

# 机械系统动力学

刘荣忠摇曹从咏摇编著

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

机械系统动力学 鞠荣杰,曹从咏编著 哈尔滨:  
哈尔滨工程大学出版社, 2004  
ISBN 7-5404-2610-0

I ①刘 ②曹 Ⅲ 机械系统 动力学  
Ⅳ ① ②

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第 3500 号

### 内容简介

本书简要介绍了振动运动学的基本概念,系统分析了机械振动的产生、扩展、衰减和控制,着重阐述了振动理论、刚体动力学理论及其计算公式的物理意义。全书包括绪论、单自由度刚体系统动力学、二自由度刚体系统动力学、单自由度系统振动、二自由度系统振动、多自由度系统振动、弹性体系统振动。

本书可供高等工科院校机械类专业学生作教材,也可供教师和广大工程技术人员参考。

哈尔滨工程大学出版社出版发行  
哈尔滨市南通大街156号 哈工程大学156号楼  
发行部电话:(0451)8251111 邮编:150001  
新华书店经销  
肇东粮食印刷厂印刷

\*

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 15.5 字数 380千字  
2004年 5月第 1版 2004年 5月第 1次印刷  
印数 1500册  
定价:18.00元

# 前 摇 摇 言

随着工业和科学技术的不断发展,各部门迫切需要大量新的,高效率、高速度、高精度和高度自动化的机械和技术装备。这对机械产品的动态性能提出了愈来愈高的要求。因此机械系统动力学的研究正日益受到重视。

目前国内许多机械类专业已经开设了“机械系统动力学”课程,并作为重点课程来建设。但已有的教材和专著还不能充分适应机械类专业本科生教学的需要。因此,编著者在多年从事“机械系统动力学”、“机械振动”等课程教学实践的基础上,根据机械类专业本科生教学的实际情况,编著了本书。

本书共分七章。

第 员章讲述了机械系统的分类,机械系统动力学的任务等。

第 圆章讨论由刚体构件组成的机械系统动力学,其中第 圆章重点介绍单自由度机械系统的等效力学模型及其运动方程的建立和求解;第 猿章介绍拉格朗日方程及其在二自由度系统中的应用。

第 源章至第 远章简明扼要地介绍机械振动的基础知识,包括单自由度系统、两自由度系统以及多自由度系统振动求解方法。

第 苑章讲述了弹性体振动,主要介绍杆的纵向振动,轴的扭转振动,梁的横向振动。

本书可作为机械工程类专业教材,亦可作为机械工程类专科、夜大、函授大学相关课程教材,也可供从事机械动态设计的科技人员作参考。总学时计划 源小时左右。

本书第 员圆猿苑章由南京理工大学刘荣忠教授编写,第 源缘远章由南京理工大学曹从咏教授编写。

编著者借此机会,对关心和支持本书编著的同志们表示衷心的感谢。

由于编著者的知识水平所限,书中的错误和不足在所难免,敬请读者批评指正。

编著者

圆园园年 愿月

# 第 1 章 绪论

## 1.1 系统、机械系统

现代的工程问题不仅要对系统进行动态特性的分析,而且还需要对系统进行综合,即将所要研究和处理的对象当作一个系统,看其中元素和元素之间的关联,并从整体的角度来协调好这种关联,使这个系统在我们所要求的某种性能指标下达到最佳状态,这正是系统论的基本思想。从系统论的观点看,系统是一些元素的组合,这些组合在一起的元素通过相互作用共同完成给定的任务。系统的概念不仅适用于物理系统,而且可以推广到任何动态现象,包括自然系统(例如太阳系、生态系统)和人工系统(例如经济系统、交通运输系统、商业系统)等。

在系统分析中,常采用“系统”和“信号”等概念来描述工程问题。系统是指构成机器或研究过程的实际硬件,而信号则是在系统间的连接通道中“流动”的物理变量。当把系统看作是相互连接的元件的总体时,显然每一个元件都有一个或几个其它元件流入的信号,并有一个或几个由它流向其它元件的信号。前者称为输入,而后者称为输出。当研究一个系统时,总是将其在一定输入条件下具有什么输出(即响应)相联系,亦就是要研究动态系统。

本书所要研究的是由机械元件组成的机械系统。它常与电气系统、液压系统相结合组成某一技术装备。除机械设备外,即使一些电气设备及其它装置的执行机构,亦常是由机械系统组成的。因此,研究机械系统动力学具有极其重要和重义。

分析任何一种动态系统,都应首先建立它的数学模型,建立一个合理的数学模型是分析过程的关键。机械系统的数学模型是指对机械系统动态特性的数学描述,通常机械系统的数学模型是用微分方程来描述的。机械系统的数学模型通常可分为离散系统和连续系统两大类,也可以根据描述系统的微分方程是否为线性的,分为线性系统和非线性系统;有时也根据其数学模型的确定性、随机性和模糊性进行分类。

## 1.2 离散系统和连续系统

机械系统动力学是借助于模型进行研究的。模型是将实际事物抽象化而得到的。例如质点、刚体、梁、板、壳、弹簧—质量系统等等都是抽象化的模型。抽象化的方法并不是脱离实际,而是为了抓住事物的主要因素,忽略次要因素,在一定的条件下更能深刻地反映客观实际。

任何机器、结构或它们的零部件都具有弹性和质量。若机械各构件的弹性变形很小,以致可以忽略不计,则可近似认为系统是由刚体构件组成的;当构件的弹性变形不能忽略时,则机械系统的动力学模型可分为离散系统(或称集中参数系统)和连续系统(或称分布参数系统)两大类。

