激 光 物 理

卢亚雄　余学才　张晓霞　编著

北京邮电大学出版社
·北京·

需要全本请访问 www.ertongbook.com

内 容 简 介

本书全面介绍了光与物质相互作用的有关物理现象、物理概念及处理该领域问题的方法，重点介绍了半经典理论及全量子理论，主要阐述了激光光束的概念、谐振腔理论、速率方程理论、场与物质相互作用的半经典理论、密度矩阵与激光振荡方程、静止原子激光器、瞬态相干光学效应、电磁场的量子化以及场与物质相互作用的全量子理论，最后讨论了光的相干性。

全书内容丰富、理论严谨、重点突出、概念清晰，每章后附有习题，便于组织教学。本书可作为光学工程、电子科学与技术、光学和物理等专业的研究生教材，以及相关科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

激光物理/卢亚雄，余学才，张晓霞编著. —北京：北京邮电大学出版社，2005

ISBN 7-5635-1111-3

Ⅰ.激… Ⅱ.①卢…②余…③张… Ⅲ.激光基础 Ⅳ.TN241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 058974 号

书　　名：激光物理

作　　者：卢亚雄　余学才　张晓霞

出 版 者：北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)　邮编：100876

发行部电话：(010)62282185　62283578(传真)

电子信箱：publish@bupt.edu.cn

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京源海印刷有限责任公司

开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16

印　　张：14.5

字　　数：372 千字

印　　数：1—3 000 册

版　　次：2005 年 9 月第 1 版　2005 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-1111-3/O·100　　定价：24.00 元

· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

前　言

本书是在编者多年讲授“激光物理”课程讲稿的基础上，进行整理、修改、补充完成的。本书全面介绍了光与物质相互作用的有关物理现象、物理概念，以及处理该领域问题的方法；重点介绍了半经典理论以及全量子理论。

激光物理的理论是建立在场与物质相互作用的基础上的。其理论可以分为经典理论、速率方程理论、半经典理论和全量子理论这四种。理论的发展体现了科学的进步。初级理论是高级理论在一定条件下的简化；高级理论是初级理论的发展和升华，但不是完全的替代。本书力求用简单的理论处理相关的问题。所以，本书虽然涉及到这四种理论，但不是内容上的重复，而是阐述上的深化。

全书共分4部分。第1部分包括前两章，主要介绍了激光光束与谐振腔理论。从电磁场理论出发，推导了各类高斯光束的数学表达式，描述其特性；证明基横模高斯光束变换的ABCD定律；在 q 参数自再现的基础上建立起谐振腔的几何光学理论。对于未学习过激光原理的读者，这部分内容尤其必要。第2部分包括第3章与第4章，主要根据课程的需要简单讨论唯象理论及速率方程理论。除了常规的内容外，还介绍了半导体材料中的相互作用，以适应目前的发展。第3部分由第5～8章组成，主要包括了相互作用的半经典理论，以及相干相互作用各种现象的分析。其中对于量子力学基本公设、电偶极矩近似、密度矩阵等物理概念都有十分清晰的描述。以静止原子激光器为例，介绍了半经典理论对激光器振荡现象的处理方法。第4部分包括最后3章，主要阐述了相互作用的全量子理论。讨论了量子化电磁场的光子数态、位相态及相干态的表述方法与特性。在全量子理论框架下讨论了场与物质的相互作用，获得自发发射的圆满解释。对于激光器的振荡行为运用光子数统计进行分析。最后对相干性进行了讨论。

考虑到一些学生未学习过“激光原理”或“光电子技术”等内容，在不影响本书系统性的条件下，书中介绍了一些激光谐振腔和激光光束方面的内容。由于这些阐述不是本科课程相关内容的简单重复，而是以不同角度在更高层次的阐述，因此具有此基础的读者也会从中收益。

全书内容丰富、理论严谨、重点突出、概念清晰，每章后附有习题，便于组织教学。编者力图讲清理论的处理方法，以及对理论结果的分析讨论，对于繁杂的数学推导尽量简化，以便于读者阅读。全书参考学时为50～80学时，教师可根据情

况组织教学。

本书由卢亚雄教授编写第5、6及8～11章：余学才副教授编写第1～3章；张晓霞教授编写第4、7章和8.5.1小节。卢亚雄教授统编了全书。

在本书的编写过程中，得到了电子科技大学研究生院和光电信息学院熊彩东、胡浩全、廖云、杨亚培、许芝等领导的大力支持和帮助；研究生幺周石、夏力臣、潘黎黎、王丽、张成收集了部分资料；胡渝，王仕藩和杨亚培等教授对本书的部分内容提出了很好的建议；徐守铭与余蓉在本书的编辑出版上做了一些工作，在此一并致谢。

