2.5.1 实直线上的 Fuzzy 集 35

2.5.2 区间数及其运算 37
2.5.3 Fuzzy 数 39
习题二 42

第 3 章 Fuzzy 积分、Fuzzy 聚类与 Fuzzy 决策 45

§3.1 Fuzzy 测度与 (\otimes) Fuzzy 积分 45
3.1.1 Fuzzy 测度 45
3.1.2 (\otimes) Fuzzy 积分 46
§3.2 Fuzzy 关系与 Fuzzy 矩阵 50
3.2.1 Fuzzy 关系 50
3.2.2 X 上 Fuzzy 关系的等价闭包 53
3.2.3 Fuzzy 矩阵 54
3.2.4 Fuzzy 综合评价 56
§3.3 Fuzzy 聚类分析 58
3.3.1 Fuzzy 相似矩阵的建立 58
3.3.2 等价闭包聚类法 60
3.3.3 Fuzzy c -均值聚类算法 61
§3.4 Fuzzy 决策 64
习题三 67

第 4 章 Fuzzy 推理 69

§4.1 Fuzzy 控制与 Fuzzy 推理 69
4.1.1 Fuzzy 推理是 Fuzzy 控制的理论基础 69
4.1.2 Fuzzy 推理规则库的建立 71
4.1.3 Fuzzy 推理规则库的使用 72
§4.2 蕴涵算子的选取 74
4.2.1 推理的强度及其表示 74
4.2.2 蕴涵算子与三角模 76
4.2.3 不具有伴随三角模的蕴涵算子 79
§4.3 求解 Fuzzy MP 问题的算法 80
4.3.1 CRI 算法 80

4.3.2 三 I 算法 84

4.3.3 三 I 算法的还原性 86

4.3.4 α -三 I 算法 86

§4.4 多输入单输出 Fuzzy 控制器及其分明化 87

4.4.1 FATI 方法的实现 88

4.4.2 FITA 方法的实现 89

4.4.3 Fuzzy 集的 Defuzzify 方法 90

4.4.4 Fuzzy 控制器的分明化 91

习题四 92

第 5 章 评注与展望 94

§5.1 基于 Fuzzy 集理论的一些新学科 94

5.1.1 Fuzzy 拓扑学 94

5.1.2 Fuzzy 分析学 95

5.1.3 Fuzzy 逻辑学 96

5.1.4 Fuzzy 代数学与 Fuzzy 聚类分析 96

§5.2 Fuzzy 集理论与若干新方法相结合的研究 97

§5.3 Fuzzy 集理论向深层推进的几个研究方向 97

5.3.1 Fuzzy 推理的形式化问题 97

5.3.2 Fuzzy 控制方法的细致化 98

5.3.3 词语计算才刚刚起步 98

参考文献 99

总 序

根据教育部 1998 年颁布的普通高等学校专业目录,“信息与计算科学”专业被列为数学类下的一个新专业(它覆盖原有的计算数学及其应用软件、信息科学与运筹控制等专业)。这一新专业的设置很好地适应了新世纪以信息技术为核心的全球经济发展格局下的数学人才培养与专业发展的需要。然而,作为一个新专业,对其专业内涵、专业规范、教学内容与课程体系等有一个自然的认识与探索过程。教育部数学与统计学教学指导委员会数学类专业教学指导分委员会(下称教指委)经过过去两年艰苦细致的工作,对这些问题现在已有了比较明确的指导意见,发表了《关于信息与计算科学专业办学现状与专业建设相关问题的调查报告》及《信息与计算科学专业教学规范》(讨论稿)(见《大学数学》第 19 卷 1 期(2003))。为此,全国高等学校教学研究中心在承担全国教育科学“十五”国家级规划课题——“21 世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上,根据教指委所颁布的新的教学规范,组织国内各高校的专家教授,进行其子项目课题“21 世纪中国高等学校信息与计算科学专业教学内容与课程体系的创新与实践”的研究与探索。为推动本专业的教材建设,该项目课题小组与高等教育出版社联合成立了“信息与计算科学专业系列教材编委会”,邀请有多年教学和科研经验的教师编写系列教材,由高等教育出版社独家出版,并冠以教育科学“十五”国家规划课题研究成果。

