

概率论与数理统计辅导

傅维潼 编.

清华大学出版社
北京 2000

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书是按照全国工科高等数学教学大纲的要求编写的辅导书.全书共分 12 章,其中前 5 章(概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理)为概率论的内容,其后的 4 章(样本与抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析)为数理统计的内容,最后 3 章(随机过程的基本知识、马尔可夫链、平稳随机过程)为随机过程的内容.

本书可作为大学生、自学人员学习概率论及数理统计时的辅导教材,也可供准备考研人员复习时选用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计辅导/傅维潼编.—北京:清华大学出版社,2000

ISBN 7-302-04224-1

.概... .傅... . 概率论-高等学校-教学参考资料 数理统计-高等学校-教学参考资料 .021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 84393 号

出版者:清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

印刷者: 印刷厂

发行者:新华书店总店北京发行所

开 本: 850×1168 1/32 印张: 14.25 字数: 357 千字

版 次: 2001 年 3 月第 1 版 2001 年 3 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-

印 数: 0001~0000

定 价: 元

前 言

目前,在工科类全日制高等院校的本科生,成人高等院校的本科生,参加高等教育自学考试的学生中,有许多人在初学“概率论与数理统计”这门课时,对这门课思考问题的方式不太适应,学习时感到有一定的困难,希望能得到老师的辅导.编写本书的意图就是要为学习这门课的学生提供相应的辅导.

本书主要是以浙江大学盛骤、谢式千、潘承毅三位老师编写的高等学校教材《概率论与数理统计》(第二版,高等教育出版社出版)为蓝本编写的.共分12章,其中5章是概率论的基本知识,4章是数理统计的基本知识,3章是随机过程的初步知识.本书共搜集了555道例题和练习题,它们都是按照全国工科高等院校的“概率论与数理统计”课程教学基本要求选择出来的,若能把这些题目都真正做会,就基本上达到了这门课的教学基本目标.因而使用本书是不受所用教材限制的.

本书竭力通过每一节中的例题分析及各章之后的练习题进行辅导,希望给学生提供一些思考随机数学问题的直观想法和思路.这些例题和练习题是由浅入深编排的,其中有些题目是进一步阐述有关定义、定理、公式和基本方法的用法,充实有关理论的;再有一些题目是反复强调一些基本定义、定理、公式和方法的,而这些知识对有效地学习这门课又是很重要的;还有一些题目是反复使用一些对解决概率应用问题有用的数学方法,便于学生学会使用;有少量的题目则需要创造性地运用概率论的这些基本知识才能解决的问题,这是为了进一步提高学生的解题能力、扩大题型用的.

要想达到更好的学习效果,使用本书时,应该先浏览一遍各节

的内容提要,它清晰地叙述了有关定义、定理、公式和方法,有些问题还伴以简要说明;把提要中的基本知识都看明白之后,再把例题分析中的题目自己动手算一算,推导推导,然后再看讲解.最后各章后的练习题可用来检验有关知识掌握得如何.选择练习题时,我们尽量使题目的类型广泛一些,题目的多样性可促使学生灵活地运用所学知识.

鉴于本书是为学习概率论与数理统计这门课程的理工科大学学生提供本课程基础知识辅导用的,这些知识对于经济类各专业的大学生也同样是应该理解和熟练掌握的.因此,对于经管类大学生学习这门课程,本书也是一本合适的辅导书.

在此向支持和帮助过我的朋友们表示谢意.

本书若有错误和不当之处,希望广大读者批评指正.

傅维潼

2000年9月

目 录

第 1 章	概率论的基本概念.....	1
1.1	随机试验、样本空间、随机事件、频率与概率.....	1
1.2	排列与组合知识复习	9
1.3	等可能概型(古典概型).....	14
1.4	条件概率.....	22
1.5	练习与答案.....	38
第 2 章	随机变量及其分布	45
2.1	随机变量.....	45
2.2	离散型随机变量的概率分布.....	47
2.3	随机变量的分布函数.....	60
2.4	连续型随机变量的概率密度.....	66
2.5	随机变量的函数的分布.....	82
2.6	习题与答案.....	90
第 3 章	多维随机变量及其分布.....	102
3.1	二维随机变量	102
3.2	边缘分布	119
3.3	条件分布	128
3.4	相互独立的随机变量	135
3.5	两个随机变量函数的分布	146
3.6	练习与答案	166
第 4 章	随机变量的数字特征.....	182
4.1	数学期望	182
4.2	方差	198

