

# 机械原理电算分析与设计

孟彩芳 编著

天津大学出版社

## 内 容 提 要

本书主要讲述如何用电算法对机构进行分析与设计,不但讲述原理和公式,给出框图及 Turbo C 语言和 Quick BASIC 语言的程序,而且指出编程注意事项。

全书共分七章,包括平面机构运动分析的电算法、平面机构力分析的电算法、凸轮机构设计的电算法、平面连杆机构综合的电算法、渐开线齿轮机构及其设计的电算法、机器的运转及其速度波动调节的电算法、机械平衡的电算法。各章均附有习题。

书中所有程序均在 AST 486 微机上调试通过。

本书可作为高等院校的配套教材,也可供广大科研人员和工程技术人员参考。

# 前 言

《机械原理电算分析与设计》中的“电算法”与常说的“解析法”是有区别的。虽然,国内不少机械原理的教材加重了解析法的内容,但一般只限于讲解方法、原理和推导公式,即局限于建立数学模型的过程。这样很难使学生掌握用计算机分析问题、解决问题的全过程。为了使具有用计算机进行机构分析与设计的能力,不但要掌握数学模型,而且要掌握框图设计、程序设计和上机调试程序。这就需要有相应的教材,本书就是为此而编写的。这种包括用计算机解决问题全过程的方法称为“电算法”,以示与“解析法”相区别。

在高等教育中,着重能力的培养是大家的共识。而自学能力是终身受益的重要能力。要想较好地培养学生的自学能力,就必须有适合于自学的教材,本教材也是为此而编写的。

本书的特点是便于自学。上机调试过程序的人大都有过这样的经历,有时针对某一问题的程序觉得是正确的,输入也无误,但计算机计算出的结果却与正确结果相差甚远。其原因常常是一些特有的编程注意事项被忽略。本书不仅讲述机械原理中分析和设计(或综合)的原理与公式,给出框图、Turbo C 语言和 Quick BASIC 语言的程序,而且给出编程注意事项和公式中的各个变量与其程序中各个变量间的对应标识符。这样处理的结果,既便于自学,又使电算法的掌握由难变易。

本书的另一个特点是,同一问题的程序,用两种语言对比给出。这就扩大了它的适用范围,不但方便了具有 Turbo C 语言基础的人,而且使具有 Quick BASIC 语言基础的人也易学、易懂。对于只掌握一种程序语言的人,还易于通过对比学习掌握另一种语言。

本书共七章,各章均附有习题。习题的给出方式也与一般书有区别,既有题目,也有要求和建议,便于教师辅导和学生用电算法做题。

在平面机构的运动分析部分,作者试图将图解法和电算法结合起来,取长补短。因此,既介绍了图解法所用的机构各构件上相应点之间的速度和加速度矢量方程,又介绍了与之对应的电算法所用的复数极坐标方程,而且每道题都使两个方程式的各项一一对应,从而克服了电算法常因繁杂的数学推导而使概念不清晰的缺点。将图解法和解析法很好地结合起来,可作为机械原理教学改革的方向之一,这里仅为抛砖引玉。

作者水平有限,书中缺点、错误在所难免,恳请读者批评指正。

作者

1999.03

# 目 录

第一章 平面机构运动分析的电算法 .....	(1)
1.1 概述.....	(1)
1.2 平面向量的复数极坐标表示法.....	(3)
1.3 平面机构的整体运动分析法.....	(4)
1.4 运动分析的基本杆组法.....	(24)
1.5 习题.....	(44)
第二章 平面机构力分析的电算法 .....	(48)
2.1 概述.....	(48)
2.2 平衡力和平衡力矩的电算直接确定法.....	(48)
2.3 平面机构力分析的电算法.....	(54)
2.4 习题.....	(77)
第三章 凸轮机构设计的电算法 .....	(83)
3.1 推杆常用的运动规律.....	(83)
3.2 凸轮轮廓曲线的电算法设计.....	(92)
3.3 凸轮机构基本尺寸的电算法确定.....	(99)
3.4 习题 .....	(114)
第四章 平面连杆机构综合的电算法.....	(117)
4.1 概述 .....	(117)
4.2 刚体位移矩阵 .....	(118)
4.3 刚体导引平面连杆机构的电算综合 .....	(120)
4.4 函数生成平面连杆机构的电算综合 .....	(128)
4.5 按行程速比系数和许用压力角电算综合平面连杆机构 .....	(137)
4.6 轨迹生成平面连杆机构的电算综合 .....	(140)
4.7 习题 .....	(141)
第五章 渐开线齿轮机构及其设计的电算法.....	(144)
5.1 渐开线齿廓曲线的电算法计算 .....	(144)
5.2 变位系数的选择 .....	(147)
5.3 习题 .....	(159)
第六章 机器的运转及其速度波动调节的电算法.....	(160)
6.1 机器的运转及本章的研究内容和目的 .....	(160)
6.2 机器的等效动力学模型 .....	(161)
6.3 求原构件真实运动规律的电算法 .....	(164)
6.4 确定飞轮转动惯量的电算法 .....	(181)
6.5 习题 .....	(189)
第七章 机械平衡的电算法.....	(193)
7.1 概述 .....	(193)

7.2 刚性转子的静平衡 .....	(193)
7.3 刚性转子动平衡计算的电算法 .....	(196)
7.4 转子的平衡精度 .....	(204)
7.5 平面机构的平衡 .....	(205)
7.6 习题 .....	(209)
参考文献.....	(213)
附录.....	(214)
1. 用全选主元高斯消去法求线性方程组的解.....	(214)
2. 用拟牛顿法求解非线性方程组的一组实根.....	(217)

# 第一章 平面机构运动分析的电算法

## 1.1 概 述

### 1.1.1 机构运动分析的目的

机构的运动分析不但用于分析现有机械的工作性能,而且当进行新机构的综合时,综合的结果也需要通过运动分析来检验其正确与否。因此,机构的运动分析是很重要的。

对机构进行运动分析时,将不考虑引起机构运动的外力、机构构件的弹性变形和机构运动副中间隙对机构运动的影响,而仅仅从几何角度研究在原动件的运动规律已知的情况下,如何确定机构其余构件上各点的轨迹、位移、速度和加速度,以及机构中其余构件的角位移、角速度和角加速度等运动参数。