由于水平有限，错误与疏漏难免，恳请指正。

作 者

2005年4月

目　录

第 1 章　激光光束

1.1　电磁场理论基础 …… 1
1.1.1　电磁场的波动方程 …… 1
1.1.2　标量衍射理论 …… 2
1.1.3　模式密度 …… 5
1.2　几何光学基础 …… 6
1.2.1　程函方程 …… 6
1.2.2　光线传播的矩阵表达式 …… 8
1.2.3　Collins 公式 …… 9
1.3　基横模高斯光束及其在自由空间中的传输 …… 11
1.3.1　亥姆霍茨方程 …… 11
1.3.2　均匀介质中的基横模高斯光束 …… 12
1.3.3　类透镜介质中的高斯光束 …… 15
1.4　基横模高斯光束变换的 *ABCD* 定律 …… 16
1.5　高阶厄米-高斯光束　光束质量因子 …… 19
习 题 …… 24

第 2 章　谐振腔理论

2.1　谐振腔本征模式的概念 …… 25
2.1.1　本征模式与自再现变换 …… 25
2.1.2　稳定谐振腔本征模式的横模与纵模 …… 26
2.1.3　开式谐振腔本征模式的基本概念 …… 27
2.2　谐振腔的特征 …… 29
2.2.1　谐振腔往返一周的变换矩阵 …… 29
2.2.2　谐振腔的稳定性条件 …… 29
2.2.3　光学谐振腔的损耗 …… 30
2.3　光学谐振腔的衍射理论 …… 32
2.3.1　开腔模的衍射理论 …… 33
2.3.2　方形反射镜共焦腔中自再现模式的近似解 …… 35
2.4　本征模式的几何光学理论　稳定腔 …… 37
2.4.1　谐振腔往返一周变换矩阵的本征态 …… 37

需要全本请访问 www.ertongbook.com

2.4.2 稳定谐振腔…… 38
2.4.3 稳定两镜腔本征模式的主要结果…… 39
2.5 非稳定腔与临界腔的几何光学理论…… 40
2.5.1 非稳定腔的本征方程…… 40
2.5.2 几何自再现波型的损耗…… 42
习 题…… 44

第 3 章 场与物质相互作用的速率方程理论

3.1 受激辐射 受激吸收 自发辐射…… 45
3.1.1 黑体辐射的普朗克公式…… 45
3.1.2 辐射场和两能级原子之间的相互作用…… 45
3.1.3 爱因斯坦关系式…… 46
3.2 谱线加宽机制和线型函数…… 47
3.2.1 均匀加宽…… 48
3.2.2 非均匀加宽…… 49
3.2.3 综合加宽…… 51
3.3 速率方程…… 52
3.3.1 跃迁速率…… 53
3.3.2 速率方程组…… 54
3.4 连续工作状态下的增益系数及增益饱和…… 56
3.4.1 均匀加宽增益系数…… 57
3.4.2 多普勒加宽介质的增益系数…… 59
3.4.3 综合加宽增益系数…… 61
3.5 激光器的工作特性…… 61
3.5.1 激光器的振荡阈值…… 61
3.5.2 激光器的振荡模式…… 62
3.5.3 激光器的输出功率和输出能量…… 64
3.5.4 驰豫振荡…… 66
3.5.5 单模激光的线宽极限…… 67
3.5.6 频率牵引…… 68
习 题…… 69

第 4 章 半导体中辐射场与物质的相互作用

4.1 晶体结构和能带…… 70
4.1.1 晶体结构…… 70
4.1.2 能带的形成…… 70
4.1.3 直接带隙与间接带隙…… 71

4.2　半导体内的跃迁…… 72
4.2.1　半导体内跃迁的过程…… 72
4.2.2　半导体内量子跃迁的特点…… 73
4.3　光子密度与能量分布函数…… 74
4.3.1　光子状态分布…… 74
4.3.2　光子按能量的分布…… 74
4.4　跃迁速率与爱因斯坦关系…… 75
4.4.1　自发光发射跃迁…… 76
4.4.2　受激光发射跃迁…… 76
4.4.3　受激光吸收跃迁…… 77
4.4.4　爱因斯坦关系…… 77
4.5　自发发射、受激发射与受激吸收间的关系 …… 78
4.5.1　净受激发射速率…… 78
4.5.2　吸收系数…… 78
4.5.3　自发发射速率与吸收系数的关系…… 78
4.5.4　自发发射速率与受激发射速率的关系…… 79
4.5.5　半导体中总的受激发射速率…… 79
4.6　半导体中的载流子复合…… 81
4.6.1　辐射复合…… 81
4.6.2　非辐射复合…… 82
习 题…… 85