4.3	几种重要随机变量的期望与方差	209
4.4	协方差及相关系数、矩、协方差矩阵	222
4.5	练习与答案	234
第5章	大数定律及中心极限定理	243
5.1	大数定律	243
5.2	中心极限定理	247
5.3	练习与答案	257
第6章	样本及抽样分布	260
6.1	随机样本	260
6.2	抽样分布	262
6.3	练习与答案	278
第7章	参数估计	281
7.1	点估计	281
7.2	估计量的评选标准	293
7.3	区间估计	300
7.4	正态总体均值与方差的置信区间	303
7.5	$(0, 1)$ 分布参数的区间估计.....	308
7.6	单侧置信区间	309
7.7	练习与答案	312
第8章	假设检验	317
8.1	假设检验	317
8.2	正态总体均值的假设检验	319
8.3	正态总体方差的假设检验	325
8.4	样本容量的选取	327
8.5	分布拟合检验	332
8.6	秩和检验	343
8.7	练习与答案	350

第 9 章	方差分析与回归分析	353
9.1	单因素试验的方差分析	353
9.2	双因素试验的方差分析	361
9.3	一元线性回归	370
9.4	多元线性回归	378
9.5	练习与答案	381
第 10 章	随机过程的基本知识	386
10.1	随机过程的概念和记号.....	386
10.2	随机过程的统计描述.....	387
10.3	泊松过程与维纳过程.....	396
10.4	练习与答案.....	404
第 11 章	马尔可夫链	406
11.1	马尔可夫过程及其概率分布.....	406
11.2	多步转移概率的确定.....	415
11.3	遍历性.....	419
11.4	练习与答案.....	424
第 12 章	平稳随机过程	429
12.1	平稳随机过程的概念.....	429
12.2	各态历经性(遍历性).....	432
12.3	相关函数的性质.....	437
12.4	平稳过程的功率谱密度.....	439
12.5	练习与答案.....	446
	参考文献	448

第 1 章 概率论的基本概念

1.1 随机试验、样本空间、 随机事件、频率与概率

1.1.1 内容提要

(1) 随机试验

具有以下特点的试验称为随机试验：

可以在相同的条件下重复进行；

每一次试验的可能结果不止一个，并且事先可以明确该试验的一切可能的结果；

在每一次进行试验之前不能确定会出现哪一个结果。我们把随机试验记为 E 。

(2) 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为样本空间，记为 S 。样本空间中的元素，即随机试验 E 的每一个结果，称为样本点，记为 e ，于是 $S = \{e\}$ 。

(3) 随机事件

在每一次试验中可能发生也可能不发生的现象，称为随机事件，用大写字母 A, B, C 等表示。随机事件是样本空间 S 的子集，在一次试验中事件 A 发生，就意味着子集 A 中的一个样本点出现。

由一个样本点组成的单点集合，称为简单或基本事件。样本空间 S 作为其本身的一个子集所代表的事件称为必然事件。空集

作为样本空间的一个子集,它所代表的事件称为不可能事件. S 在每次试验中都必定发生, \bar{S} 在每次试验中都一定不出现.

(4) 事件间的关系和运算

语言表达	事件的关系、运算
A 出现必导致 B 出现	$A \subset B$
A 或 B	$A \cup B$
A 与 B 至少有一个发生	$A \cup B$ 发生
A 且 B	$A \cap B$ (AB)
A 与 B 都发生	$A \cap B$ 发生
A 发生但 B 不发生	$A \setminus B$ 发生
A 与 B 互不相容(不能都发生)	$AB = \emptyset$
A 的对立事件发生即 A 不发生	\bar{A} 发生
A 或 B 恰好发生一个	$(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ 发生

(5) 事件的运算律

交换律

$$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$$

结合律

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), (A \cup B) \cup C = (A \cup B) \cup C$$

分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (\text{并对交的})$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\text{交对并的})$$

德·摩根律(对偶律)

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

(6) 频率与概率

频率: 在相同的条件下, 进行 n 次试验, 在这 n 次试验中, 事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数, 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率, 记为 $f_n(A)$. 它描述事件 A 发生的频繁程度,

$f_n(A)$ 越大说明 A 出现的越频繁 .