通过轨迹的分析,可以确定某些构件运动所需要的空间,判断它们运动时是否相互干涉。通过速度分析,可以确定机构中从动件的速度是否合乎要求,并为进一步做机构的加速度分析和受力分析提供必要的的数据。通过加速度分析,可为惯性力的计算提供加速度数据,尤其对于高速机械和重型机械等惯性力较大的机械,进行加速度分析是非常必要的。

由上述可知,运动分析既是综合的基础,也是力分析的基础。另外,在研究机器的运转及其速度波动的调节时,为了求等效力(或等效力矩)、等效质量(或等效转动惯量),也必须首先对机构进行运动分析。

### 1.1.2 机构运动分析的解析法

机构运动分析的方法大体上分为图解法和解析法两种。图解法具有形象、直观的特点,但精度不高,对于高速机械和精密机械中的机构,用图解法作运动分析的结果,往往不能满足高精度的要求。解析法借助电子计算机可使机构运动分析获得高精度的结果。此外,通过解析法可建立各种运动参数和机构尺度参数的函数关系式,这更便于对机构进行深入的研究。

用解析法作机构运动分析的内容,虽然包括位移分析、速度分析和加速度分析三个方面,但关键问题是位移分析。至于速度和加速度,一般是利用位移方程式对时间求导一次和两次后,解线性方程或线性方程组而得到的,较易于解决。

根据分析过程的不同,机构运动分析的解析法可分为两种。一种是杆组法,即首先把组成机构的基本杆组(自由度为零的运动链的最小单元)作为研究对象,分别建立各个基本杆组的子程序。由于平面连杆机构都是由起始构件、机架和不同的基本杆组组成的,所以对其进行运动分析时,只需根据其组成原理和特点,编一个正确地调用所需基本杆组子程序的主程序。另一种是整体分析法,即把所研究的机构放在直角坐标系中,自始至终都把整个机构作为研究对象,由已知数据求出待求参数。因后者有较系统的理论,且应用范围更广泛,更适用于机构的运动综合和对其进行更深入的研究,故本书以后者为主,对前者也作了适当的介绍。

运动分析的解析法可利用向量、复数、矩阵等运算方法和二元数、四元数、旋量及张量等数

学工具 (主要用于空间机构的运动分析) 进行。本章仅介绍最有用的向量运算法。

### 1.1.3 平面机构运动分析的向量运算法

用向量运算法作机构的运动分析时,应首先选定直角坐标系,其次,选取各杆的向量方向与转角,然后根据所选向量方向画出封闭的向量多边形;再次,根据封闭向量多边形列出复数极坐标形式的向量方程式,由实部和虚部分别相等得到位移方程,由其解出所求位移参量的解析表达式。

在选取各杆的向量方向及转角时,对与机架相铰接的杆件,建议其向量方向由固定铰链向外,这样便于标出转角。转角的正负,规定以  $x$  轴的正向为基准,逆时针方向转至所讨论向量的转角为正,反之为负。

将位移方程式对时间求一次和两次导数后,分别得出速度方程式和加速度方程式,由其分别解得所求速度参量和加速度参量的表达式。

### 1.1.4 用解析法作机构运动分析的步骤

用解析法作机构运动分析的步骤可分为三步。

第一步,建立机构运动分析的数学模型,即上述从选定直角坐标系到得出各所求运动参量的数学表达式。

第二步,进行框图设计。对于初学者,尤其是较复杂的机构,这一步格外重要。有的人急于书写程序的具体语句,缺乏周密的思考,直到程序运行时才发现漏洞百出。结果把源程序改得面目全非,甚至前后矛盾,无法运算。因此,必须有一个计划阶段,这就是框图设计。在进行框图设计时,必须十分清楚细致地了解所要求解的数学模型中包括哪些公式,各公式中哪些是变量,哪些是常量,哪些变量的值是已知的,哪些变量是要求解的,哪些数据作为输入,哪些数据和结果作为输出,哪些未知量先计算,哪些未知量后计算等。在对整个数学模型有了深入透彻的了解之后,先考虑它的整体逻辑,再考虑它的各部分的逻辑。这样从整体到部分地考虑下去,直到各部分都显而易见为止。也就是在理解的基础上,按照所要完成的计算任务,把问题分成若干部分(即分块)。各块之间的运行顺序应该用流程图表示出来,组成粗框图。再把每个大块分成较小的块,这样从大到小、从粗到细地分下去,直到各细部都能用一个语句表示为止。有了框图的基本设想之后,就可以画框图了。框图是由许多图框连接而成的。每一框表示一段程序的功能,箭头表示执行顺序的流向。

第三步,根据框图编写程序,并上机调试通过。在本步中,上机调试到无语法错误,给出计算结果是容易的,困难的是,当计算机给出的结果是错误的时候如何找出原因,改正错误。错误的原因有各种各样的可能性。有的是数学模型有问题,若数学模型正确无误,可能是框图设计有误,若框图设计也无误,还可能是编制程序有问题,若程序编制也正确,也可能是向计算机输入时,输入字符有误。在千万个字符中,只要有一个字符输入错误,就会得出错误的结果,这里尤其要警惕数字“0”和英文字母“O”的区别以及数字“1”和英文字母大写“I”的区别。

由前述可知,把好每一步的关,十分重要,每一步都须认真检查,确实无误后再进行下一步。按键输入时,应逐个字符地检查。这样,表面看起来似乎慢了些,但实际上比最后发现问题再从头找原因快得多。除认真、仔细外,在调试过程中,全面考虑问题尤其重要。修改一处,常常影响到多处,必须把受影响的各处全部改正,否则,越调试越乱,浪费大量的时间,也得出不出正确的结果。

