目　　录

第 1 章　小波分析的基本理论 …… 1
1.1　傅里叶变换到小波分析 …… 1
1.1.1　傅里叶变换 …… 1
1.1.2　短时傅里叶变换 …… 4
1.1.3　小波分析 …… 5
1.1.4　小波分析与傅里叶变换的比较 …… 6
1.2　常用小波函数介绍 …… 7
1.2.1　Haar 小波 …… 7
1.2.2　Daubechies(dbN)小波系 …… 8
1.2.3　Biorthogonal(biorNr. Nd)小波系 …… 8
1.2.4　Coiflet(coifN)小波系 …… 10
1.2.5　Symlets(symN)小波系 …… 11
1.2.6　Morlet(morl)小波 …… 11
1.2.7　Mexican Hat(mexh)小波 …… 11
1.2.8　Meyer 函数 …… 12
1.2.9　Battle-Lemarie 小波 …… 13
1.2.10　其他一些实数小波简介 …… 13
1.2.11　其他一些复数小波简介 …… 13
1.3　连续小波变换 …… 15
1.3.1　一维连续小波变换 …… 15
1.3.2　高维连续小波变换 …… 17
1.4　离散小波变换 …… 18
1.4.1　一维离散小波变换 …… 18
1.4.2　二维离散小波变换 …… 19
1.4.3　二进小波变换 …… 21
1.4.4　二进正交小波变换 …… 21
1.4.5　双正交小波变换 …… 22
1.4.6　平稳小波变换 …… 23
1.5　矢量小波变换 …… 24
1.5.1　矢量小波 …… 24
1.5.2　矢量积小波变换 …… 24
1.5.3　多级分解与重构 …… 25
1.6　多分辨分析与 Mallat 算法 …… 25
1.6.1　多分辨分析 …… 25
1.6.2　Mallat 算法(快速小波变换 FWT) …… 28
1.7　提升小波变换 …… 30
1.7.1　提升小波变换的概述 …… 30

需要全本请访问 www.ertongbook.com

1.7.2 提升法的步骤 …… 31
1.7.3 提升算法 …… 32
1.8 小波包分析 …… 33
1.8.1 小波包的定义 …… 34
1.8.2 小波包的性质 …… 35
1.8.3 小波包的空间分解 …… 35
1.8.4 小波包算法 …… 36
1.8.5 双正交小波包 …… 37
第 2 章 小波分析工具箱函数 …… 38
2.1 小波分析中的通用函数 …… 38
2.2 小波函数 …… 76
2.3 一维连续小波变换 …… 88
2.4 一维离散小波变换 …… 91
2.5 二维离散小波变换 …… 105
2.6 离散平稳小波变换 …… 122
2.7 小波包变换 …… 130
2.8 信号和图像的消噪与压缩 …… 151
2.9 树操作应用函数 …… 179
2.10 提升小波变换 …… 212
2.11 辅助功能与演示函数 …… 226
2.12 图像用户界面函数 …… 229
2.13 其他小波应用函数 …… 230
2.14 添加自己的小波函数 …… 236
2.14.1 准备添加一个小波函数 …… 236
2.14.2 添加一个新的小波函数系列 …… 236
2.14.3 添加小波函数系列之后工具箱的使用 …… 244
2.15 GUI 用法介绍 …… 245
2.15.1 概述 …… 245
2.15.2 一维图形工具 …… 249
2.15.3 二维图形工具 …… 264
2.15.4 显示工具 …… 270
2.15.5 小波设计工具 …… 272
2.15.6 一维小波专用工具 …… 274
2.15.7 二维小波专用工具 …… 278
2.15.8 信号与图像的拓展和截取工具 …… 280
2.16 小波分析中的数据 I/O 函数 …… 282
第 3 章 小波分析的应用技术 …… 317
3.1 一维小波分析的应用 …… 317
3.1.1 数学计算 …… 318
3.1.2 小波函数中的过零点分析 …… 325
3.1.3 信号奇异性检测 …… 325
3.1.4 信号消噪处理 …… 332
3.1.5 识别在含噪声信号中有用信号发展趋势 …… 340

3.1.6 提取信号中某一频率区间的信号 …… 342
3.1.7 信号在某些频率区间的抑制或衰减 …… 345
3.1.8 检测信号的自相似性 …… 349
3.1.9 信号压缩 …… 350
3.1.10 语音增强 …… 351
3.1.11 语音压缩 …… 352
3.2 二维小波分析的应用 …… 354
3.2.1 图像压缩 …… 355
3.2.2 图像消噪 …… 360
3.2.3 图像增强 …… 364
3.2.4 图像融合 …… 365
3.2.5 图像平滑处理 …… 367
3.3 小波包分析的应用 …… 368
3.3.1 小波包的构造 …… 370
3.3.2 小波包的元素 …… 371
3.3.3 小波包的组织管理 …… 372
3.3.4 最佳小波包基的选择 …… 373
3.3.5 信号消噪处理 …… 376
3.3.6 图像压缩 …… 380
3.3.7 图像边缘检测 …… 382
3.3.8 特征提取和识别 …… 383
附录 A MATLAB 命令参考 …… 390
附录 B Toolbox 函数 …… 412
参考文献 …… 446

第 1 章　小波分析的基本理论

小波分析属于时频分析的一种。传统的信号分析是建立在傅里叶(Fourier)变换的基础上的，但是，傅里叶分析使用的是一种全局的变换，即要么完全在时域，要么完全在频域，它无法表述信号的时频局域性质，而时频局域性质恰恰是非平稳信号最根本和最关键的性质。为了分析和处理非平稳信号，人们对傅里叶分析进行了推广乃至根本性的革命，提出并发展了一系列新的信号分析理论：短时傅里叶变换、时频分析、Gabor 变换、小波变换、Randon-Wigner 变换、分数阶傅里叶变换、线性调频小波变换、循环统计量理论和调幅—调频信号分析等。其中，短时傅里叶变换和小波变换也是因传统的傅里叶变换不能够满足信号处理的要求而产生的。短时傅里叶变换分析的基本思想是：假定非平稳信号在分析窗函数 $g(t)$的一个短时间间隔内是平稳(伪平稳)的，并移动分析窗函数，使 $f(t)g(t-\tau)$在不同的有限时间宽度内是平稳信号，从而计算出各个不同时刻的功率谱。但从本质上讲，短时傅里叶变换是一种单一分辨率的信号分析方法(因为它使用一个固定的短时窗函数)，在信号分析上还存在着不可逾越的缺陷。