按照新的《信息与计算科学专业教学规范》(讨论稿),信息与计算科学专业是以信息技术和计算技术的数学基础为研究对象的理科类专业。其目标是培养学生具有良好的数学基础和数学思维能力,掌握信息与计算科学基础理论、方法与技能,受到科学研究的训练,能解决信息技术和科学与工程计算中的实际问题的高级专门人才。毕业生能在科技、教育、信息产业、经济与金融等部门从事研究、教学、应用开发和管理工作的,能继续攻读研究生学位。根据这一专业目标定位和落实“强基础、宽口径、重实际、有侧重、创特色”的办学指导思想,我们认为,本专业在数学基础、计算机基础、专业基础方面应该得到加强,而各学校在这三个基础方面可大体一致,但专业课(含选修课)允许各校自主选择、体现各自特点。考虑到已有大量比较成熟的数学基础与计算机基础课程教材,本次教材编写主要侧重于专业基础课与专业课(含选修课)方面。

信息与计算科学,就其范畴与研究内容而言,是数学、计算机科学和信息

工程等学科的交叉,已远远超出数学学科的范畴。但作为数学学科下的一个理科专业,信息与计算科学专业则主要研究信息技术的核心基础与运用现代计算工具高效求解科学与工程问题的数学理论与方法(或更简明地说,研究定向于信息技术与计算技术的数学基础),这一专业定位明显地与计算机科学、信息工程专业有区别。基于这一定位,信息与计算科学专业可包括信息科学与科学计算(计算数学)两个大的方向。科学计算方向在我国已有长期的办学经验,通常被划分为偏微分方程数值解、最优化理论与方法、数值逼近与数值代数、计算基础等学科子方向。然而,对于信息科学,它到底应该怎样划分学科子方向?应该怎样设置专业与专业基础课?所有这些都仍是正在探索的问题。

任何技术都可以认为是延伸与扩展人的某种功能的方式与方法,所以信息技术可以认为是扩展人的信息器官功能的技术。人的信息器官主要包括感觉器官、传导器官(传导神经网络)、思维器官和效应器官四大类型,其功能则主要是信息获取、信息传输、信息处理和信息应用(控制),因而感测技术、通信技术、智能技术与控制技术通常被认为是最基本的信息技术(常称之为信息技术的四基元),其他信息技术可认为是这四种基本技术的高阶逻辑综合或分解衍生。所以可以把信息科学理解为是“有关信息获取、信息传输、信息处理与信息控制基础的科学”。从这个意义上,我们认为:信息处理(包括图像处理、信息分析等)、信息编码与信息安全、计算智能(人工智能、模式识别等)、自动控制等可构成信息科学的主要学科子方向。这一认识也是教指委设置信息与计算科学专业信息科学方向课程的基本依据。

本系列教材正是基于以上认识,为落实新的《信息与计算科学专业教学规范》(讨论稿)而组织编写的。我们相信,该系列教材的出版对缓解本专业教材的紧缺局面,对推动信息与计算科学专业的快速与健康发展会大有裨益。

从长远的角度看,为适应不同类型院校和不同层次要求的课程需求,本系列教材编委会还将不断组织教材的修订和编写新的教材,从而使本专业的教学用书做到逐步充实、完善和多样化。我们诚恳希望采用本系列教材的教师、同学们及广大读者对书中存在的问题及时指正并提出修改意见和建议。