## 1.2 平面向量的复数极坐标表示法

### 1.2.1 平面向量的复数极坐标表示法

若用复数表示平面向量  $r$ , 则  $r = r_x + ir_y$ , 其中的  $r_x$  和  $r_y$  分别为复数向量的实部和虚部。

如图 1-1 所示, 向量  $r$  还可以写为  $r = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$  其中的  $\varphi$  称为幅角, 由  $x$  轴的正向逆时针为正, 顺时针为负;  $r = |r|$ , 是向量的模。利用欧拉公式  $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ , 可将向量表示为极坐标形式  $r = re^{i\varphi}$ 。式中  $e^{i\varphi}$  是一个单位向量, 它表示向量的方向;  $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$  即  $e^{i\varphi}$  表示一个以原点为圆心、以 1 为半径的圆周上的点。与坐标轴重合的单位向量如表 1-1 和图 1-1 所示。

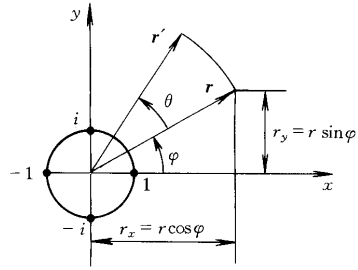


图 1-1 向量的复数极坐标表示法

表 1-1 与坐标轴重合的单位向量

$\varphi$	$e^{i\varphi}$	代表的向量
0	$e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$	指向 $x$ 轴正向的单位向量
$\pi/2$	$e^{i\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2} = i$	指向 $y$ 轴正向的单位向量
$\pi$	$e^{i\pi} = \cos \pi + i\sin \pi = -1$	指向 $x$ 轴负向的单位向量
$3\pi/2$	$e^{i3\pi/2} = \cos \frac{3\pi}{2} + i\sin \frac{3\pi}{2} = -i$	指向 $y$ 轴负向的单位向量

### 1.2.2 向量的回转

单位向量  $e^{i\theta}$  乘以向量  $r = re^{i\varphi}$  可得一新的向量  $r'$ ,  $r' = re^{i\varphi} \cdot e^{i\theta} = re^{i(\varphi+\theta)}$ 。由此可知, 若  $e^{i\theta}$  乘以向量  $r$ , 相当于把向量  $r$  绕原点旋转了  $\theta$  角。表 1-2 列出了单位向量旋转的几种特殊情况。

表 1-2 单位向量  $e^{i\varphi}$  旋转的几种特殊情况

被乘数	结果	作用
$i$	$i \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+\pi/2)}$	相当于向量转过 $\pi/2$ 角
$i^2$	$i^2 \cdot e^{i\varphi} = -e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+\pi)}$	相当于向量转过 $\pi$ 角
$i^3$	$i^3 \cdot e^{i\varphi} = -ie^{i\varphi} = e^{i(\varphi-3\pi/2)} = e^{i(\varphi-\pi/2)}$	相当于向量逆时针方向转 $3\pi/2$ 角或顺时针方向转 $\pi/2$ 角

因  $e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi} = e^{i(\varphi-\varphi)} = 1$ , 故  $e^{-i\varphi}$  是  $e^{i\varphi}$  的共轭复数。

### 1.2.3 复数极坐标表示的向量的微分

设  $r = re^{i\varphi}$ , 则对时间的一阶导数为

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} e^{i\varphi} + r \frac{d\varphi}{dt} (e^{i\varphi}) = \dot{r} e^{i\varphi} + r\dot{\varphi} e^{i(\varphi+\pi/2)}$$

方向:  $e^{i\varphi}$        $e^{i(\varphi+\pi/2)}$

大小:  $\dot{r}$        $r\dot{\varphi}$

意义: 相对速度      牵连速度

式中  $\dot{r}$ ——向量大小的变化率；

$\dot{\varphi}$ ——角速度；

$r\dot{\varphi}$ ——线速度。

对时间的二阶导数为

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{r}e^{i\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}e^{i(\varphi+\pi/2)} + r\dot{\varphi}^2 e^{i(\varphi+\pi)} + r\ddot{\varphi}e^{i(\varphi+\pi/2)}$$

方向： $e^{i\varphi}$        $e^{i(\varphi+\pi/2)}$        $e^{i(\varphi+\pi)}$        $e^{i(\varphi+\pi/2)}$

大小： $\ddot{r}$        $2\dot{r}\dot{\varphi}$        $r\dot{\varphi}^2$        $r\ddot{\varphi}$

意义：相对      哥氏      牵连法向      牵连切向  
加速度      加速度      加速度      加速度

式中  $\ddot{\varphi}$ ——角加速度。

## 1.3 平面机构的整体运动分析法

### 1.3.1 机构各构件上相应点之间的速度、加速度向量方程

当机构运动时，机构各构件上相应点之间的速度和加速度关系，可根据速度合成定理和加速度合成定理用相对运动向量方程式表示。根据不同的相对运动情况，又可分为两类。

#### 1.3.1.1 同一构件上两点间的速度和加速度关系

如图 1-2a 所示，构件 AB 作平面运动时，可以看作随其上任一基点 A 的牵连运动和绕基点 A 的相对转动。因此，构件上任一点 C 的绝对速度可用向量方程表示为

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{CA} \quad (1.3-1)$$

式中  $\mathbf{v}_A$ ——牵连速度；

$\mathbf{v}_{CA}$ ——C 点相对于 A 点的相对速度。

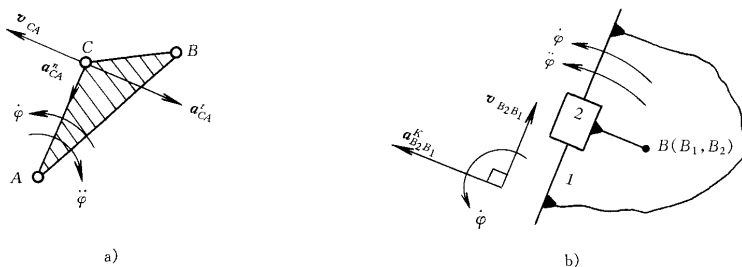


图 1-2 各构件上相应点之间的速度和加速度关系

$v_{CA}$  的大小等于该构件的瞬时角速度  $\dot{\varphi}$  与 A、C 两点间的实际距离  $l_{AC}$  的乘积；方向与 AC 垂直，指向与  $\dot{\varphi}$  一致。同理，C 点的加速度可用向量方程式表示为