第 5 章　场与物质相互作用的半经典理论

5.1　量子力学的基本概念…… 86
5.2　电偶极矩近似…… 90
5.2.1　量子电偶极矩…… 90
5.2.2　电偶极矩近似…… 91
5.2.3　其他近似…… 93
5.3　辐射场对原子的作用…… 93
5.3.1　单色场的情况…… 93
5.3.2　黑体辐射场的情况…… 96
5.4　单色场对有衰减的二能级原子系统的作用…… 97
5.5　拉比强信号解 …… 100
5.6　偶极矩的运动方程 …… 102
习 题 …… 103

第 6 章　密度矩阵与自洽场理论

6.1　密度算符与密度矩阵 …… 105

6.1.1 算符的矩阵表达式 …… 105
6.1.2 密度算符 …… 106
6.1.3 统计混合状态下密度算符的推广 …… 108
6.1.4 密度矩阵元的意义 …… 109
6.2 密度矩阵的运动方程 …… 110
6.3 激光场的振荡方程 …… 113
6.3.1 激光振荡条件 …… 113
6.3.2 激光振荡的自洽场方程 …… 115
习 题 …… 119

第 7 章 静止原子激光器的振荡理论

7.1 单模振荡 …… 120
7.1.1 集居数矩阵的运动方程 …… 120
7.1.2 单模振荡的一阶近似理论 …… 120
7.1.3 单模振荡的三阶近似理论 …… 122
7.2 多模振荡 模式竞争与锁定 …… 125
7.2.1 多模时的激光振荡方程 …… 125
7.2.2 二模振荡及模竞争 …… 128
7.2.3 三模振荡与模式锁定 …… 129
习 题 …… 131

第 8 章 场与物质的相干相互作用

8.1 相干相互作用的数学描述 …… 132
8.1.1 相干相互作用的矢量表示 …… 132
8.1.2 旋转坐标系下的光学布洛赫方程 …… 136
8.2 光学章动现象 …… 137
8.3 麦克斯韦-布洛赫方程 …… 142
8.4 光子回波 …… 146
8.5 超辐射 …… 148
8.5.1 超辐射的经典理论 …… 148
8.5.2 超辐射的半经典理论 …… 151
8.6 面积定理与自感应透明现象 …… 153
8.7 麦克斯韦-布洛赫方程组成的稳态解——自感应透明 …… 158
8.7.1 共振情况下的解 …… 159
8.7.2 非共振情况下的解 …… 160
习 题 …… 162

第 9 章　场的量子化及其状态的描述

9.1　一维谐振子的量子化 …… 163
9.1.1　产生算符与湮灭算符 …… 163
9.1.2　能量本征值 …… 164
9.1.3　能量本征态 …… 165
9.2　电磁场的量子化 …… 166
9.2.1　电磁场的正则模式展开 …… 166
9.2.2　电磁场的量子化 …… 168
9.2.3　平面电磁波的量子化 …… 169
9.2.4　量子化电磁场的性质 …… 170
9.3　单模位相态与单模光子数态 …… 171
9.3.1　位相算符及位相态的引入 …… 171
9.3.2　位相算符的本征态——位相态 …… 173
9.3.3　单模光子数态的性质 …… 174
9.3.4　单模位相态的性质 …… 175
9.4　相干态 …… 176
9.4.1　相干态的引入 …… 176
9.4.2　相干态$|\alpha\rangle$的性质 …… 177
9.4.3　态矢与算符按相干态的展开 …… 180
习 题 …… 181

第 10 章　场与物质相互作用的量子理论

10.1　量子力学中的三种图像 …… 183
10.1.1　薛定谔图像 …… 183
10.1.2　海森堡图像 …… 184
10.1.3　相互作用图像 …… 185
10.2　辐射场与原子的相互作用 …… 186
10.2.1　薛定谔图像下系统的哈密顿算符 …… 186
10.2.2　相互作用图像下的相互作用能 …… 187
10.3　原子发射及吸收的跃迁几率 …… 189
10.4　原子光辐射的谱线宽度 …… 192
10.5　激光器的库——密度算符方法 …… 194
10.5.1　场与原子密度算符的运动方程 …… 195
10.5.2　辐射场的约化密度算符 …… 195
10.5.3　ρ_{FA}的求解 …… 196
10.5.4　相互作用图像下约化密度算符运动方程 …… 197