小波变换是一种信号的时间—尺度(时间—频率)分析方法，它具有多分辨率分析(Multi-resolution Analysis)的特点，而且在时频两域都具有表征信号局部特征的能力，是一种窗口大小固定不变，但其形状可改变，时间窗和频率窗都可以改变的时频局部化分析方法。即在低频部分具有较高的频率分辨率和较低的时间分辨率，在高频部分具有较高的时间分辨率和较低的频率分辨率，很适合于探测正常信号中夹带的瞬态反常现象并展示其成分，所以被誉为分析信号的显微镜。

1.1　傅里叶变换到小波分析

1.1.1　傅里叶变换

傅里叶变换是众多科学领域(特别是信号处理、图像处理、量子物理等)里的重要的应用工具之一。从实用的观点看，当人们考虑傅里叶分析的时候，通常是指(积分)傅里叶变换和傅里叶级数。

定义 1.1　函数 $f(t)\in L^1(\mathbf{R})$的连续傅里叶变换定义为

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}f(t)\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

$F(\omega)$的傅里叶逆变换定义为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}F(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{1.2}$$

为了计算傅里叶变换，需要用数值积分，即取 $f(t)$ 在 R 上的离散点上的值来计算这个积分。在实际应用中，我们希望在计算机上实现信号的频谱分析及其他方面的处理工作，对信号的要求是：在时域和频域应是离散的，且都应是有限长的。下面给出离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform，DFT)的定义。

定义 1.2 给定实的或复的离散时间序列 f_0，f_1，…，f_{N-1}，设该序列绝对可积，即满足 $\sum_{n=0}^{N-1} |f_n| < \infty$，称

$$X(k) = F(f_n) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{1.3}$$

为序列$\{f_n\}$的离散傅里叶变换，称

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi k}{N}n} \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{1.4}$$

为序列$\{X(k)\}$的离散傅里叶逆变换(IDFT)。

在式(1.4)中，n 相当于对时间域的离散化，k 相当于频率域的离散化，且它们都是以 N 点为周期的。离散傅里叶变换序列$\{X(k)\}$是以 2π 为周期的，且具有共轭对称性。

若 $f(t)$ 是实轴上以 2π 为周期的函数，即 $f(t) \in L^2(0, 2\pi)$，则 $f(t)$ 可以表示成傅里叶级数的形式，即

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jnt} \tag{1.5}$$

傅里叶变换是时域到频域互相转化的工具，从物理意义上讲，傅里叶变换的实质是把 $f(t)$ 这个波形分解成许多不同频率的正弦波的叠加和。这样我们就可将对原函数 $f(t)$ 的研究转化为对其权系数，即其傅里叶变换 $F(\omega)$ 的研究。从傅里叶变换中可以看出，这些标准基是由正弦波及其高次谐波组成的，因此它在频域内是局部化的。

在进行傅里叶变换时，如果能合理运用它的有关性质，运算将很方便。下面列出了傅里叶变换的一些常用性质。

1. 线性性质

设 $F_1(\omega)$ 和 $F_2(\omega)$ 分别为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的傅里叶变换，α 和 β 为常数，则有

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \leftrightarrow \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega) \tag{1.6}$$

这个性质表明，函数线性组合的傅里叶变换等于各函数傅里叶变换的线性组合。傅里叶逆变换亦具有类似的性质。

2. 位移性质

设 $F(\omega)$ 为函数 $f(t)$ 的傅里叶变换，则有

$$f(t \pm t_0) \leftrightarrow e^{\pm j\omega t_0} F(\omega) \tag{1.7}$$

该性质表明，时间函数 $f(t)$ 沿 t 轴向左或向右位移 t_0 的傅里叶变换等于 $f(t)$ 的傅里叶变换乘以因子 $e^{j\omega t_0}$ 或 $e^{-j\omega t_0}$。傅里叶逆变换亦具有类似的位移性质。

3. 微分性质

设 $F(\omega)$ 为函数 $f(t)$ 的傅里叶变换，$f'(t)$ 表示函数 $f(t)$ 的微分，则有

需要全本请访问 www.ertongbook.com

$$f'(t) \leftrightarrow \mathrm{j}\omega F(\omega) \tag{1.8}$$

该性质表明，一个函数的导数的傅里叶变换等于这个函数的傅里叶变换乘以因子 $\mathrm{j}\omega$。由该性质可以导出一般的微分公式：

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow (\mathrm{j}\omega)^n F(\omega)$$

4. 积分性质

设 $F(\omega)$为函数 $f(t)$的傅里叶变换，如果当 $t \to +\infty$时，$\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t \to 0$，则有

$$\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t \leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\omega) \tag{1.9}$$

5. 乘积定理

设 $F_1(\omega)$和 $F_2(\omega)$分别为 $f_1(t)$和 $f_2(t)$的傅里叶变换，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1^*(\omega)F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega)F_2^*(\omega) \tag{1.10}$$

其中，$f_1(t)$和 $f_2(t)$为 t 的实函数；$F_1^*(\omega)$和 $F_2^*(\omega)$分别为 $F_1(\omega)$和 $F_2(\omega)$的共轭函数。

6. 能量积分

设 $F(\omega)$为函数 $f(t)$的傅里叶变换，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{1.11}$$

该式又称为巴塞瓦(Parseval)等式。

例 1-1　在某工程实际应用中，有一信号的主要频率成分是由 50 Hz 和 300 Hz 的正弦信号组成，该信号被一白噪声污染，现对该信号进行采样，采样频率为 1000 Hz。通过傅里叶变换对其频率成分进行分析。