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{CA} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{CA}^n + \mathbf{a}_{CA}^t \quad (1.3-2)$$

式中  $\mathbf{a}_A$ ——牵连加速度；

$\mathbf{a}_{CA}$ ——C 点相对于 A 点的相对加速度。

为了便于表达其方向和大小，又将  $\mathbf{a}_{CA}$  分解为 C 点相对于 A 点的相对法向加速度  $\mathbf{a}_{CA}^n$  和相

对切向加速度  $a_{CA}^t$ 。其中  $a_{CA}^n$  的大小既等于  $\dot{\varphi}^2 l_{AC}$ ，也等于  $v_{CA}^2 / l_{AC}$ ，方向平行于  $AC$  且由  $C$  指向  $A$ 。 $a_{CA}^t$  的大小等于该构件的瞬时角加速度  $\ddot{\varphi}$  与  $l_{AC}$  的乘积，方向垂直于  $AC$  且与  $\ddot{\varphi}$  一致。

### 1.3.1.2 组成移动副两构件重合点间的速度和加速度关系

图 1-2b 所示为构件 1 和 2 组成移动副， $B$  点为构件 1 上的  $B_1$  点和滑块 2 上的  $B_2$  点的重合点。构件 1 和 2 一起以  $\dot{\varphi}$  的角速度转动，角加速度为  $\ddot{\varphi}$ ；滑块 2 随导杆 1 一起转动的同时又沿导杆 1 相对移动，即作复合运动。根据牵连运动为转动时的速度合成定理，动点的绝对速度等于它的牵连速度和相对速度的向量和，可得

$$v_{B_2} = v_{B_1} + v_{B_2 B_1} \quad (1.3-3)$$

上式中  $v_{B_1}$  为牵连速度； $v_{B_2 B_1}$  为  $B_2$  点相对于  $B_1$  点的相对速度，它的方向与导路平行，它与  $v_{B_1 B_2}$  大小相等，方向平行，指向相反。同理，根据动点在每一瞬时的绝对加速度等于相对加速度、牵连加速度与哥氏加速度三者的向量和，得

$$a_{B_2} = a_{B_1} + a_{B_2 B_1}^k + a_{B_2 B_1}^r \quad (1.3-4)$$

上式中  $a_{B_1}$  为牵连加速度； $a_{B_2 B_1}^r$  为  $B_2$  点相对于  $B_1$  点的相对加速度，其方向平行于导路，它与  $a_{B_1 B_2}^r$  大小相等，方向平行，指向相反； $a_{B_2 B_1}^k$  为哥氏加速度，

$$a_{B_2 B_1}^k = 2\dot{\varphi} \times v_{B_2 B_1} \quad (1.3-5)$$

对于平面机构，因  $\dot{\varphi}$  与  $v_{B_2 B_1}$  间的夹角始终为  $90^\circ$ ，故  $a_{B_2 B_1}^k$  的大小等于牵连角速度  $\dot{\varphi}$  与相对速度  $v_{B_2 B_1}$  的大小乘积的 2 倍，其方向是将相对速度  $v_{B_2 B_1}$  的向量箭头绕箭尾沿牵连角速度  $\dot{\varphi}$  的方向转过  $90^\circ$ 。

另外，当两构件组成转动副时，转动中心（重合点）的速度相等，加速度也相等。因两构件间有相对转动，所以这两构件的角速度不相等，角加速度也不相等。而两构件组成移动副时，这两构件的角速度相等，角加速度也相等。因两构件间有相对移动，所以重合点的速度不相等，加速度也不相等。

### 1.3.2 曲柄滑块机构的运动分析

如图 1-3 所示曲柄滑块机构，已知曲柄的长  $l_{AB}$ 、连杆的长  $l_{BC}$  和偏距  $e$  以及原动件  $AB$  的位置角  $\varphi_1$  和等角速度  $\dot{\varphi}_1$ ，对其进行位移、速度和加速度分析。

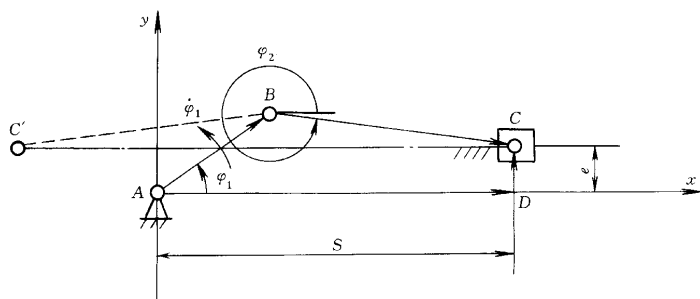


图 1-3 曲柄滑块机构的运动分析

### 1.3.2.1 建立数学模型

取直角坐标系、各杆的向量方向和转角如图 1-3 所示,由封闭向量多边形  $ABCD$  可得

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{S} + \mathbf{DC},$$

即 
$$l_{AB}e^{i\varphi_1} + l_{BC}e^{i\varphi_2} = Se^{i0} + l_{DC}e^{i\pi}. \quad (\text{A})$$

由式 (A) 的实部和虚部分别相等可得

$$l_{AB}\cos\varphi_1 + l_{BC}\cos\varphi_2 = S, \quad (\text{B})$$

$$l_{AB}\sin\varphi_1 + l_{BC}\sin\varphi_2 = e. \quad (\text{C})$$

由式 (B) (C) 消去中间转角  $\varphi_2$ , 可导出直接由曲柄转角  $\varphi_1$  确定滑块位置  $S$  的公式。因

$$l_{BC}^2 = (S - l_{AB}\cos\varphi_1)^2 + (e - l_{AB}\sin\varphi_1)^2,$$

故 
$$S = l_{AB}\cos\varphi_1 + M\sqrt{l_{BC}^2 - e^2 - l_{AB}^2\sin^2\varphi_1 + 2l_{AB}e\sin\varphi_1}. \quad (1.3-6)$$

式中符号  $M = \pm 1$  应按所给机构的装配方案选取。图 1-3 中,实线位置的  $BC$  相当于  $M = +1$  的情况,而虚线位置  $BC'$  则与  $M = -1$  相对应。