10.5.5 光子数表象下辐射场密度矩阵元运动方程…… 198
10.6 激光的光子统计…… 200
10.7 激光线宽…… 204
习 题 …… 206

第 11 章 相干性

11.1 相干性的基本概念…… 207
11.2 一阶相干性…… 209
11.2.1 实多色场的复数表示法…… 209
11.2.2 一阶相干函数及复相干度…… 210
11.2.3 频谱密度函数…… 214
11.3 二阶相干性及高阶相干性…… 215
11.4 相干性的量子理论…… 218
11.4.1 电场强度算符…… 218
11.4.2 相干函数及相干度…… 220
11.4.3 几种场的相干度…… 221
习 题 …… 221

参考文献…… 222

第1章 激光光束

激光(laser)是20世纪60年代初期出现的新型相干光源。与普通光源相比,激光束具有单色性好、方向性好、亮度高的突出优点。它的问世也导致了光学技术革命性的飞跃,不仅为许多科学领域的研究提供了崭新的方法及手段,而且还对许多技术科学及应用产生了极其深远的影响。

光与物质相互作用的理论描述方法对认识各种光学现象起着至关重要的作用。激光是光与物质相互作用时通过受激辐射放大产生的光(light amplification of stimulated emission radiation)。因此,激光的特性一方面可以从电磁场的波动方程获得;另一方面,因为波长小于光学元件的尺寸,激光的一些传输特性又可以从几何光学得到。本章将从上述两个方面研究激光的基本特性。

1.1 电磁场理论基础

1.1.1 电磁场的波动方程

众所周知,光波是频率较无线电波高得多的电磁波,因此,激光光场的变化及传播,满足自由电荷与宏观电流密度均为0时的麦克斯韦电磁场方程组

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}&=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t\\ \nabla\times\boldsymbol{H}&=-\partial\boldsymbol{D}/\partial t\\ \nabla\cdot\boldsymbol{D}&=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}&=0\end{aligned}\right\}\tag{1.1.1}$$

而且电位移矢量 $\boldsymbol{D}$、电场强度 $\boldsymbol{E}$、磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 以及磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 满足

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=n^2\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}&=\mu_0\boldsymbol{H}\end{aligned}\right\}\tag{1.1.2}$$

式中,ε_0 为真空介电常数;ε_r 为介质的相对介电常数;n 为折射率。在一般情况下,n 为空间位置坐标及波长的函数。考虑到光学介质一般是非磁的。上式中已令 $\mu_r=1$。

求式(1.1.1)第一个方程的旋度,将第二方程代入,利用式(1.1.2),可以得到均匀介质中的波动方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\tag{1.1.3}$$

在一般的情况下,光波电磁场不是单色的(也就是说具有许多频率分量),因而可以利用傅里叶分析方法,将其分解为不同频率正弦波的叠加。因此,在假设场量以角频率 ω 随时间作余弦变化的条件下,按照复数形式的表示方法,式(1.1.3)的解具有以下形式:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\tag{1.1.4}$$

当然该电磁波的其他物理量也具有相同的形式。将式(1.1.4)代入后,方程式(1.1.3)变为

需要全本请访问 www.ertongbook.com

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + k^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{1.1.5}$$

式中波矢 $\boldsymbol{k}$ 的大小为

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 n} = n k_0 \tag{1.1.6}$$

是在折射率为 n 的介质中的波数。式(1.1.5)称为亥姆霍兹方程。

亥姆霍兹方程最简单形式的解是单色平面波,其电场强度的形式为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})} \tag{1.1.7}$$

研究结果表明,该电磁波在介质中的传播速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 n}} = \frac{c}{n} \tag{1.1.8}$$

式中,$c = 1 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$是真空中的光速。

在有耗介质中,$n = \sqrt{\varepsilon_r}$不再是实数。由于极化率 χ 可以表示为

$$\chi = \chi' - \mathrm{i}\chi'' \tag{1.1.9}$$

设有耗介质的复折射率 $n = n' - \mathrm{i}n''$,根据 $n^2 = 1 + \chi$,则有

$$\left.\begin{aligned} n' &\approx 1 + \frac{\chi'}{2} \\ n'' &\approx \frac{\chi''}{2} \end{aligned}\right\} \tag{1.1.10}$$