基本性质:

$$1^\circ 0 \leq f_n(A) \leq 1$$

$$2^\circ f_n(S) = 1$$

$$3^\circ \text{若 } A_1, A_2, \dots, A_k \text{ 是两两不相容的事件, 则 } f_n \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) = \sum_{i=1}^k f_n(A_i)$$

当 n 相当大时, 频率 $f_n(A)$ 稳定在某个常数附近, 这个常数记为 $P(A)$, 即 A 的概率 .

概率

设 E 为一随机试验, S 是其样本空间, 对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数, 记为 $P(A)$, 称为事件 A 的概率, 它描述在一次试验中事件 A 发生可能性的大小 .

若集合函数 $P(\cdot)$ (即定义域是由集合组成的类, 值域为实数的函数) 满足下列条件:

$$1^\circ \text{对任意事件 } A, \text{ 有 } P(A) \geq 0$$

$$2^\circ P(S) = 1$$

3 $^\circ$ 设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为两两互不相容的一系列事件, 则有

$$P \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (\text{称为完全可加性})$$

那么集合函数 $P(\cdot)$ 在事件 A 处的值 $P(A)$ 称为事件 A 的概率 .

概率的重要性质

$$\text{性质 } 1^\circ: P(\emptyset) = 0$$

性质 2 $^\circ$: 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是两两互不相容的事件, 则有

$$P \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (\text{称为有限可加性})$$

性质 3 $^\circ$: 设 A, B 为两个事件, 且 $A \subset B$, 则有

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A), \quad P(A) \leq P(B)$$

性质 4°: 对于任意一个事件 A , $P(A) \geq 0$

性质 5°: 对于任意一个事件 A , $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

性质 6°: (广加法公式)对于任意两个事件 A 和 B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

一般地, 对于任意 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n , 有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) \\ &\quad + P(A_3) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) \\ &\quad + P(A_4) - P(A_1 A_4) - P(A_2 A_4) - P(A_3 A_4) \\ &\quad + \dots + (-1)^{s-1} P(A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_s}) \\ &\quad + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \end{aligned}$$

1.1.2 例题分析

1.1 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 从 52 张扑克牌中, 任意地抽取一张牌, 分两种情况描述样本空间: 考虑花色; 不考虑花色.

解 考虑花色. 分别用 S, H, D, C 表示黑桃、红桃、方块、梅花, A 用“1”表示, J, Q, K 分别用“11”、“12”、“13”表示, 那么样本空间由图 1.1 中的 52 个点构成:

不考虑花色, 则样本空间由 13 个样本点组成, 即 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$.

(2) 测量某公司生产的灯泡的“寿命”, 假若没有一个灯泡的寿命超过 5000 小时, 描述这一试验的样本空间.