滑块的位置  $S$  确定后,对应于一组  $\varphi_1$ 、 $S$  值,连杆的转角  $\varphi_2$  可由式 (B) 和 (C) 如下确定:

$$\varphi_2 = \arctan \frac{e - l_{AB}\sin\varphi_1}{S - l_{AB}\cos\varphi_1}. \quad (1.3-7)$$

速度分析 将 (A) 式对时间求导可得

$$l_{AB}\dot{\varphi}_1 e^{i(\varphi_1 + \pi)} + l_{BC}\dot{\varphi}_2 e^{i(\varphi_2 + \pi)} = \dot{S}. \quad (\text{D})$$

方向:  $e^{i(\varphi_1 + \pi)}$                        $e^{i(\varphi_2 + \pi)}$                       //  $x$  轴

大小:  $l_{AB}\dot{\varphi}_1$                        $l_{BC}\dot{\varphi}_2$                        $\dot{S}$

意义:  $\mathbf{v}_B$                       +                       $\mathbf{v}_{CB}$                       =                       $\mathbf{v}_C$

由式 (D) 的实部和虚部分别相等可得

$$-l_{AB}\dot{\varphi}_1\sin\varphi_1 - l_{BC}\dot{\varphi}_2\sin\varphi_2 = \dot{S}, \quad (1.3-8)$$

$$l_{AB}\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1 + l_{BC}\dot{\varphi}_2\cos\varphi_2 = 0. \quad (\text{E})$$

由式 (E) 可得连杆的角速度

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{-l_{AB}\dot{\varphi}_1\cos\varphi_1}{l_{BC}\cos\varphi_2}. \quad (1.3-9)$$

将  $\dot{\varphi}_2$  代入式 (1.3-8) 可求得滑块的速度  $\dot{S}$ 。

加速度分析 将式 (D) 对时间求导可得

$$l_{AB}\dot{\varphi}_1^2 e^{i(\varphi_1 + \pi)} + l_{BC}\dot{\varphi}_2^2 e^{i(\varphi_2 + \pi)} + l_{BC}\ddot{\varphi}_2 e^{i(\varphi_2 + \pi)} = \ddot{S}. \quad (\text{F})$$

方向:  $e^{i(\varphi_1 + \pi)}$                        $e^{i(\varphi_2 + \pi)}$                        $e^{i(\varphi_2 + \pi)}$                       //  $x$  轴

大小:  $l_{AB}\dot{\varphi}_1^2$                        $l_{BC}\dot{\varphi}_2^2$                        $l_{BC}\ddot{\varphi}_2$                        $\ddot{S}$

意义:  $\mathbf{a}_B^n$                       +                       $\mathbf{a}_{CB}^n$                       +                       $\mathbf{a}_{CB}^t$                       =                       $\mathbf{a}_C$

由式 (F) 的实部和虚部分别相等可得

$$\ddot{S} = -l_{AB}\dot{\varphi}_1^2\cos\varphi_1 - l_{BC}(\dot{\varphi}_2^2\cos\varphi_2 + \ddot{\varphi}_2\sin\varphi_2), \quad (1.3-11)$$

$$-l_{AB}\dot{\varphi}_1^2\sin\varphi_1 - l_{BC}\dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2 + l_{BC}\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2 = 0. \quad (\text{G})$$

由式 (G) 可得连杆的角加速度

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{l_{AB} \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1}{l_{BC} \cos \varphi_2} + \tan \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 \quad (1.3-10)$$

将  $\ddot{\varphi}_2$  代入式 (1.3-11) 可求得滑块的加速度  $\ddot{S}$ 。

### 1.3.2.2 框图设计

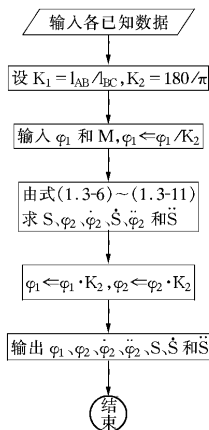


图 1-4 曲柄滑块机构运动分析框图

### 1.3.2.3 框图设计和编程注意事项

为了便于阅读,各角度在输入、输出时以度为单位,中间参与运算时应以弧度为单位,注意两者的相互转换。

### 1.3.3 铰链四杆机构的运动分析

在图 1-5 所示铰链四杆机构中,已知各杆的长度和原动件  $AB$  的等角速度  $\dot{\varphi}_1$  和位置角  $\varphi_1$ ,确定曲柄  $AB$  在回转一周的过程中每隔  $30^\circ$  时连杆  $BC$  和输出杆  $CD$  的位置角  $\varphi_2$  和  $\varphi_3$ 、角速度  $\dot{\varphi}_2$  和  $\dot{\varphi}_3$  以及角加速度  $\ddot{\varphi}_2$  和  $\ddot{\varphi}_3$ 。

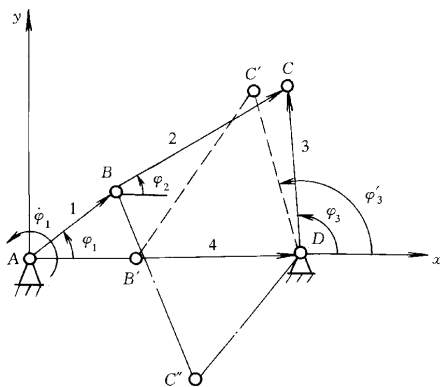
#### 1.3.3.1 建立数学模型

如图 1-5 所示,取以  $A$  为原点、 $x$  轴与  $AD$  线一致的直角坐标系,标出向量和转角,由封闭向量多边形  $ABCD$  可得

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AD} + \mathbf{DC},$$

$$\text{即 } l_{AB} e^{i\varphi_1} + l_{BC} e^{i\varphi_2} = l_{AD} e^{i0} + l_{DC} e^{i\varphi_3}.$$

图 1-5 铰链四杆机构的运动分析



由式 (A) 的实部和虚部分别相等可得

$$l_{AB} \cos \varphi_1 + l_{BC} \cos \varphi_2 = l_{AD} + l_{DC} \cos \varphi_3, \quad (B)$$

$$l_{AB} \sin \varphi_1 + l_{BC} \sin \varphi_2 = l_{DC} \sin \varphi_3. \quad (C)$$