在式(1.1.7)的指数因子中,除了随时间变化的项外,$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n' k_0 r}$代表了随传播距离 r 变化的相位因子,而 $\mathrm{e}^{-k_0 n'' r/2}$代表了场振幅随传播距离 r 衰减的损耗因子。因此,相位因子与极化率的实部有关,损耗因子与极化率的虚部有关。

1.1.2 标量衍射理论

衍射是波传播现象的重要特性。虽然光波的偏振在反射、折射现象中是一个很重要的概念,但是偏振在衍射问题中都没有什么特别的意义,可以用标量波动方程来研究衍射问题。

标量形式的亥姆霍茨方程为

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \tag{1.1.11}$$

其中,ϕ 为电磁场的任意一个分量。由于利用格林函数法可以得到该方程的解,所以令格林函数 G 为两点坐标的函数,即

$$G(x, y, z, x', y', z')$$

其满足的方程为

$$\nabla^2 G + k^2 G = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{1.1.12}$$

而 δ 函数表示为

$$\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \tag{1.1.13}$$

那么,标量亥姆霍兹方程的解可以表示为

$$\phi(z, y, z) = \int_V (\phi \nabla^2 G - G \nabla^2 \phi) \mathrm{d}V \tag{1.1.14}$$

因此,变量(x, y, z)的函数 ϕ,可以由变量(x', y', z')的体积分得出。被积函数可表示为

$$\phi \nabla^2 G - G \nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\phi \nabla G - G \nabla \phi)$$

根据散度定理，可以将式(1.1.14)中的体积分变为封闭曲面的面积分，即

$$\phi(x,y,z)=\oint_S\left(\phi\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}-G\frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S \tag{1.1.15}$$

上式的积分是在体积 V 的封闭曲面 S 上进行的，其法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向朝外并与表面垂直，点 (x,y,z) 位于曲面 S 之内，如图 1-1 所示。该结果表明，如果选择了恰当的格林函数 G，就能从 ϕ 在 S 表面 (x',y',z') 上的值，计算出封闭曲面内任意一点 (x,y,z) 的电磁分量的值。

为了得到解的具体形式，令格林函数

$$G=\frac{1}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr} \tag{1.1.16}$$

式中

$$r=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2} \tag{1.1.17}$$

可以证明，式(1.1.16)的格林函数的确满足式(1.1.12)。将 G 的具体形式代入，得到

$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\oint_S\left(\phi\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}-\frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}\right)\mathrm{d}S \tag{1.1.18}$$

上式称为基尔霍夫-惠更斯衍射积分。

1. 平面衍射屏的基尔霍夫衍射公式

假设单色光波照射在图 1-2 所示的具有任意形状开孔 Σ 的无穷大不透明屏上。为了获得屏后任意一点 $P(x,y,z)$ 的衍射场分布，选择图示的封闭曲面 $S=S_1+S_2$。S_2 为球面，其半径足够大，以便将点 P 包括在 S 之中；S_1 为该球面与屏的交平面。那么，式(1.1.18)的衍射积分由 S_1 和 S_2 两个面积积分所组成。

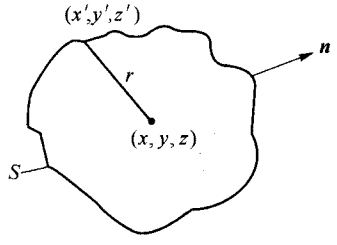


图 1-1　衍射积分示意图

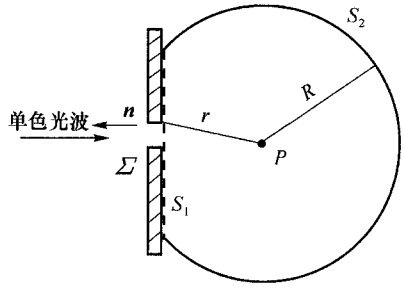


图 1-2　单色光波照射情况

对于球面 S_2，由于 r 的增加方向与外法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向相同，则

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}=\left(-\mathrm{i}k-\frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}\approx-\mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r} \tag{1.1.19}$$

其中，考虑到 $(1/r)\ll k$ 已对结果做了近似。用 Ω 表示 S_2 球面对应于点 P 的立体张角，由于 $\mathrm{d}S=r^2\mathrm{d}\Omega$，则式(1.1.18)在球面 S_2 上的积分为

$$\int_{S_2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}-\phi\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}\right)\mathrm{d}S=\int_\Omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}r\left(\frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}}+\mathrm{i}k\phi\right)\mathrm{d}\Omega$$