解　该问题实质上是利用傅里叶变换对信号进行频域分析，其 MATLAB 程序如下：

```
t=0:0.001:1.3;                          %时间间隔为 0.001 说明采样频率为 1000Hz
x=sin(2*pi*50*t)+sin(2*pi*300*t);       %产生主要频率为 50 Hz 和 300 Hz 的信号
f=x+3.5*randn(1,length(t));             %在信号中加入白噪声
subplot(321);plot(f);                   %画出原始信号的波形图
Ylabel('幅值');
Xlabel('时间');
title('原始信号');
y=fft(f,1024);    %对原始信号进行离散傅里叶变换，参加 DFT 的采样点个数为 1024
p=y.*conj(y)/1024;                      %计算功率谱密度
ff=1000*(0:511)/1024;                   %计算变换后不同点所对应的频率值
subplot(322);plot(ff,p(1:512));         %画出信号的频谱图
Ylabel('功率谱密度');
Xlabel('频率');
title('信号功率谱图');
```

程序输出结果如图 1.1 所示。

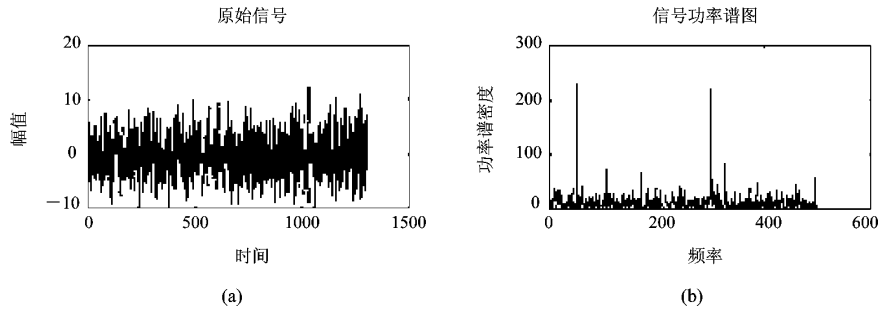


图 1.1

从图 1.1(a)中我们看不出任何频域的性质，但从信号的功率谱图(图 1.1(b))中，我们可以明显地看出该信号是由频率为 50 Hz 和 300 Hz 的正弦信号和频率分布广泛的白噪声信号组成的，也可以明显地看出信号的频率特性。

虽然傅里叶变换能够将信号的时域特征和频域特征联系起来，能分别从信号的时域和频域观察，但不能把二者有机地结合起来。这是因为信号的时域波形中不包含任何频域信息，而其傅里叶谱是信号的统计特性。从其表达式中也可以看出，它是整个时间域内的积分，没有局部化分析信号的功能，完全不具备时域信息，也就是说，对于傅里叶谱中的某一频率，不能够知道这个频率是在什么时候产生的。这样在信号分析中就面临一对最基本的矛盾：时域和频域的局部化矛盾。

在实际的信号处理过程中，尤其是对非平稳信号的处理中，信号在任一时刻附近的频域特征都很重要。如柴油机缸盖表面的振动信号就是由撞击或冲击产生的，是一瞬变信号，单从时域或频域上来分析是不够的。这就促使人们去寻找一种新方法，能将时域和频域结合起来描述观察信号的时频联合特征，构成信号的时频谱。这就是所谓的时频分析法，亦称为时频局部化方法。

1.1.2 短时傅里叶变换

由于标准傅里叶变换只在频域里有局部分析的能力，而在时域里不存在局部分析的能力，因此 Dennis Gabor 于 1946 年引入了短时傅里叶变换(Short-time Fourier Transform)。短时傅里叶变换的基本思想是：把信号划分成许多小的时间间隔，用傅里叶变换分析每一个时间间隔，以便确定该时间间隔存在的频率。其表达式为

$$S(\omega,\tau)=\int_{\mathbf{R}} f(t)g^{*}(\omega-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{1.12}$$

其中，“$*$”表示复共轭；$g(t)$为有紧支集的函数；$f(t)$为被分析的信号。在这个变换中，$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$起着频限的作用，$g(t)$起着时限的作用。随着时间 t 的变化，$g(t)$所确定的“时间窗”在 t 轴上移动，使 $f(t)$“逐渐”进行分析。因此 $g(t)$往往被称为窗口函数，$S(\omega,\tau)$大致反映了时刻为 τ、频率为 ω 时 $f(t)$的“信号成分”的相对含量。这样，信号在窗函数上的展开就可以表示为在$[\tau-\delta,\tau+\delta]$、$[\omega-\varepsilon,\omega+\varepsilon]$这一区域内的状态，并把这一区域称为窗口，$\delta$ 和 ε 分别称为窗口的时宽和频宽，表示了时频分析中的分辨率，窗宽越小则分辨率就越高。很显然希望 δ 和 ε 都非常小，以便有更好的时频分析效果，但海森堡(Heisenberg)测不准原理(Uncertainty Principle)指出，δ 和 ε 是互相制约的，两者不可能同时都任意小(事实上，$\delta\varepsilon\geqslant\frac{1}{2}$，

且仅当$g(t)=\frac{1}{\delta\pi^{1/4}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\delta^2}}$为高斯函数时，等号成立），变换如图 1.2 所示。

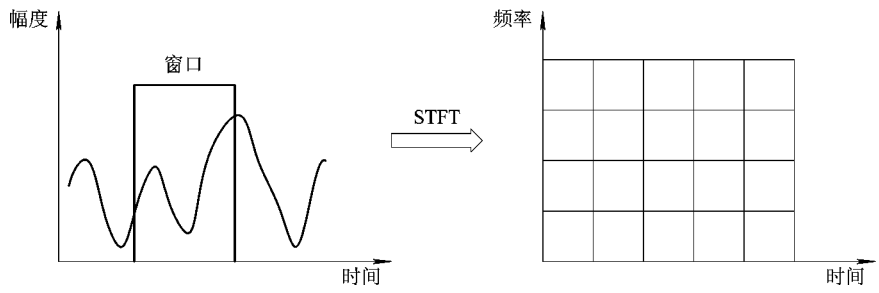


图 1.2

由此可见，短时傅里叶(STFT)虽然在一定程度上克服了标准傅里叶变换不具有局部分析能力的缺陷，但它也存在着自身不可克服的缺陷，即当窗函数 $g(t)$确定后，矩形窗口的形状就确定了，τ、ω 只能改变窗口在相平面上的位置，而不能改变窗口的形状。可以说 STFT 实质上是具有单一分辨率的分析，若要改变分辨率，则必须重新选择窗函数 $g(t)$。因此，STFT 用来分析平稳信号犹可，但对非平稳信号，在信号波形变化剧烈的时刻，主频是高频，要求有较高的时间分辨率(即 δ 要小)，而波形变化比较平缓的时刻，主频是低频，则要求比较高的频率分辨率(即 ε 要小)，而短时傅里叶不能兼顾两者。