为了消去  $\varphi_2$  角 将式 (B) (C) 平方后相加可得

$$l_{BC}^2 = (l_{AD} + l_{DC} \cos \varphi_3 - l_{AB} \cos \varphi_1)^2 + (l_{DC} \sin \varphi_3 - l_{AB} \sin \varphi_1)^2. \quad (D)$$

为了求解  $\varphi_3$ , 将上式改写为如下的三角方程

$$A \sin \varphi_3 + B \cos \varphi_3 + C = 0. \quad (E)$$

式中  $A = -\sin \varphi_1$  ;

$$B = l_{AD} l_{AB} - \cos \varphi_1 ;$$

$$C = (l_{AD}^2 + l_{DC}^2 + l_{AB}^2 - l_{BC}^2) / (2l_{AB}l_{DC}) - l_{AD} \cos \varphi_1 / l_{DC}. \quad (1.3-12)$$

为了便于用代数法求解  $\varphi_3$ , 令  $x = \tan(\varphi_3/2)$ , 于是

$$\sin \varphi_3 = 2x / (1 + x^2),$$

$$\cos \varphi_3 = (1 - x^2) / (1 + x^2),$$

从而式 (E) 可化成下列二次方程式

$$(B - C)x^2 - 2Ax - (B + C) = 0. \quad (F)$$

由式 (F) 解出  $x$  可得

$$\varphi_3 = 2 \arctan x = 2 \arctan \frac{A + M \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B - C}. \quad (1.3-13)$$

上式中的  $M = \pm 1$  表示给定  $\varphi_1$  时,  $\varphi_3$  可有两个值, 这与图 1-5 所示  $C$  有两个交点 ( $C$  和  $C''$ ) 的意义相当。应按照所给机构的装配方案 ( $C$  处  $M = +1$ , 而  $C''$  处  $M = -1$ ) 选择  $M = +1$  或  $-1$ 。  $M$  也可由运动的连续性选取, 此时在程序中首先计算与  $\varphi_1$  的初值 (如  $\varphi_1 = 0$ ) 相对应的  $\varphi_3$  的初值 (如图 1-5 中的  $\varphi_3'$ )。 由图可知, 因

$$l_{BC}^2 = l_{DC}^2 + (l_{AD} - l_{AB})^2 - 2l_{DC} (l_{AD} - l_{AB}) \cos(\pi - \varphi_3'),$$

故 
$$\cos \varphi_3' = \frac{l_{BC}^2 - l_{DC}^2 - (l_{AD} - l_{AB})^2}{2l_{DC} (l_{AD} - l_{AB})} = R, \quad (1.3-14)$$

$$\varphi_3' = \arctan \frac{\sqrt{1 - R^2}}{R}. \quad (1.3-15)$$

以后, 在  $\varphi_1$  的循环中, 每次都由  $M = +1$  和  $M = -1$  算出两个  $\varphi_3$  值  $T1$  和  $T2$ 。 将它们分别与前一步的  $\varphi_3$  比较, 哪个更接近, 哪个就是合适的  $\varphi_3$ , 即如果  $|T1 - \varphi_3| < |T2 - \varphi_3|$ , 则令  $\varphi_3 = T1$ ; 否则,  $\varphi_3 = T2$ 。

连杆的位置角  $\varphi_2$  可由式 (B) (C) 求得

$$\varphi_2 = \arctan \frac{l_{DC} \sin \varphi_3 - l_{AB} \sin \varphi_1}{l_{AD} + l_{DC} \cos \varphi_3 - l_{AB} \cos \varphi_1}. \quad (1.3-16)$$

速度分析 将式 (A) 对时间求导可得

$$l_{AB} \dot{\varphi}_1 e^{i(\varphi_1 + \pi Z)} + l_{BC} \dot{\varphi}_2 e^{i(\varphi_2 + \pi Z)} = l_{DC} \dot{\varphi}_3 e^{i(\varphi_3 + \pi Z)}. \quad (G)$$

方向:  $e^{i(\varphi_1 + \pi Z)} \quad e^{i(\varphi_2 + \pi Z)} \quad e^{i(\varphi_3 + \pi Z)}$

大小:  $l_{AB} \dot{\varphi}_1 \quad l_{BC} \dot{\varphi}_2 \quad l_{DC} \dot{\varphi}_3$

意义:  $v_B \quad + \quad v_{CB} \quad = \quad v_C$

由式 (G) 的实部和虚部分别相等可得

$$\left. \begin{aligned} l_{AB} \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + l_{BC} \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 &= l_{DC} \dot{\varphi}_3 \sin \varphi_3, \\ l_{AB} \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_{BC} \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 &= l_{DC} \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (H)$$

由式 (H) 解得

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{-l_{AB} \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_{BC} \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \cdot \dot{\varphi}_1, \quad (1.3-17)$$

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{l_{AB} \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_{DC} \sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \cdot \dot{\varphi}_1. \quad (1.3-18)$$

角速度的正和负分别表示逆时针和顺时针方向转动。

如果需避开  $\varphi_2$  角直接计算输出角速度  $\dot{\varphi}_3$  则可将式 (E) 对时间求导而得

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{(l_{AD} l_{DC}) \sin \varphi_1 + \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{(l_{AD} l_{AB}) \sin \varphi_3 + \sin(\varphi_1 - \varphi_3)} \cdot \dot{\varphi}_1. \quad (1.3-19)$$

加速度分析 将式 (G) 对时间再求导可得

$$l_{AB} \dot{\varphi}_1^2 e^{i(\varphi_1 + \pi)} + l_{BC} \dot{\varphi}_2^2 e^{i(\varphi_2 + \pi)} + l_{BC} \ddot{\varphi}_2 e^{i(\varphi_2 + \pi)} = l_{DC} \dot{\varphi}_3^2 e^{i(\varphi_3 + \pi)} + l_{DC} \ddot{\varphi}_3 e^{i(\varphi_3 + \pi)}. \quad (I)$$