信息与计算科学专业系列教材编委会

2003年8月31日

第 I 章 绪 论

§ 1.1 从数值变量到语言变量

人类在认识客观世界与改造客观世界上取得了辉煌的成就，这种成就的取得很大程度上在于人类设计制造了各种各样的机器，帮助人类在诸多方面冲破了人类自身生物功能的极限，以至使得原本以为不可能实现的事都一一实现了。稍稍回顾一下科学技术的发展历史是有趣的，同时对我们探索今后科学技术的发展会有所启发。五百年前，如果有谁说我们可以看得见百里之外的场景，那一定会被认为是无稽之谈，因为那时人们既不知道电磁波的存在，也不知道光电之间可以转换。今天人类设计制造了电视传送装置，使我们坐在家就可以清楚地看到美英联军在伊拉克作战的实况。在莱特兄弟未制造出他们的飞机之前，人们认为飞行是鸟类特有的本能，人类是无缘飞行的。然而今天人类设计制造出了性能先进的各式飞机，而且制造出了宇宙飞船，人们不仅可以遨游太空，而且可以进行任何鸟类都无法实现的太空行走。五十年前，由电子管组成的体积庞大的电子计算机每秒能进行数千次的运算已被认为是非凡的成就，而今天人类设计制造了由超大规模集成电路组成的高速计算机，其计算速度可高达每秒十五万亿次！更有甚者，过去人们认为单性繁殖只有在低等动物身上才能发生，然而今天人们通过克隆技术仅从一只羊身上的体细胞出发就可以培育出克隆羊多莉来。由此可见，在科学技术的发展史上，多少原本以为不可能甚至绝不可能的事都已成为可能的了。所以如果我们奉劝人们在对尚未认识的事物作判断和评论时说一句：“请君慎用‘不可能’”大约是不算过分的了。下面我们对人类是如何达到了今日的辉煌作一尝试性的分析，希望能从中探索出科技进步的新的可能途径来。

人类是在不断进化的，这种进化是伴随着人类所创造的文明的进化而同步进行的。值得注意的是，这种进化主要表现在人类的智能方面，而不是表现在人类的躯体方面。现代人与隋唐时代的人相比较在躯体上不会有多大的差别，

但现代人的大脑与隋唐时代的人的大脑相比较却有明显的不同。这里所说的不同并非指现代人有比古代人更多的脑细胞，而是指现代人在创造了现代科学技术和多方面文明的同时，也通过在这种文明环境中学习、熏陶和成长而使得自己的大脑具有了与古代人大脑完全不同的知识构型。系统论学家 E.Laszlo 甚至夸张地说：“恺撒大帝同一头猩猩之间的差别，主要不是由于组成物质有什么不同，而是由于那些物质的关系构型不一样” [1]也说的是这个意思。可见现代人是由于大脑具有了先进的知识构型才得以更好地认识世界和改造世界，并把现代文明不断地推向更高的层次的。可以说现代科学技术的辉煌成就正是人类智能的结晶和在客观世界中的体现。一个随之而来的问题自然会被提出，即，现代人的智能是否已得到了充分的发挥？或者问得更具体一些：现代人的智能在哪些方面还有新的发展空间？只要我们对可以反映当代高科技水平于一斑的计算机科学作一分析便可对上述问题作出明确的回答。

众所周知，当代计算机科学是基于经典的二值逻辑发展起来的，其雏形是可以针对 0-1 序列式的数据进行运算的图灵机。今天的计算机已经非常先进了，是远非当年的图灵机所可以比拟的。它不但可以作高速计算，而且有存储、记忆、辅助绘图以及辅助设计等多方面的功能，数据也不必局限于二进制形式，也可以是八进制、十六进制形式等等。但有一点是明确的，即，无论现代计算机功能如何强大，它只能受理明确指令下的任务，它拒绝执行任何含混不清的任务，甚至当你不慎在输入指令时漏掉了一个标点符号，也会遭到拒绝。从好的一面去说，这表明了计算机的高度精确性；但从不好的一面去说，这又表明了计算机的智能化程度还不够。英国著名的科学哲学家 K.R.Popper 在他的《客观知识》一书 [2] 中引用了德国的一首诗如下：

二乘二等于四；千真万确，
可这却太空泛又太平凡。
我们寻求的是一条线索，
沿着它达到深刻而有趣的假说。

我们引用这首诗绝不是说今天已发展到令人惊叹地步的计算机科学有任何的“空泛”或“平凡”，而是希望寻求进一步发展的线索。而这个线索恰恰可以从分析当代计算机为什么无法处理含混不清的信息入手。其实，何止是计算机，今天，所有的高科技设施无一不是以现代数学为工具的，而现代数学又几乎全是建立在经典的二值逻辑的基础之上的。这里我们说“几乎”当然指尚有例外，以逾五百万字的大型工具书《现代数学手册》 [3] 为例，手册中共有涵盖了现代数学各分支的论述一百篇，而其中仅有一篇是处理含混不清信息的数学的，即模糊数学篇。这里模糊一词源于英语单词 Fuzzy，也曾有人将 Fuzzy 译为“弗晰”、“勿晰”以及“不分明”等。为方便计，本书使用原文 Fuzzy。现在回到