1.1.3　小波分析

小波分析方法是一种窗口大小(即窗口面积)固定但其形状可改变，时间窗和频率窗都可改变的时频局部化分析方法。即在低频部分具有较高的频率分辨率和较低的时间分辨率，在高频部分具有较高的时间分辨率和较低的频率分辨率，所以被誉为数学显微镜。正是这种特性，使小波变换具有对信号的自适应性。

小波分析被看成调和分析这一数学领域半个世纪以来的工作结晶，已经广泛地应用于信号处理、图像处理、量子场论、地震勘探、语音识别与合成、音乐、雷达、CT 成像、彩色复印、流体湍流、天体识别、机器视觉、机械故障诊断与监控、分形以及数字电视等科技领域。原则上讲，传统上使用傅里叶分析的地方，都可以用小波分析取代。小波分析优于傅里叶变换的地方是，它在时域和频域同时具有良好的局部化性质。

设 $\psi(t)\in L^2(\mathbf{R})$($L^2(\mathbf{R})$表示平方可积的实数空间，即能量有限的信号空间)，其傅里叶变换为 $\Psi(\omega)$。当 $\Psi(\omega)$满足允许条件(Admissible Condition)：

$$C_\psi=\int_{\mathbf{R}}\frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|}\,\mathrm{d}\omega<\infty \tag{1.13}$$

时，我们称 $\psi(t)$为一个基本小波或母小波(Mother Wavelet)。将母函数 $\psi(t)$经伸缩和平移后，就可以得到一个小波序列。

对于连续的情况，小波序列为

$$\psi_{a,b}(t)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\qquad a,b\in\mathbf{R};\ a\neq 0 \tag{1.14}$$

其中，a 为伸缩因子；b 为平移因子。

对于离散的情况，小波序列为

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}t - k) \qquad j,k \in \mathbf{Z} \tag{1.15}$$

对于任意的函数 $f(t)\in L^2(\mathbf{R})$的连续小波变换为

$$W_f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b}\rangle = |a|^{-1/2}\int_{\mathbf{R}} f(t)\,\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\mathrm{d}t \tag{1.16}$$

其逆变换为

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi}\int_{\mathbf{R}^+}\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{a^2}W_f(a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{d}a\mathrm{d}b \tag{1.17}$$

小波变换的时频窗口特性与短时傅里叶的时频窗口不一样。其窗口形状为两个矩形 $[b-a\Delta\psi, b+a\Delta\psi]\times[(\pm\omega_0-\Delta\Psi)/a, (\pm\omega_0+\Delta\Psi)/a]$，窗口中心为$(b, \pm\omega_0/a)$，时窗和频窗宽分别为 $a\Delta\psi$ 和 $\Delta\Psi/a$。其中，b 仅仅影响窗口在相平面时间轴上的位置，而 a 不仅影响窗口在频率轴上的位置，也影响窗口的形状。这样小波变换对不同的频率在时域上的取样步长是调节性的：在低频时，小波变换的时间分辨率较低，而频率分辨率较高；在高频时，小波变换的时间分辨率较高，而频率分辨率较低，这正符合低频信号变化缓慢而高频信号变化迅速的特点。这便是它优于经典的傅里叶变换与短时傅里叶变换的地方。从总体上来说，小波变换比短时傅里叶变换具有更好的时频窗口特性。

1.1.4 小波分析与傅里叶变换的比较

小波分析是傅里叶分析思想方法的发展与延拓，它自产生以来，就一直与傅里叶分析密切相关，它的存在性证明，小波基的构造以及结果分析都依赖于傅里叶分析，二者是相辅相成的。两者相比较主要有以下不同点。

（1）傅里叶变换的实质是把能量有限信号 $f(t)$分解到以$\{e^{j\omega t}\}$为正交基的空间上去；小波变换的实质是把能量有限信号 $f(t)$分解到 $W_{-j}(j=1, 2, \cdots, J)$和 V_{-j}所构成的空间上去。

（2）傅里叶变换用到的基本函数只有 $\sin(\omega t)$、$\cos(\omega t)$、$\exp(j\omega t)$，具有唯一性；小波分析用到的函数(即小波函数)则具有不唯一性，同一个工程问题用不同的小波函数进行分析有时结果相差甚远。小波函数的选用是小波分析应用到实际中的一个难点问题(也是小波分析研究的一个热点问题)，目前，往往是通过经验或不断的试验(对结果进行对照分析)来选择小波函数。

（3）在频域中，傅里叶变换具有较好的局部化能力，特别是对于那些频率成分比较简单的确定性信号，傅里叶变换很容易把信号表示成各频率成分的叠加和的形式，如 $\sin(\omega_1 t)+0.345\ \sin(\omega_2 t)+4.23\ \cos(\omega_3 t)$。但在时域中，傅里叶变换没有局部化能力，即无法从信号 $f(t)$的傅里叶变换 $F(\omega)$中看出 $f(t)$在任一时间点附近的性态。事实上，$F(\omega)\mathrm{d}\omega$ 是关于频率为 ω 的谐波分量的振幅，在傅里叶展开式中，它是由 $f(t)$的整体性态所决定的。

（4）在小波分析中，尺度 a 的值越大相当于傅里叶变换中 ω 的值越小。

（5）在短时傅里叶变换中，变换系数 $S(\omega, \tau)$主要依赖于信号在$[\tau-\delta, \tau+\delta]$片段中的情况，时间宽度是 2δ(因为 δ 是由窗函数 $g(t)$唯一确定的，所以 2δ 是一个定值)。在小波变换中，变换系数 $W_f(a, b)$主要依赖于信号在$[b-a\Delta\psi, b+a\Delta\psi]$片段中的情况，时间宽度是 $2a\Delta\psi$，该时间宽度是随着尺度 a 的变化而变化的，所以小波变换具有时间局部分析能力。

（6）若用信号通过滤波器来解释，小波变换与短时傅里叶变换不同之处在于：对短时傅里叶变换来说，带通滤波器的带宽 Δf 与中心频率 f 无关；相反，小波变换带通滤波器