解 设用 t 表示灯泡的“寿命”, 则这一试验的样本空间是实数轴上的一个区间

$$S = \{t / 0 \leq t \leq 5000\}$$

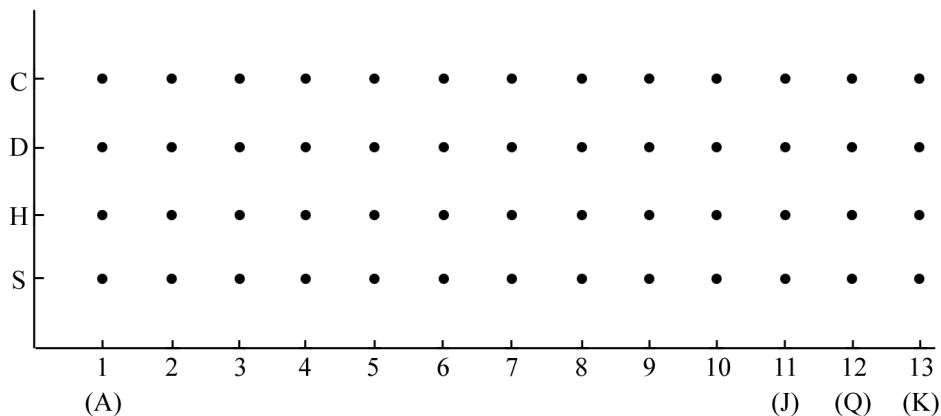


图 1.1

(3) 生产某种产品直到生产出 10 件正品为止, 描述总共生产的产品的件数的样本空间

解 设生产产品的总数为 n , 那么这一试验的样本空间 S 应该是从 10 开始的一切整数

$$S = \{n \mid n \geq 10 \text{ 的整数}\}$$

(4) 在半径为 1 的圆内任取一点, 描述该点位置的坐标的样本空间.

解 设圆心与原点重合, 该点的坐标为 (x, y) , 那么这一试验的样本空间为

$$S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

(5) 把一个长为 l 的竹杆折成三段, 观察每一段的长度, 描述这一试验的样本空间.

解 设 x, y, z 分别表示这三段各自的长度, 那么应该有 $x > 0, y > 0, z > 0$ 且 $x + y + z = l$, 因此样本空间 $S = \{(x, y, z) \mid x + y + z = l, x > 0, y > 0, z > 0\}$, 即在空间直角坐标系的第一卦限, 过点 $A(l, 0, 0), B(0, l, 0), C(0, 0, l)$ 的三角形 ABC 的内部(见图 1.2).

1.2 设 A, B, C 是三个事件, 用事件的运算关系描述下列各事件:

(1) A, B, C 中至少有两个发生;

图 1.2

(2) A, B, C 中恰好有两个发生;

(3) A, B, C 中至多发生 1 个;

(4) A, B, C 中至多发生 2 个;

(5) A, B, C 中恰好发生 1 个.

解 (1) 或 A 与 B 发生, 或 A 与 C 发生, 或 B 与 C 发生, 即 AB, AC, BC 中至少有 1 个发生, 故得

$$AB \quad AC \quad BC$$

(2) 或者 A, B 都发生 C 不发生; 或者 A, C 都发生 B 不发生; 或者 B, C 都发生 A 不发生, 总之, 以下三个事件之一发生:

$$AB\bar{C}, \bar{A}BC, \bar{A}\bar{B}C$$

故得

$$ABC \quad \bar{A}BC \quad \bar{A}\bar{B}C$$

(3) 或者 A, B 都不发生, 或者 A, C 都不发生, 或者 B, C 都不发生, 即 $\bar{A}\bar{B}, \bar{A}\bar{C}, \bar{B}\bar{C}$ 中至少有一个发生, 故

$$\bar{A}\bar{B} \quad \bar{A}\bar{C} \quad \bar{B}\bar{C}$$

(4) 或 A 不发生, 或 B 不发生, 或 C 不发生, 即 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 至少有一个发生, 所以

$$\bar{A} \quad \bar{B} \quad \bar{C}$$

(5) 或恰好 A 发生, 或恰好 B 发生, 或恰好 C 发生, 即 $\overline{A\overline{B}C}$, $\overline{A\overline{B}C}$, $\overline{A\overline{B}C}$ 中有一个发生. 故

$$\overline{A\overline{B}C} \quad \overline{A\overline{B}C} \quad \overline{A\overline{B}C}$$

1.3 设 A, B, C 是三个事件, 试证明:

$$\overline{A\overline{B}} \quad \overline{A\overline{B}} \quad \overline{A\overline{B}} = \overline{A\overline{B}}$$

解 由 $\overline{A} \quad \overline{A} = \overline{A}$, 上式左端可改写为

$$\overline{A\overline{B}} \quad \overline{A\overline{B}} \quad \overline{A\overline{B}} = \overline{A\overline{B}} \quad \overline{A\overline{B}} \quad \overline{A\overline{B}}$$