计算机的话题上，下面都是计算机可以执行的程序：

- (1) 若误差 $E \leq 0.01$ ，停止。
- (2) 若 $X \leq 120$ ，令 $Y = 200$ 。
- (3) 若 $X \geq 100$ 且 $\frac{dX}{dt} \geq 5$ ，令 $Y = -20$ 。

但下面都是计算机无法执行的程序：

- (4) 若误差已经相当小了，停止。
- (5) 若炉温不高，则加大送氧量。
- (6) 若速度很高且仍在加速，则大力刹车。

这里关键的差别在于(1)—(3)中的变量 E 、 X 、 $\frac{dX}{dt}$ 和 Y 等都是数值变量，

而(4)—(6)中的变量“相当小”、“不高”、“加大”、“很高”和“大力”等都不是数值变量，我们称其为语言变量。当代的计算机是基于数值变量而设计制造的，所以它无法处理这种含混不清的语言变量。数值变量以及基于数值变量和经典的二值逻辑所建立起来的现代数学大厦是与清楚、精确、深奥和美妙这些褒义词联系在一起的。的确，现代数学以及以现代数学为基本工具所发展起来的现代科学技术已经取得了辉煌的成就，这是我们人类的骄傲。但另一方面，精确的数学毕竟只是复杂的客观世界的理想化了的模型。正如 A.N.Whitehead 所说：“自然界可不会变得像你所能想象的那样简简单单，清清楚楚” [1]。所以我们不应当不加分析地排斥含混不清。事实上许多看起来含混不清的语言变量恰恰是我们赖以进行若干识别、分析、推理乃至决策的基础。可见如果计算机能接受并运行类似于上面(4)—(6)的程序，那无疑就标志着计算机的智能有了大幅度的提高，或者说计算机已经开始具有了人脑的智能。这正是我们要寻求的那条“线索”。沿着这条线索去创建“深刻而有趣”的理论必将为现代科学技术提供新的发展空间。

1965年，加州大学 Berkeley 分校的著名控制论专家 L.A.Zadeh 教授提出了 Fuzzy 集的概念[4]。继而又提出了 Fuzzy 算法[5]、Fuzzy 系统[6]、Fuzzy 相似关系[7]以及语言变量[8]等一系列具有开创性的概念。同时有一大批数学工作者、工程师和科学家加入到了开发 Fuzzy 理论的行列之中。如今的 Fuzzy 理论已发展成包括 Fuzzy 数学、Fuzzy 系统、Fuzzy 决策、Fuzzy 控制、Fuzzy 逻辑等众多分支的庞大理论体系，而且在应用上也取得了很大的成功（仅就作者所知的文献就有[9-82]等）。但浓缩到一点可见，Fuzzy 理论的各个分支都离不开语言变量这个核心，我们统称围绕着语言变量这个核心而展开的各种运算、分析、推理、控制与决策等为词语计算。本篇的目的就是要扼要地介绍有关词语计算的基本概念和若干基本方法。应当特别指出的是，Fuzzy 理论与应用虽然

已涉及很广的领域，但其方法是远不成熟的。这一点是很自然的。事实上，早在两千年前，中国已有了讲述开方术的周髀算经，希腊也已有了欧几里得几何，可见经典数学已有了很长的历史。在这段历史中一代又一代的数学家们已经把现代数学的大厦建造得几乎达到了完美的地步。与此相比较，诞生还不足半个世纪的 Fuzzy 理论可说是尚处于牙牙学语的阶段，既没有像微积分基本定理那样的深刻结果，也缺少像数论中 $1+2$ 那种美妙的定理，因为目前我们还没有完全成熟的章法可循。但是词语计算的目的在于进一步开发人脑的智能和模拟人脑的思维方式，而人脑是创造一切现代文明的源泉，所以模拟人脑既是极富于挑战性的任务，又必然是十分艰难的工作。在这方面的点滴进步都是可贵的，并且终将把词语计算理论推向成熟。还应当指出的是词语计算虽然是一个全新的研究领域，它却是与传统数学密不可分的。语言变量并不与数值变量完全对立，实际上它是将数值变量经过某种整合而得出的新构型。所以读者在学习词语计算理论时是可以运用已经掌握了数学知识的，同时正因为词语计算的理论尚不成熟，读者在学习的过程中可以不断地尝试去改进它和完善它。