的带宽 Δf 则正比于中心频率 f，即

$$Q=\frac{\Delta f}{f}=C \qquad (C \text{ 为常数})$$

亦即滤波器有一个恒定的相对带宽，称之为等 Q 结构（Q 为滤波器的品质因数，且有 $Q=\frac{\text{中心频率}}{\text{带宽}}$）。

1.2　常用小波函数介绍

与标准傅里叶变换相比，小波分析中所用到的小波函数具有不唯一性，即小波函数 $\psi(x)$ 具有多样性。但小波分析在工程应用中的一个十分重要的问题是最优小波基的选择问题，这是因为用不同的小波基分析同一个问题会产生不同的结果。目前，主要是通过用小波分析方法处理信号的结果与理论结果的误差来判定小波基的好坏，并由此选定小波基。

根据不同的标准，小波函数具有不同的类型，这些标准通常有：

（1）ψ、Ψ、ϕ 和 Φ 的支撑长度。即当时间或频率趋向无穷大时，ψ、Ψ、ϕ 和 Φ 从一个有限值收敛到 0 的速度。

（2）对称性。它在图像处理中对于避免移相是非常有用的。

（3）ψ 和 ϕ（如果存在的情况下）的消失矩阶数。它对于压缩是非常有用的。

（4）正则性。它对信号或图像的重构获得较好的平滑效果是非常有用的。

但在众多小波基函数（也称核函数）的家族中，有一些小波函数被实践证明是非常有用的。我们可以通过 waveinfo 函数获得工具箱中的小波函数的主要性质，小波函数 ψ 和尺度函数 ϕ 可以通过 wavefun 函数计算，滤波器可以通过 wfilters 函数产生。在本节中，我们主要介绍一下 MATLAB 中常用到的小波函数。

1.2.1　Haar 小波

Haar 函数是在小波分析中最早用到的一个具有紧支撑的正交小波函数，同时也是最简单的一个函数，它是非连续的，类似一个阶梯函数。Haar 函数与下面将要介绍的 db1 小波函数是一样的。Haar 函数的定义为

$$\psi_{\mathrm{H}}=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ -1, & \dfrac{1}{2}\leqslant x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.18}$$

尺度函数为

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.19}$$

在 MATLAB 中，可以输入命令 waveinfo('haar') 获得 Haar 函数的一些主要性质，如图 1.3 所示。

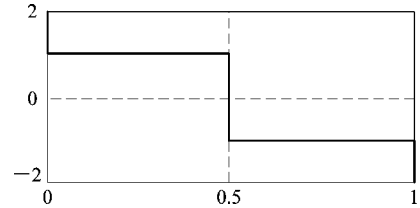


图 1.3　Harr 小波函数

1.2.2 Daubechies(dbN)小波系

Daubechies 函数是由世界著名的小波分析学者 Inrid Daubechies 构造的小波函数，除了 db1(即 haar 小波)外，其他小波没有明确的表达式，但转换函数 h 的平方模是很明确的。db$N$ 函数是紧支撑标准正交小波，它的出现使离散小波分析成为可能。

· 假设 $P(y)=\sum_{k=0}^{N-1} C_k^{N-1+k} y^k$，其中，$C_k^{N-1+k}$ 为二项式的系数，则有

$$|m_0(\omega)|^2=\left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right)^N P\left(\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) \tag{1.20}$$

其中，$m_0(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{2N-1} h_k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega}$

· 小波函数 ψ 和尺度函数 ϕ 的有效支撑长度为 $2N-1$，小波函数 ψ 的消失矩阶数为 N。

· 大多数 db$N$ 不具有对称性，对于有些小波函数，不对称性是非常明显的。

· 正则性随着序号 N 的增加而增加。

· 函数具有正交性。

在这里，我们画出 db4 和 db8 小波的尺度函数、小波函数、分解滤波器和重构滤波器的图形，如图 1.4 所示。

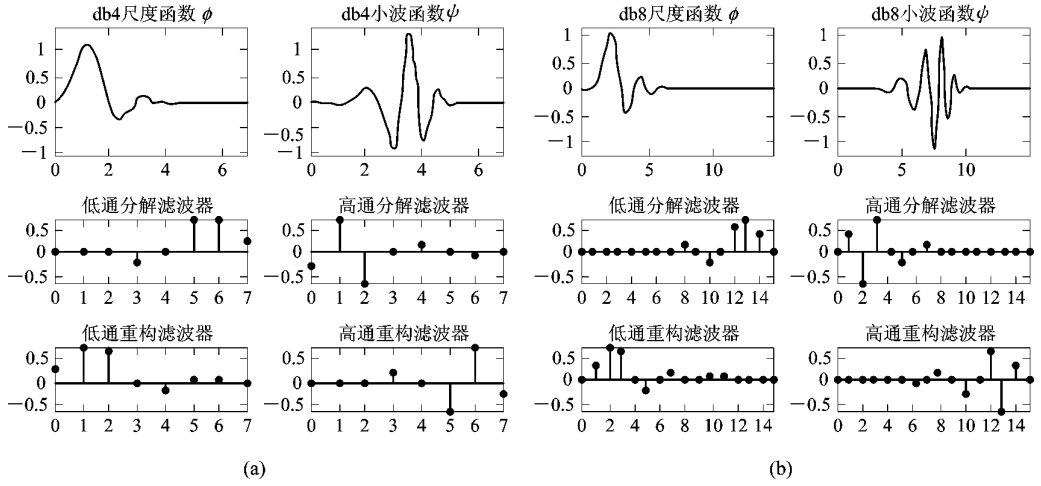


图 1.4

Daubechies 小波函数提供了比 Haar 组更有效的分析和综合。Daubechies 系中的小波基记为 db$N$，N 为序号，且 $N=1, 2, \cdots, 10$。

在 MATLAB 中，可以输入命令 waveinfo('db')获得 Daubechies 函数的一些主要性质。

1.2.3 Biorthogonal(biorNr. Nd)小波系

Biorthogonal 函数系的主要特性体现在具有线性相位性，它主要应用在信号与图像的重构中，通常的用法是采用一个函数进行分解，用另外一个小波函数进行重构。众所周知，