再由交换律, 结合律可得

$$\overline{A\overline{B}} \quad \overline{A\overline{B}} \quad \overline{A\overline{B}} = (\overline{A\overline{B}} \quad \overline{A\overline{B}}) \quad (\overline{A\overline{B}} \quad \overline{A\overline{B}})$$

由交对并的分配律可得

$$(\overline{A\overline{B}} \quad \overline{A\overline{B}}) \quad (\overline{A\overline{B}} \quad \overline{A\overline{B}}) = \overline{A}(\overline{B} \quad \overline{B}) \quad (\overline{A} \quad \overline{A})\overline{B}$$

由 $\overline{A} \quad \overline{A} = S$ 及 $SA = A$ 又可得

$$\overline{A}(\overline{B} \quad \overline{B}) \quad (\overline{A} \quad \overline{A})\overline{B} = \overline{A} \quad \overline{B}$$

由摩根律 $\overline{A\overline{B}} = \overline{A} \quad \overline{B}$, 知 $\overline{A} \quad \overline{B} = \overline{A\overline{B}}$, 所以

$$\overline{A\overline{B}} \quad \overline{A\overline{B}} \quad \overline{A\overline{B}} = \overline{A\overline{B}}$$

1.4 简化下列各式:

(1) $(A \quad B)(B \quad C)$;

(2) $(A \quad B)(A \quad \overline{B})$;

(3) $(A \quad B)(A \quad \overline{B})(\overline{A} \quad B)$;

(4) 求 $P[(A \quad B)(A \quad \overline{B})(\overline{A} \quad B)(\overline{A} \quad \overline{B})]$.

解 (1) 由摩根律 $\overline{A\overline{B}} = \overline{A} \quad \overline{B}$ 及 $\overline{A \quad B} = \overline{A} \quad \overline{B}$, 并利用 $\overline{\overline{A}} = A$ 可得

$$\begin{aligned} (A \quad B)(B \quad C) &= \overline{\overline{(A \quad B)(B \quad C)}} \\ &= \overline{\overline{(A \quad B)} \quad \overline{\overline{(B \quad C)}}} \\ &= \overline{\overline{A} \quad \overline{B}} \quad \overline{\overline{B} \quad \overline{C}} \end{aligned}$$

由交对并的分配律可得 $\overline{\overline{A} \quad \overline{B}} \quad \overline{\overline{B} \quad \overline{C}} = \overline{B}(\overline{A} \quad \overline{C})$, 于是

$$(A \quad B)(B \quad C) = \overline{\overline{B}(\overline{A} \quad \overline{C})}$$

$$\begin{aligned}
 &= \overline{\overline{BAC}} \\
 &= \overline{B} \quad \overline{AC} \\
 &= B \quad AC
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad &(A \quad B)(A \quad \overline{B}) \\
 &= A \quad A \quad \overline{B} \quad AB \quad B \quad \overline{B} \\
 &= A \quad (\text{利用了 } AB \quad A, A \quad \overline{B} \quad A, B \quad \overline{B} =)
 \end{aligned}$$

(3) 由(2) 可得

$$\begin{aligned}
 (A \quad B)(A \quad \overline{B})(\overline{A} \quad B) &= A(\overline{A} \quad B) \\
 &= A \quad \overline{A} \quad AB \\
 &= AB
 \end{aligned}$$

(4) 由(3)可知

$$\begin{aligned}
 &P[(A \quad B)(A \quad \overline{B})(\overline{A} \quad B)(\overline{A} \quad \overline{B})] \\
 &= P[AB(\overline{A} \quad \overline{B})] \\
 &= P[\quad] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

1.5 设 A, B 是两个事件且 $P(A) = 0.6, P(B) = 0.7$, 问:

(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值, 最大值是多少?

(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值, 最小值是多少?

解 (1) 因为 $AB \subseteq A$, 由性质 3 得 $P(AB) \leq P(A) = 0.6$ 当 $A \subseteq B$ 时有 $AB = A$, 此时等号成立, 即 $P(AB) = P(A) = 0.6$, 这时 $P(AB)$ 取最大值, 最大值为 0.6 .