§ 1.2 走出传统二值逻辑的框架，树立程度化思想

传统的二值逻辑在帮助人们描述客观世界、认识客观世界和改造客观世界方面已经取得了令人瞩目的成就，它以一丝不苟的精确而称著。一是一、二是二、非此即彼是其特点。然而这样一来程度化的概念、方法和判断就被拒之于门外了，而程度化的思想却正是人脑智能的反映，失去了程度化的思想往往会导致错误。以数学归纳法为例。设 $P(n)$ 是一个与自然数 n 有关的命题，如果

(1) $P(0)$ 成立；

(2) 从 $P(k)$ 成立可以推出 $P(k+1)$ 成立，

则可断言 $P(n)$ 对一切自然数 n 均成立。这里“成立”与“不成立”是相互对立的，要么成立，要么不成立，二者必居其一且仅居其一。相对于真实的（而非理想化了的）世界而言，这种缺少程度化思想的推理是会导致错误的，“秃头悖论”就是很好的例子（如[9]）。设 $P(n)$ 表示命题“长了 n 根头发的人是秃头”，则 $P(0)$ 成立，因为没有头发的人当然是秃头。其次，比秃头多一根头发的人仍是秃头，即从 $P(k)$ 成立可以推出 $P(k+1)$ 成立。那么根据数学归纳法， $P(n)$ 对一切 n 均成立，即，每个人都是秃头。这是荒唐可笑的结论。这里产生错误的根源在于没有程度化的思想。事实上， $P(0)$ 成立是无可非议的，但 $P(k+1)$ 成立与 $P(k)$ 的成立已经有了程度的不同，因为哪怕只多了一根头发，也离秃头远了一步，离正常的不秃顶的人近了一步。可见程度化思想是重要的。

程度化概念可以从改造经典集合的子集概念入手. 设 X 是一个非空集合, A 是 X 的非空子集, x 是 X 的任一元素, 则 $x \in A$ 与 $x \notin A$ 二者必有一个且仅有一个成立. 这是传统集合论的基本概念. 但由秃头悖论看出仅仅有这种传统的集合是不足以描述真实世界的. 事实上, 设 X 是年满 20 岁的男人的集合, A 是其中秃头的集合, x 是一个年满 20 岁的男人. 按传统的集合论, $x \in A$ 或 $x \notin A$ 二者必有一个且仅有一个成立, 即, x 是秃头或 x 不是秃头. 因为 A 是有限集, 其中有一个头发最多的秃头, 称他为 y . 那么只要比秃头 y 多一根头发的人 x 就不再是秃头了. 这种非此即彼的划分显然是不合理的. 现实世界中还有大量不宜用非此即彼式的界定来描述的概念, 如胖子, 大高个儿, 老人, 巨款, 深水等等, 以及带有修饰词的概念, 如快速列车, 炎热的天气, 昂贵的价格等等, 都是难以进行精确刻画的. 对于这类概念而言, 用传统集合论中子集的概念去表述就是不适宜的了.

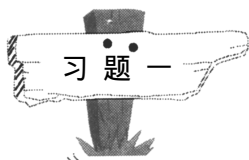
大家知道, 子集的概念也可以用特征函数去描述. 设 A 是 X 的子集, 则 A 对应一个定义在 X 上且取值于 $\{0,1\}$ 的特征函数 $\chi_A: X \rightarrow \{0,1\}$. 为方便计, 我们仍用 A 表示它的特征函数, 则得一映射 $A: X \rightarrow \{0,1\}$, 其定义为