需要全本请访问 www.ertongbook.com

如果使用同一个滤波器进行分解和重构，对称性和重构的精确性将成为一对矛盾，而采用两个函数，将有效地解决这个问题。

设函数 $\bar{\psi}$ 用于信号分解，而函数 ψ 用于信号重构，则分解和重构的关系式为

$$\bar{C}_{j,k} = \int s(x)\bar{\psi}_{j,k}(x)\mathrm{d}x \tag{1.21}$$

$$S = \sum_{j,k} \bar{C}_{j,k}\psi_{j,k} \tag{1.22}$$

另外，$\bar{\psi}$ 与 ψ 之间具有二元性

$$\begin{cases} \int \bar{\psi}_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(x)\mathrm{d}x = 0 \\ \int \bar{\phi}_{0,k}(x)\phi_{0,k'}(x)\mathrm{d}x = 0 \end{cases} \quad (j \neq j',\ k \neq k') \tag{1.23}$$

这样，利用 $\bar{\psi}$ 函数的特性，在信号分解时可以获得一些很好的分解性质(如振动、零力矩)，而利用 ψ 的特性，在信号重构时又可获得一些很好的重构性质(如正则性)。

Biorthogonal 函数系通常表示成 biorNr. Nd 的形式：

$Nr=1$　　$Nd=1, 3, 5$

$Nr=2$　　$Nd=2, 4, 6, 8$

$Nr=3$　　$Nd=1, 3, 5, 7, 9$

$Nr=4$　　$Nd=4$

$Nr=5$　　$Nd=5$

$Nr=6$　　$Nd=8$

其中，r 表示重构(Reconstruction)；d 表示分解(Decomposition)。

在这里，我们画出 bior2.4 和 bior4.4 小波(分别用于分解与重构)的尺度函数、小波函数、分解滤波器和重构滤波器的图形，如图 1.5 所示。

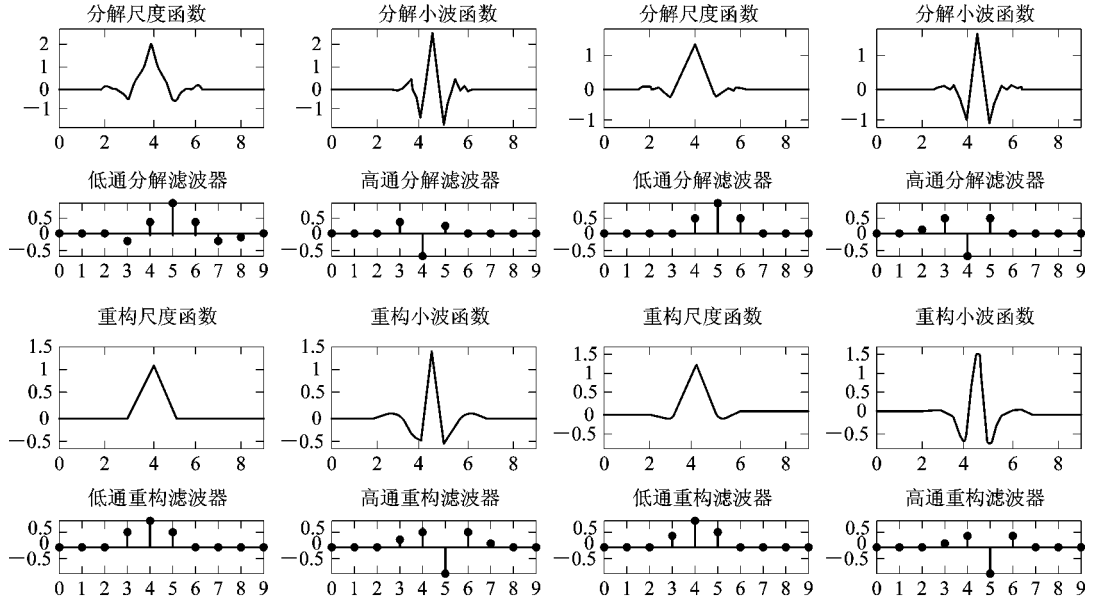


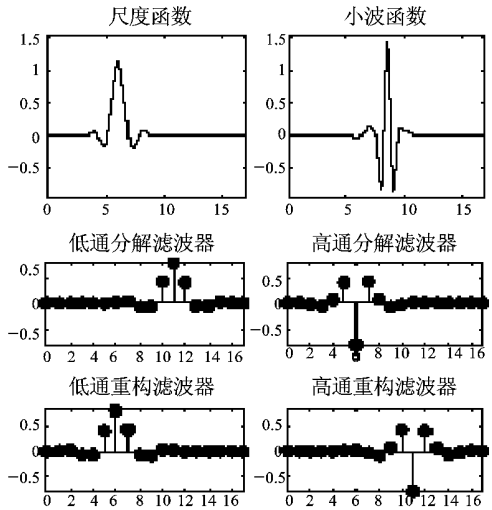
图 1.5

在 MATLAB 中，可输入命令 waveinfo('bior')获得该函数的主要性质。

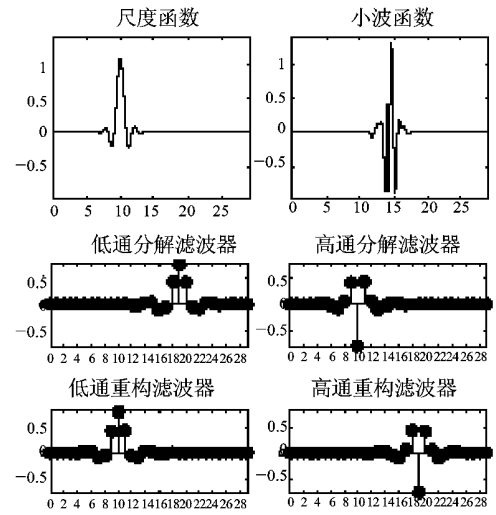
1.2.4 Coiflet(coif*N*)小波系

Coiflet 函数也是由 Daubechies 构造的一个小波函数，它具有 coif*N*($N=1,2,3,4,5$)这一系列。Coiflet 具有比 db*N* 更好的对称性。从支撑长度的角度看，coif*N* 具有和 db3*N* 和 sym3*N* 相同的支撑长度；从消失矩的数目来看，coif*N* 具有和 db2*N* 和 sym2*N* 相同的消失矩数目。