方向： $e^{i(\varphi_1 + \pi)}$                        $e^{i(\varphi_2 + \pi)}$                        $e^{i(\varphi_2 + \pi)}$                        $e^{i(\varphi_3 + \pi)}$                        $e^{i(\varphi_3 + \pi)}$

大小： $l_{AB} \dot{\varphi}_1^2$                        $l_{BC} \dot{\varphi}_2^2$                        $l_{BC} \ddot{\varphi}_2$                        $l_{DC} \dot{\varphi}_3^2$                        $l_{DC} \ddot{\varphi}_3$

意义： $a_{BA}^n$                       +                       $a_{CB}^n$                       +                       $a_{CB}^t$                       =                       $a_{CD}^n$                       +                       $a_{CD}^t$

由式 (I) 的实部和虚部分别相等可得

$$\left. \begin{aligned} l_{AB} \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 + l_{BC} \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2 + l_{BC} \ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 &= l_{DC} \dot{\varphi}_3^2 \cos \varphi_3 + l_{DC} \ddot{\varphi}_3 \sin \varphi_3, \\ -l_{AB} \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 - l_{BC} \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 + l_{BC} \ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 &= -l_{DC} \dot{\varphi}_3^2 \sin \varphi_3 + l_{DC} \ddot{\varphi}_3 \cos \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (J)$$

由式 (J) 可解得

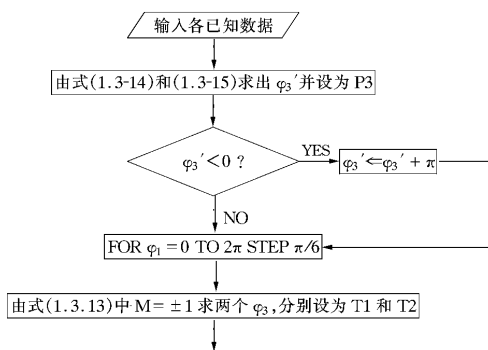
$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{l_{AB} \dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_{BC} \dot{\varphi}_2^2 - l_{DC} \dot{\varphi}_3^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{l_{DC} \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}, \quad (1.3-20)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{l_{AB} \dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + l_{BC} \dot{\varphi}_2^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) - l_{DC} \dot{\varphi}_3^2}{l_{BC} \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}. \quad (1.3-21)$$

如需避开中间转角  $\varphi_2$  直接计算输出角加速度  $\ddot{\varphi}_3$  则可将式 (1.3-19) 对时间再求导而得

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{(1 - \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_1) \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + l_{AD} \cos \varphi_1 l_{DC} - (\dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_1) l_{AD} \cos \varphi_3 l_{AB}}{(l_{AD} l_{AB}) \sin \varphi_3 + \sin(\varphi_1 - \varphi_3)} \cdot \dot{\varphi}_1^2. \quad (1.3-22)$$

### 1.3.3.2 框图设计



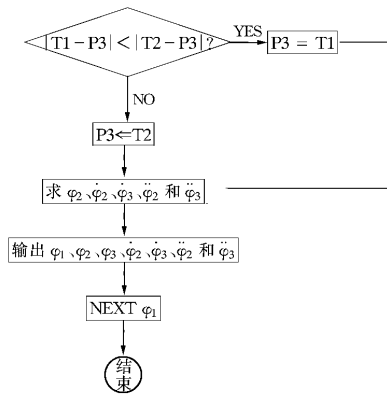


图 1-6 铰链四杆机构运动分析框图

### 1.3.3.3 程序和计算结果

当  $l_{AB} = 0.2 \text{ m}$ ,  $l_{BC} = 0.4 \text{ m}$ ,  $l_{DC} = 0.35 \text{ m}$ ,  $l_{AD} = 0.5 \text{ m}$  以及等角速度  $\dot{\varphi}_1 = 10 \text{ rad/s}$  时的 BASIC 和 Turbo C 程序及计算结果如下。

#### Quick BASIC 语言程序

```

1000 REM KINAMATIC ANALYSIS OF THE PLANAR MECHANISMS
1005 REM KINAL - 1 KINEMATIC ANALYSIS OF A FOUR-BAR LINKAGE
1010 READ AB, BC, CD, AD, W1, pi
1015 DATA .2, .4, .35, .5, .10, 3.141593
1020 R = (BC^2 - CD^2 - (AD - AB)^2) / (2 * CD * (AD - AB))
1025 P3 = ATN(SQR(1 - R * R) / R)
1030 IF P3 < 0 THEN LET P3 = P3 + pi
1035 FOR P1 = 0 TO 2 * pi STEP pi / 6
1040 T = AD^2 + CD^2 + AB^2 - BC^2
1045 A = -SIN(P1) : B = AD / AB - COS(P1) : C = T / (2 * AB * CD) - AD / CD * COS(P1)
1050 T1 = 2 * ATN((A + SQR(A * A + B * B - C * C)) / (B - C))
1055 T2 = 2 * ATN((A - SQR(A * A + B * B - C * C)) / (B - C))
1060 IF ABS(T1 - P3) < ABS(T2 - P3) THEN LET P3 = T1 : GOTO 1070
1065 P3 = T2
1070 P2 = ATN((CD * SIN(P3) - AB * SIN(P1)) / (AD + CD * COS(P3) - AB * COS(P1)))
1075 W2 = -AB * SIN(P1 - P3) * W1 / (BC * SIN(P2 - P3))
1080 W3 = AB * SIN(P1 - P2) * W1 / (CD * SIN(P3 - P2))
1085 E2 = (AB * W1^2 * COS(P1 - P3) + BC * W2^2 * COS(P3 - P2) - CD * W3^2) / (BC * SIN(P3 - P2))
1090 E3 = (AB * W1^2 * COS(P1 - P2) + BC * W2^2 - CD * W3^2 * COS(P3 - P2)) / (CD * SIN(P3 - P2))
1095 K = 180 / pi
1100 PRINT "P1=" ; P1 * K
1105 PRINT "P2=" ; P2 * K, "P3=" ; P3 * K, "W2=" ; W2