(2) 由广加法公式 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 故

$$\begin{aligned}
 P(AB) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\
 &= 0.6 + 0.7 - P(A \cup B) \\
 &= 1.3 - P(A \cup B)
 \end{aligned}$$

因为 $0 \leq P(A \cup B) \leq 1$. 当 $A \cup B = S$ 时, $P(A \cup B) = P(S) = 1$, 此时, $P(AB) = 1.3 - 1 = 0.3$ 取最小值, 因而 $P(AB)$ 取最小值, 最小值为 0.3 .

1.6 设 A, B, C 是三个事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$,

$P(AB) = P(BC) = 0, P(AC) = \frac{1}{8}$, 求 A, B, C 至少有一个发生的概率.

解 用广加法公式

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

由 $ABC \subset AB$, 所以 $0 \leq P(ABC) \leq P(AB)$, 而 $P(AB) = 0$, 故得 $P(ABC) = 0$, 于是得

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

1.2 排列与组合知识复习

1.2.1 内容提要

(1) 两个基本的计数原理

加法原理: 若集合 S 可以划分成若干互不重叠的子集 S_1, S_2, \dots, S_m 即 $S = \bigcup_{i=1}^m S_i$ 且 $i \neq j$ 时, $S_i \cap S_j = \emptyset$. 则确定 S 中含元素的总数, 可先求出各子集 S_1, S_2, \dots, S_m 中的元素的个数然后加起来.

或一堆事物 S 可以划分成互不重叠的 m 堆 S_1, S_2, \dots, S_m , 其中第 i 堆 S_i 中含 p_i 个事物 ($i = 1, 2, \dots, m$), 则从这一大堆事物 S 中选择一个事物可以有 $\sum_{i=1}^m p_i$ 种方法.

乘法原理: 若 A_i 是 m_i 个元素的集合, a_i 是 A_i 中的任意一元素 ($i = 1, 2, \dots, s$), 则形如 (a_1, a_2, \dots, a_s) 的 s 元有序元素组的

个数等于 $m_1 m_2 \dots m_s$.

或第 i 个事物可用 m_i 种方法选择, 且不论前 $i - 1$ 个事物怎样选择, 第 i 个事物均有 m_i 种方法选择, 则同时选择第 1, 第 2, ..., 第 s 个事物的方式可有 $m_1 m_2 \dots m_s$ 种 .

(2) 排列与组合

排列 设 r 是一个正整数, 所谓 n 个元素的集合 S 的 r 排列就是 n 个元素中取 r 个元素的有序安排, 用 P_n^r 表示 n 个元素集合的 r 排列的个数. 若 $r > n$ 时, $P_n^r = 0$, 若 $r = n$, 则 n 个元素集合 S 的 n 排列简称 S 的排列或 n 个元素的全排列 .

要构造一个 n 个元素集合的 r 排列时, 可以按 n 种方式选择第 1 项, 只要选定了第 1 项, 就有 $n - 1$ 种方式选择第 2 项, ..., 只要选定了前 $r - 1$ 项, 就有 $n - r + 1$ 种方式选择第 r 项. 由乘法原理, 这 r 个项可以按 $n(n - 1)(n - 2) \dots (n - r + 1)$ 种方式选择. 令 $n! = n(n - 1) \dots 2 \cdot 1$, 规定 $0! = 1$, 则

$$P_n^r = n(n - 1) \dots (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

对于 $n = 0$, $P_n^0 = 1$, $P_n^n = n!$.

组合 设 r 是一个非负整数, 所谓 n 个元素集合的 r 组合即是 S 的 r 个元素的子集, 用 C_n^r 表示 n 个元素集合的 r 组合的个数 .

若 $r > n$, 则 $C_n^r = 0$, 若 $n = 0$ 且 r 为正整数, 则 $C_0^r = 0$, 约定 $C_0^0 = 1$.

对非负整数 n 有 $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$.

对于 $r \leq n$, S 的一个 r 组合, 可按 $r!$ 种方式排列, S 的每一个 r 排列可以通过把 S 的某个 r 组合排序唯一确定, 于是 $P_n^r = r! C_n^r$, 所以

$$C_n^r = \frac{1}{r!} P_n^r = \frac{n(n - 1) \dots (n - r + 1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n - r)!}$$