在这里，我们画出 coif3 和 coif5 小波的尺度函数、小波函数、分解滤波器和重构滤波器的图形，如图 1.6 所示。



(a)



(b)

图 1.6

在 MATLAB 中，可输入命令 waveinfo('coif')获得该函数的主要性质。

1.2.5　SymletsA(symN)小波系

Symlets 函数系是由 Daubechies 提出的近似对称的小波函数，它是对 db 函数的一种改进。Symlets 函数系通常表示为 sym$N$(N=2，3，…，8)的形式。

在这里，我们画出 sym4 和 sym8 小波的尺度函数、小波函数、分解滤波器和重构滤波器的图形，如图 1.7 所示。

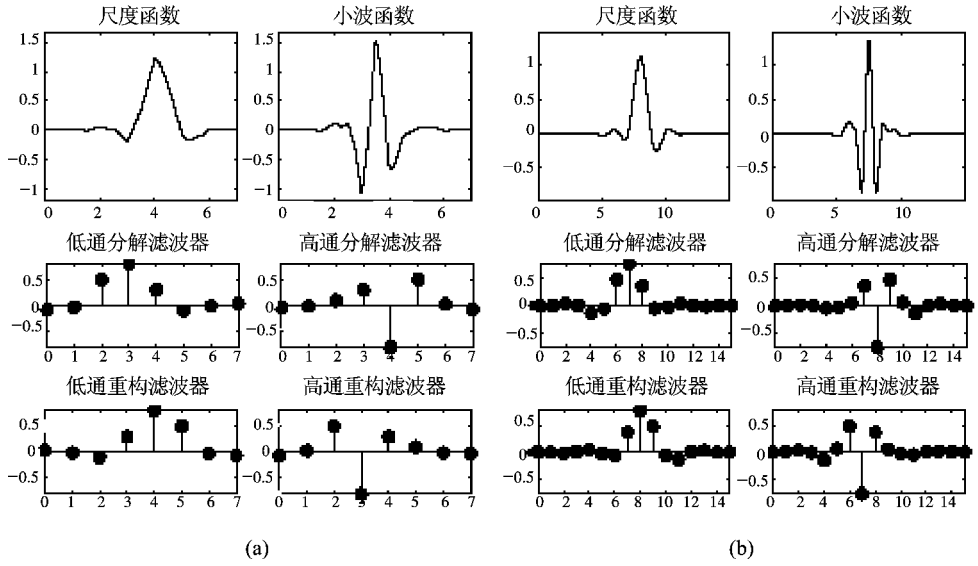


图 1.7

在 MATLAB 中，可输入 waveinfo('sym') 获得该函数的主要性质。

1.2.6　Morlet(morl)小波

Morlet 函数定义为

$$\psi(x) = Ce^{-x^2/2}\cos(5x) \qquad (1.24)$$

它的尺度函数不存在，且不具有正交性。

在 MATLAB 中，可输入 waveinfo('morl')获得该函数的主要性质，如图 1.8 所示。

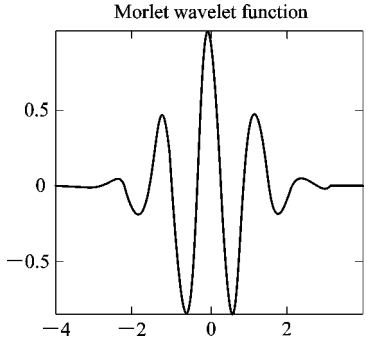


图 1.8

1.2.7　Mexican Hat(mexh)小波

Mexican Hat 函数为

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}(1-x^2)e^{-x^2/2} \qquad (1.25)$$

它是 Gauss 函数的二阶导数，因为它像墨西哥帽的截面，所以有时称这个函数为墨西哥帽函数（如图 1. 9 所示）。墨西哥帽函数在时间域与频域都有很好的局部化，并且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad (1.26)$$

由于它的尺度函数不存在，因此分析不具有正交性。

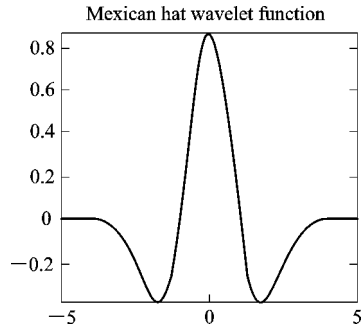


图 1. 9

在 MATLAB 中，可输入 waveinfo('mexh') 获得该函数的主要性质。

1. 2. 8 Meyer 函数

Meyer 小波的小波函数 ψ 和尺度函数 ϕ 都是在频域中进行定义的，是具有紧支撑的正交小波。

$$\Psi(\omega) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega/2} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} v\left(\dfrac{3}{2\pi} \mid \omega \mid -1\right)\right), & \dfrac{2\pi}{3} \leqslant \mid \omega \mid < \dfrac{4\pi}{3} \\ (2\pi)^{-1/2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega/2} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} v\left(\dfrac{3}{2\pi} \mid \omega \mid -1\right)\right), & \dfrac{4\pi}{3} \leqslant \mid \omega \mid \leqslant \dfrac{8\pi}{3} \\ 0, & \mid \omega \mid \notin \left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{8\pi}{3}\right] \end{cases} \qquad (1.27)$$

其中，$v(a)$ 为构造 Meyer 小波的辅助函数，且有

$$v(a) = a^4(35 - 84a + 70a^2 - 20a^3) \qquad a \in [0, 1] \qquad (1.28)$$

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2}, & \mid \omega \mid < \dfrac{2\pi}{3} \\ (2\pi)^{-1/2} \cos\left(\dfrac{\pi}{2} v\left(\dfrac{3}{2\pi} \mid \omega \mid -1\right)\right), & \dfrac{2\pi}{3} \leqslant \omega \leqslant \dfrac{4\pi}{3} \\ 0, & \mid \omega \mid > \dfrac{4\pi}{3} \end{cases} \qquad (1.29)$$