```

```

1110 PRINT "W3=" ; W3 , "E2=" ; E2 , "E3=" ; E3
1115 PRINT
1120 NEXT P1
1125 END

```

### 部分计算结果

P1 = 0

P2 = 57.910 05      P3 = 104.477 5      W2 = - 6.666 667

W3 = - 6.666 667      E2 = - 28.688 75      E3 = 69.672 74

P1 = 30

P2 = 38.628 5      P3 = 92.343 37      W3 = - 5.494 139

W3 = - 1.063 537      E2 = 49.725 46      E3 = 111.053 7

#### 1.3.3.4 标识符

程序中符号	公式中符号	说 明	程序中符号	公式中符号	说 明
AB	$l_{AB}$	杆 1 的长度	B	$B$	公式推导中间变量
BC	$l_{BC}$	杆 2 的长度	C	$C$	公式推导中间变量
CD	$l_{CD}$	杆 3 的长度	P1	$\varphi_1$	杆 1 的转角
AD	$l_{AD}$	机架 4 的长度	P2	$\varphi_2$	杆 2 的转角
W1	$\dot{\varphi}_1$	杆 1 的角速度	W2	$\dot{\varphi}_2$	杆 2 的角速度
pi 或 P1	$\pi$	圆周率	W3	$\dot{\varphi}_3$	杆 3 的角速度
R	$R$	$\cos\varphi_3'$	E2	$\ddot{\varphi}_2$	杆 2 的角加速度
P3	$\varphi_3$	杆 3 的转角	E3	$\ddot{\varphi}_3$	杆 3 的角加速度
A	$A$	公式推导中间变量			

#### 1.3.3.5 程序说明和注意事项

因实际机构的杆 3 的初位角  $\varphi_3'$  只可能在第 I、II 象限,而计算机由反正切函数输出的  $\varphi_3'$  只可能在第 I、IV 象限(当  $\tan\varphi_3' \geq 0$  时,输出第 I 象限的角;否则,输出第 IV 象限的角),故需作角度处理,如框图的第三框和程序的第 1030 句所示。

在角度参与计算时,必须以弧度为单位,而输出时,为了便于阅读,改为以角度为单位,如程序中第 1095、1100 和 1105 句所示。

#### Turbo C 语言程序

```

#include "stdio.h"
#include "math.h"
main ()
{
    float AB=0.2 ,BC=0.4 ,CD=0.35 ,AD=0.5 ,PI=3.141593 ,
          W1=10 ,W2 ,W3 ,E1 ,E2 ,E3 ,R ,K ,A ,B ,C ,P1 ,P2 ,P3 ,T ,T1 ,T2 ,T3 ;
    R = (BC * BC-CD * CD- (AD-AB) * (AD-AB)) / (2 * CD * (AD-AB));
    P3 = atan (sqrt (1 - R * R) / R);
    if (P3 < 0) P3 = P3 + PI ;
    for (P1 = 0 ; P1 <= 2 * PI ; P1 += PI/6)

```

```

{
T=AD*AD+CD*CD+AB*AB-BC*BC ;
A= -sin (P1 ) ;
B= AD/AB*cos (P1 ) ;
C= T/ ( 2 * AB * CD )- AD/CD * cos (P1 ) ;
T1= 2 * atan ((A+sqrt (A * A+B * B-C * C ))/ (B-C )) ;
T2= 2 * atan ((A-sqrt (A * A+B * B-C * C ))/ (B-C )) ;
if (fabs (T1 - P3 )< fabs (T2 - P3 )) P3= T1 ;
else P3= T2 ;
P2= atan ((CD * sin (P3 )- AB * sin (P1 ))/ (AD+ CD * cos (P3 )- AB * cos (P1 ))) ;
W2= - AB * sin (P1 - P3 ) * W1/ (BC * sin (P2 - P3 )) ;
W3= AB * sin (P1 - P2 ) * W1/ (CD * sin (P3 - P2 )) ;
E2= (AB * W1 * W1 * cos (P1 - P3 )+ BC * W2 * W2 * cos (P3 - P2 )- CD * W3 * W3 )/ (BC * sin (P3 -
P2 )) ;
E3= (AB * W1 * W1 * cos (P1 - P2 )+ BC * W2 * W2 - CD * W3 * W3 * cos (P3 - P2 ))/ (CD * sin (P3 -
P2 )) ;
K= 180/PI ;
printf (P1= %f \ n" ,P1 * K ) ;
printf (P2= %f \ t P3= %f \ t W2= %f \ n" ,P2 * K ,P3 * K ,W2 ) ;
printf (W3= %f \ t E2= %f \ t E3= %f \ n" ,W3 ,E2 ,E3 ) ;
printf ( \ n" ) ;
getch () ;
}
getch () ;
}

```

### 1.3.4 导杆机构的运动分析

在图 1-7 所示的导杆机构中,已知各构件的长度、原动件 2 的等角速度  $\dot{\varphi}_2$  和位置角  $\varphi_2$ ,对其进行运动分析。

#### 1.3.4.1 建立数学模型

取以 B 为原点、y 轴与 BA 线一致的直角坐标系,各杆的向量方向及转角如图 1-7 所示。由封闭向量多边形 BAC 可得向量方程式

$$\mathbf{BA} + \mathbf{AC} = \mathbf{BC},$$

$$\text{即 } l_{BA} e^{i\pi} + l_{AC} e^{i\varphi_2} = S e^{i\varphi_4}. \quad (\text{A})$$

由式 (A) 的虚部和实部分别相等可得

$$\left. \begin{aligned} l_{BA} + l_{AC} \sin \varphi_2 &= S \sin \varphi_4, \\ l_{AC} \cos \varphi_2 &= S \cos \varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (\text{B})$$

由式 (B) 可得

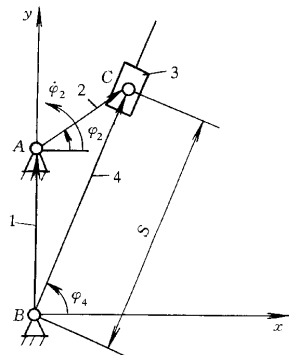


图 1-7 导杆机构的运动分析