由于 $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}|=1$，它在 S_2 球面上显然是一致有界的。可以证明，对于 S_2 面上的各点都满足

$$\lim_{r\to\infty}r\left(\frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}}+\mathrm{i}k\phi\right)=0 \tag{1.1.20}$$

则第二项积分为0。式(1.1.20)称为索末菲辐射条件。

在剩下的平面 S_1 上的积分中,假设在开孔 Σ 上各点的 ϕ 和 $\partial\phi/\partial \boldsymbol{n}$ 与不存在屏时没有区别,而且在平面 S_1 上其余各点处 ϕ 和 $\partial\phi/\partial \boldsymbol{n}$ 恒等于0,那么 Σ 上各点的 ϕ 和 $\partial\phi/\partial \boldsymbol{n}$ 完全由光源在 Σ 上的光场所决定,而且衍射场中任意点 P 的复振幅 $\phi(P)$ 仅仅由 Σ 上各点的 ϕ 和 $\partial\phi/\partial \boldsymbol{n}$ 所确定,即

$$\phi(P) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}\frac{\partial\phi}{\partial \boldsymbol{n}} - \phi\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}\right)\mathrm{d}S \tag{1.1.21}$$

上述两个假设条件,称为基尔霍夫边界条件。式(1.1.21)称为基尔霍夫衍射公式。

实际上,上述两条假设不可能严格成立。但是,实验表明,只要光波波长比开孔 Σ 的线度小得多,而且观察点 P 离 Σ 较远,基尔霍夫衍射公式与实验结果就能基本符合。

2. 菲涅耳-基尔霍夫衍射公式

如图1-3所示,如果在基尔霍夫衍射积分问题中是使用单色光源 P_2 照明衍射开孔 Σ 的,Σ 上的各点用 P_1 表示,P_2 与 P_1 之间的距离用 $\boldsymbol{r}_{21}$ 表示,P 与 P_1 之间的距离用 $\boldsymbol{r}_{01}$ 表示,则有

$$\left.\begin{aligned}
&\phi(P_1) = \frac{A}{r_{21}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr_{21}}\\
&\frac{\partial\phi(P_1)}{\partial \boldsymbol{n}} = \frac{A}{r_{21}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr_{21}}\left(-\mathrm{i}k - \frac{1}{r_{21}}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{21})\\
&\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr_{01}}}{r_{01}} = \frac{1}{r_{01}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr_{01}}\left(-\mathrm{i}k - \frac{1}{r_{01}}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{01})
\end{aligned}\right\} \tag{1.1.22}$$

式中,A 为常数;$(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{21})$和$(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{01})$分别表示 S_1 外法线 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{r}_{21}$ 和 $\boldsymbol{r}_{01}$ 的夹角。假设 $1/r_{21} \ll k$、$1/r_{01} \ll k$,忽略较小的一项,得到

$$\phi(P) = -\frac{A}{\mathrm{i}\lambda}\int_{\Sigma}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(r_{01}+r_{21})}}{r_{01}r_{21}}\frac{\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{01}) - \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{21})}{2}\mathrm{d}S \tag{1.1.23}$$

在照明点光源取旁轴近似的条件下,$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{21}) = -1$,式(1.1.23)进一步简化为

$$\phi(P) = \frac{\mathrm{i}A}{\lambda}\int_{\Sigma}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(r_{01}+r_{21})}}{r_{01}r_{21}}\frac{1+\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{01})}{2}\mathrm{d}S \tag{1.1.24}$$

可以证明,即使在一般照明的条件下,上述公式仍然成立,因此可将公式修改为

$$\phi(P) = \frac{\mathrm{i}}{\lambda}\int_{\Sigma}\phi(P_1)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr_{01}}}{r_{01}}\frac{\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{01}) - \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{21})}{2}\mathrm{d}S \tag{1.1.25}$$

而在旁轴照明条件下表示为

$$\phi(P) = \frac{\mathrm{i}}{\lambda}\int_{\Sigma}\phi(P_1)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr_{01}}}{r_{01}}\frac{1+\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{01})}{2}\mathrm{d}S \tag{1.1.26}$$

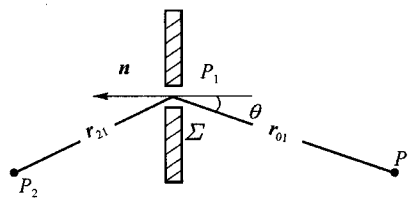


图1-3 单色点光源照明的情况

式中,$\phi(P_1)$泛指开孔 Σ 上的场振幅。一般将式(1.1.23)~(1.1.26)均称为菲涅耳-基尔霍夫衍射积分。可以看出,在一般照明情况下,衍射场分布 $\phi(P)$ 等于照明光源上各点对衍射场分布贡献的叠加。