在 MATLAB 中，可输入 waveinfo('meyr') 获得该函数的主要性质，如图 1. 10 所示。

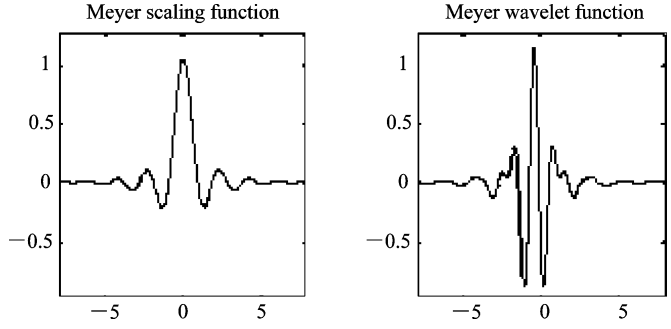


图 1. 10

1.2.9　Battle-Lemarie 小波

Battle-Lemarie 小波在 MATLAB 工具箱中不存在，但它也是我们常用到的一个小波函数。它具有两种形式，一种具有确定的正交性，一种不具有确定的正交性。当 $N=1$ 时，尺度函数是线性样条函数；当 $N=2$ 时，尺度函数是具有有限支撑的 B-样条函数。更一般的情况，对于一个 N 次 B-样条小波，尺度函数为

$$\Phi(\omega)=(2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega/2}\left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right]^{N+1} \tag{1.30}$$

当 N 为奇数时，$k=0$；当 N 为偶数时，$k=1$。式(1.30)可以用来构造滤波器。

它的双尺度关系为

$$\phi(x)=\begin{cases}2^{-2M}\sum\limits_{j=0}^{2M+1}C_j^{2M+1}\phi(2x-M-1+j), & N=2M\\ 2^{-2M-1}\sum\limits_{j=0}^{2M+2}C_j^{2M+2}\phi(2x-M-1+j), & N=2M+1\end{cases} \tag{1.31}$$

当 N 为偶数时，ϕ 是对称的，$x=1/2$；当 N 为奇数时，ϕ 是反对称的，$x=0$。

1.2.10　其他一些实数小波简介

下面介绍几个 MATLAB 工具箱中的实数小波函数。

1. RbioNr. Nd 小波

RbioNr. Nd 函数是 reverse 双正交小波。

在 MATLAB 中，可输入 waveinfo('rbio')获得该函数的主要性质。

2. Gaus 小波

Gaus 小波是从高斯函数派生出来的

$$f(x)=C_p\mathrm{e}^{-x^2} \tag{1.32}$$

其中，整数 p 是参数，由 p 的变化导出一系列的 $f^{(p)}$，它满足如下条件

$$\|f^{(p)}\|^2=1 \tag{1.33}$$

在 MATLAB 中，可输入 waveinfo('gaus')获得该函数的主要性质。

3. Dmey 小波

Dmey 函数是 Meyer 函数的近似，它可以进行快速小波变换。

在 MATLAB 中，可输入 waveinfo('dmey') 获得该函数的主要性质。

1.2.11　其他一些复数小波简介

下面所介绍的几个小波复数函数，均在 MATLAB 工具箱中。

1. Cgau 小波

Cgau 函数是复数形式的高斯小波，它是从复数的高斯函数中构造出来的，其表达式为

$$f(x)=C_p\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}\mathrm{e}^{-x^2} \tag{1.34}$$

其中，整数 p 是参数，由 p 的变化导出一系列的 $f^{(p)}$，它满足如下条件：

$$\| f^{(p)} \|^2 = 1 \tag{1.35}$$

在 MATLAB 中，可输入 waveinfo('cgau') 获得该函数的主要性质。

2. Cmor 小波

Cmor 是复数形式的 morlet 小波，其表达式为

$$\psi(x) = \sqrt{\pi f_b}\, e^{2j\pi f_c x} e^{\frac{x}{f_b}} \tag{1.36}$$

其中，f_b 是带宽参数，f_c 是小波中心频率。

在 MATLAB 中，可输入 waveinfo('cmor') 获得该函数的主要性质。

3. Fbsp 小波

Fbsp 是复频域 B 样条小波，表达式为

$$\psi(x) = \sqrt{f_b}\left(\sin\left(\frac{f_b x}{m}\right)\right)^m e^{2j\pi f_c x} \tag{1.37}$$

其中，m 是整数型参数；f_b 是带宽参数；f_c 是小波中心频率。

在 MATLAB 中，可输入 waveinfo('fbsp') 获得该函数的主要性质。

4. Shan 小波

Shan 函数是复数形式的 shannon 小波。在 B 样条频率小波中，令参数 $m=1$，就得到了 Shan 小波，其表达式为

$$\psi(x) = \sqrt{f_b}\, \sin(f_b x) e^{2j\pi f_c x} \tag{1.38}$$

其中，f_b 是带宽参数；f_c 是小波中心频率。

在 MATLABA 中，可输入 waveinfo('shan')获得该函数的主要性质。

下面，我们将 MATLAB 工具箱中 15 个小波(或小波系)的一些主要的性质加以对比，见表 1 - 1。

表 1 - 1 MATLAB 工具箱中 15 个小波(或小波系)的主要性质

小波函数	Haar	Daubechies	Biorthgonal	Coiflets	Symlets	Morlet	Mexican hat	Meyer
小波缩写名	haar	db	bior	coif	sym	morl	mexh	meyr
表示形式	haar	db*N*	bior*Nr*. *Nd*	coif*N*	sym*N*	morl	mexh	meyr
举例	haar	db3	bior2. 4	coif3	sym2	morl	mexh	meyr
正交性	有	有	无	有	有	无	无	有
双正交性	有	有	有	有	有	无	无	有
紧支撑性	有	有	有	有	有	无	无	无
连续小波变换	可以	可以	可以	可以	可以	可以	可以	可以
离散小波变换	可以	可以	可以	可以	可以	不可以	不可以	可以，但无 FWT
支撑长度	1	2*N*−1	重构：2*Nr*+1 分解：2*Nd*+1	6*N*−1	2*N*−1	有限长度	有限长度	有限长度
滤波器长度	2	2*N*	max(2*Nr*, 2*Nd*)+2	6*N*	2*N*	[−4, 4]	[−5, 5]	[−8, 8]
对称性	对称	近似对称	不对称	近似对称	近似对称	对称	对称	对称

需要全本请访问 www.ertongbook.com