$$A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (1.2.1)$$

由上式可以清楚地看出, 这里的子集概念是属于二值逻辑的框架之中的, 即用数值 1 表示肯定, 用数值 0 表示否定. 上面列举的现实世界中的例子表明, 这种二值逻辑框架下的子集概念应进行扩展, 即将 x 是否属于 A 进行程度化, 不必限制 $A(x)$ 的值非 1 即 0, 而是允许 $A(x)$ 可以取 1 与 0 之间的其他值, 比如 0.7, 0.8 等等. 换句话说, 应当将映射 $A: X \rightarrow \{0,1\}$ 扩展为映射 $A: X \rightarrow [0,1]$, 并将后者看作是 X 的程度化了的子集. 这正是 Zadeh 的 Fuzzy 子集的基本思想. 这种思想看起来是简单而自然的, 但它是将人类的词语纳入于数学框架的根本出发点.

人类的自然语言是丰富的, 其中有各种各样的修饰词, 如“有点儿”、“差不多”、“几乎”、“非常”等等. Fuzzy 理论中既然要进行词语计算, 就必须把这类修饰词也纳入于数学框架之中并定义有关的运算.

因为词语计算是 Fuzzy 理论的精髓, 本书中经常将二者混用. 本书讲述 Fuzzy 理论的基本概念和若干基本方法. 关于应用, 本书只介绍其基本原理而不讨论各具体问题的解决如何实现. 最后, 还应当明确指出两点: 第一, 因为映射 $A: X \rightarrow \{0,1\}$ 也可以看成是映射 $A: X \rightarrow [0,1]$, 所以传统的子集概念是 Fuzzy 子集概念的特例, 从而 Fuzzy 理论是传统理论的推广. 第二, Fuzzy 理论所处理的对象可以是含混不清的, 但 Fuzzy 理论本身却是清清楚楚, 并不是 Fuzzy 的.



1.1 试仿照秃头悖论“证明”:

- (1) 每个人都是婴儿(提示:比如,可用 $p(n)$ 表示命题“出生不足 $n+5$ 天的人是婴儿”).
- (2) 每一座楼房都是新建成的.

1.2 说明 A 是集合 X 的子集的传统概念不适用于以下各例:

- (1) X 是某城市里年满 18 岁的人的集合, A 是其中高个子的集合.
- (2) X 是地球上正在行驶的汽车集合, A 是其中高速行驶的汽车的集合.
- (3) X 是某钟表店内手表的集合, A 是其中昂贵手表的集合.

第 2 章

Fuzzy 集

§ 2.1 从语言变量到 Fuzzy 集

2.1.1 Fuzzy 集及其边缘

从第一章的分析可见引入 Fuzzy 集的概念是必要的.

定义 2.1 设 X 是非空集, 则称映射 $A: X \rightarrow [0,1]$ 为 X 的 Fuzzy 子集, 或 X 上的 Fuzzy 集, 称 X 为论域. 也称 A 为隶属函数. 称 $A(x)$ 为 x 属于 A 的隶属度. 令

$$\text{supp } A = \{x \in X \mid A(x) > 0\}, \quad (2.1.1)$$

称 $\text{supp } A$ 为 A 的承载集或承集. 称

$$\lambda = \sup\{A(x) \mid x \in X\} \quad (2.1.2)$$

为 A 的高度. 称

$$\text{Ker } A = \{x \in X \mid A(x) = 1\} \quad (2.1.3)$$

为 A 的核. 称核非空的 Fuzzy 集为正规 Fuzzy 集. 若 $\text{supp } A$ 为单点集 $\{x\}$ 且 A 的高度 $\lambda > 0$, 则称 A 为 Fuzzy 点, 记作 x_λ .

例 2.1 设 $X = \mathbf{R}$, 以下的 A, B, C 都是 X 上的 Fuzzy 集:

(1) 设 $a < b \leq c < d$,

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \text{ 或 } x \geq d, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & b \leq x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & c < x < d. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

A 是高度为 1 的正规 Fuzzy 集, $\text{supp } A = (a, d)$, $\text{Ker } A = [b, c]$. 以后称由 (2.1.4) 定义的 Fuzzy 集为梯形 Fuzzy 集, 记为 $(a; b; c; d)$.

(2) 设 $a < b < c$,