3. 菲涅耳衍射积分与夫朗和费衍射积分

如图1-3所示。设在 $z=0$ 处放置无限大不透明

的衍射屏上，上面的有限开孔 Σ 的坐标用(x',y')表示。使用单色光照明开孔 Σ。观察衍射花样的观察屏位于 z 处，其横坐标用$(x,\ y)$表示。如果观察点距衍射屏的距离远大于衍射开孔 Σ 的线度，而且衍射屏与观察屏之间的距离远大于观察屏上衍射花样区域的线度，这时两屏上任意两点间的距离 r_{01}及夹角$(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{01})$可以表示为

$$\begin{cases} r_{01}\approx z \\ \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_{01})\approx 1 \end{cases} \tag{1.1.27}$$

则衍射积分式(1.1.26)简化为

$$\phi(x,y)=\frac{\mathrm{i}}{\lambda z}\iint\phi(x',y')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr_{01}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{1.1.28}$$

当衍射屏上开孔的大小与观察点和屏之间的距离相比小得多时，可将式(1.1.17)的 r 按泰勒级数展开为

$$r=z-z'+\frac{1}{2}[(x-x')^2+(y-y')^2]/(z-z')+\cdots \tag{1.1.29}$$

取前两项，则

$$r_{01}\approx z\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-x'}{z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{y-y'}{z}\right)^2\right] \tag{1.1.30}$$

将其代入式(1.1.28)得到

$$\phi(x,y)=\frac{\mathrm{i}}{\lambda z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}\iint\phi(x',y')\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}k}{2z}[(x-x')^2+(y-y')^2]}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{1.1.31}$$

上式称为菲涅耳衍射积分。

如果进一步增大衍射屏与观察屏之间的距离 z，使得在开孔 Σ 最边缘的点上，其对相位的影响也可以忽略，即

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{(x'^2+y'^2)_{\max}}{2z}\ll 1$$

或者表示为

$$z\gg\frac{k}{2}(x'^2+y'^2)_{\max} \tag{1.1.32}$$

则其衍射场分布由下式计算：

$$\phi(x,y)=\frac{\mathrm{i}}{\lambda z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}k}{2z}(x^2+y^2)}\iint\phi(x',y')\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k}{z}(xx'+yy')}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{1.1.33}$$

式(1.1.32)为夫朗和费近似条件。其所规定的 z 值范围称为夫朗和费衍射区，该区域内产生的衍射称为夫朗和费衍射。

在实际问题中，通常依据所符合的近似条件，利用菲涅耳衍射积分式(1.1.31)研究衍射的近场分布，而利用夫朗和费衍射积分式(1.1.33)研究衍射的远场分布。

1.1.3　模式密度

在微波波长，谐振腔是由封闭的良导体组成的腔体。由于受到电磁场边界条件的限制，只能存在一系列独立的具有特定波矢 $\boldsymbol{k}$ 的电磁波。这种以不同波矢及不同偏振方向区分的电磁波状态，称为谐振腔的模式。模式的概念很容易从微波波段推广到光波波段，从谐振腔推广到自由空间。

考虑一个封闭的立方体积谐振腔，其沿三个坐标轴方向的腔长分别为 Δx、Δy 及 Δz，则谐振腔的体积 $V=\Delta x\Delta y\Delta z$，根据谐振腔的驻波条件有

$$\Delta x=m\frac{\lambda}{2}\quad \Delta y=n\frac{\lambda}{2}\quad \Delta z=q\frac{\lambda}{2}$$

式中，m、n、q 为正整数；而波矢 $\boldsymbol{k}$ 的三个分量为

$$k_x=\frac{\pi}{\Delta x}m\quad k_y=\frac{\pi}{\Delta y}n\quad k_z=\frac{\pi}{\Delta z}q$$

每一组正整数 m、n、q 对应腔内一种模式的两种偏振状态。

在以 k_x、k_y、k_z 为坐标的直角坐标系中，不同的 m、n、q 对应着不同的 k_x、k_y、k_z，因此也对应着不同的模式。相邻模式在 $\boldsymbol{k}$ 空间中的间隔为

$$\Delta k_x=\pi/\Delta x\quad \Delta k_y=\pi/\Delta y\quad \Delta k_z=\pi/\Delta z$$

所以每个模式在 $\boldsymbol{k}$ 空间中占据的体积为

$$\Delta k_x\Delta k_y\Delta k_z=\pi^3/V$$

在 $\boldsymbol{k}$ 空间中，波矢绝对值处在 $|k|\sim|k|+\mathrm{d}|k|$ 区间的体积为 $\frac{1}{8}4\pi|k|^2\mathrm{d}|k|$，该区间内的模式数目为

$$\frac{1}{8}4\pi|k|^2\mathrm{d}|k|V/\pi^3$$

考虑到同一 $\boldsymbol{k}$ 有两种不同的偏振方向，以及 $|k|=2\pi\nu/c$，可以得到，单位体积内处在频率 ν 附近 $\mathrm{d}\nu$ 频率宽度内的模式数目。即模式密度为

$$n_\nu=8\pi\nu^2\mathrm{d}\nu/c^3 \tag{1.1.34}$$

上式表明，模式密度与频率平方成正比。因此，光波波段的模式密度较微波波段高得多。

1.2 几何光学基础

当研究对象的几何尺寸远大于光波波长 λ，或者说相对而言 $\lambda\to 0$ 的条件下，光波的衍射效应可以忽略。在该几何光学近似下，可以用一条表示光波传播轨迹及方向的几何线（光线）来代表光，从而研究光线的传播规律。实践证明，使用几何光学方法可以获得与实际符合得很好的结果。因此，虽然几何光学有一定的近似性，但仍然是研究光传播问题的有力工具。

1.2.1 程函方程

下面从麦克斯韦方程组推导几何光学中光线传播所服从的程函方程（追迹方程）。为此，求式(1.1.1)第一个方程的旋度，得到

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}+n^2\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0 \tag{1.2.1}$$

根据 $\boldsymbol{D}$ 的散度为 0，有

$$n^2(\nabla\cdot\boldsymbol{E})+\boldsymbol{E}\cdot(\nabla n^2)=0$$

由于是非均匀介质，所以 $\nabla n^2\neq 0$，将上式代入，则

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+\nabla\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\nabla n^2}{n^2}\right)=n^2\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{1.2.2}$$

由于可以使用波阵面表示光波的传播特性，所以，假设电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的解具有以下形式：

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\omega t-k_0S(x,y,z)]} \tag{1.2.3}$$

式中，$k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=2\pi/\lambda_0$（$\lambda_0$ 为真空中光波波长）为真空中的波数。显然

$$S(x,y,z)=\text{常数}$$

的空间曲面，就是光波传播的等相位面。将试解的形式代入波动方程。由于 $\lambda_0\to0$ 时 $k_0\to\infty$，仅保留波动方程中 k_0^2 项，从而得到

$$[\nabla S(x,y,z)]^2=n^2 \tag{1.2.4}$$

这就是几何光学中的程函方程，它描述了光线沿传播路径上的几何相移 $k_0S(x,y,z)$ 的变化规律。

等相位面的法线方向就是光波的传播方向。因此，光波传播方向上的单位矢量 $\boldsymbol{s}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{s}=\frac{\nabla S(x,y,z)}{n} \tag{1.2.5}$$

另一方面，若用从光线上的固定点到光线上某点的矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 表示该点光线的状态，而用 l 表示沿光线轨迹计算的长度，则 $\boldsymbol{s}$ 又可以表示为

$$\boldsymbol{s}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}l} \tag{1.2.6}$$

根据上两式，有

$$\nabla S(x,y,z)=n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}l} \tag{1.2.7}$$

对式(1.2.4)求梯度，得到

$$\nabla S(x,y,z)[\nabla\nabla S(x,y,z)]=n\nabla n$$

将式(1.2.7)代入，考虑到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}=\sum_i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}l}\frac{\partial}{\partial i}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}l}\cdot\nabla\quad(i=x,y,z)$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}[\nabla S(x,y,z)]=\nabla n$$

再次利用式(1.2.7)，最后求出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}l}\right)=\nabla n \tag{1.2.8}$$

该式就是几何光学中光线所满足的光线方程。

虽然式(1.2.8)仅仅是关于 $\boldsymbol{\rho}$ 的二阶微分方程，但其求解仍然比较困难。如果光线总是沿着光学系统的光轴附近向前传播，传播方向与光轴的夹角 θ 很小，使得

$$\begin{cases}\sin\theta\approx\tan\theta\approx0\\ \cos\theta\approx1\end{cases}$$

在该旁轴光线近似下，若光轴用 z 表示，有

$$\mathrm{d}l\approx\mathrm{d}z$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com