离散系统是由集中参数元件组成的,基本的集中参数有三种,即质量、弹簧与阻尼器。例如图 员猿 苑 所示的安装在混凝土基础上的精密机器,为了隔振,在基础下面一般装有弹性衬垫。在隔振分析中需要考察机器与基础的整体振动,这时机器与基础可视为一个刚体起着质量的作用具有惯性,弹性衬垫起着弹簧的作用,衬垫的内摩擦以及基础与周围约束之间的摩擦起着阻尼的作用。因而这一系统可以简化成图 员猿 愿 所示的集中参数系统。离散系统的运动在数学上用常微分方程来描述。

连续系统是由弹性元件组成的。典型的弹性元件有杆、梁、轴、板、壳等。弹性体的惯性、弹性和阻尼实际上是连续分布的,亦称为分布参数系统,连续系统的运动在数学上用偏微分方程来描述。机械系统中有不少问题需要简化为连续系统的模型。例如,涡轮盘简化为变厚度的圆板、涡轮叶片简化为变截面的梁或壳等等。

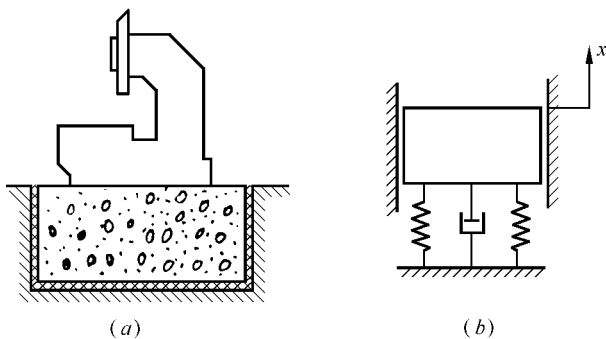


图 员猿 愿 单自由度实例与集中参数系统

在工程实际应用中,许多连续系统的问题,不可能求出封闭形式的精确解,只能求出近似解,例如非均匀杆等复杂结构,总是把连续系统离散化,然后再集中为离散系统进行计算。

## 员猿 缘 线性系统和非线性系统

如果一个系统的数学模型可以用线性微分方程来描述,则该系统称为线性系统。当机械系统的质量不随运动学参数(如坐标、速度和加速度等)而变化,并且系统的弹性力与阻尼力都可以简化为线性模型时,则该系统通常为线性系统。在实际情况下,严格的线性系统是不存在的。但在许多情况下,只要位移不大,按照线性弹簧与线性阻尼的假设所得到的结论具有足够的准确性,有很好的实用价值。

凡是不能简化为线性系统的动力学系统都称为非线性系统。非线性系统的数学模型是由非线性微分方程来表示的。

线性系统的重要特征是能够应用叠加原理。叠加原理指出:对于同时作用于系统的两个不同的输入(或称激励函数),所产生的输出(或称响应)是这两个输入单独作用产生的响应之和。显然,当多于两个输入作用于系统时,其响应的叠加性质同样是成立的。与叠加原理等价的结论是线性微分方程的复杂解可分解为简单解之和。可以根据叠加原理是否成立来判断一个系统是否为线性系统。如果通过试验可以验证一个动态系统的响应与输入是正比的,则可以推断该系统是一个线性系统。

虽然对于许多实际系统都可以简化为线性系统来处理,但是这样的简化必须受到一定的限制,例如弹性变形只有在一定的范围内才具有线性特征。当系统的运动超出了假设的范围,就有可能破坏其线性特性。例如,对于大家所熟悉的由摆长  $l$  和质量  $m$  组成的平面单摆,其运动方程为

$$m l \ddot{\theta} + m g \sin \theta = 0 \quad (1)$$

式中  $\theta$ ——单摆角位移。

当  $\theta$  很小时,可用  $\theta$  代替  $\sin \theta$ ,这样式(1)简化为

$$m l \ddot{\theta} + m g \theta = 0 \quad (2)$$

这是一个我们熟悉的二阶线性方程,其解的周期为  $2\pi \sqrt{l/g}$ ,即周期不依赖于初始位移和初始速度,系统的运动具有等时性。在大位移的场合,上述结论是不正确的,因为方程式(1)对于大位移是不精确的。如果用  $\sin \theta$  幂级数的前两项代替  $\sin \theta$  则在  $\theta < \pi/6$  时仍然是相当精确的。在此假设下,方程式(1)可简化为

$$m l \ddot{\theta} + m g \theta + \frac{m g}{6} \theta^3 = 0$$

这是一个非线性方程。根据非线性方程理论,系统已不具有运动等时性。

在非线性系统中,叠加原理已不再适用。求解非线性系统的问题大多都是十分复杂的,通常不可能求出它的封闭解。因此,在实用中总是尽量地将非线性系统在给定条件附近线性化,近似地用线性数学模型来代替。这样,许多只适用于线性系统的方法都可以应用。

## 2. 确定性、随机性与模糊性

一个实际的动力学系统,在外界激励(即输入)作用下,会呈现一定的动力学响应(即输出)。输入、输出与振动系统之间的关系可用图 1 所示的框图来表示。

系统的激励可通常分为确定性的和随机性的两大类。如果外部激励可以用确定的时间函数来描述,则称该激励是确定性的。例如脉冲函数、阶跃函数、周期函数、谐和函数等都是典型的确定性函数。如果一个系统惯性、弹性与阻尼以及激励都是确定性的,则系统的运动可以用确定性的微分方程来描述,如果其初始状态亦是确定性的,那么就可以由初始运动求出用时间函数表示的系统响应函数。这种由系统在某一时刻的状态(称为初始条件)就可以确定其以后任一时刻的状态的现象称为确定性现象。

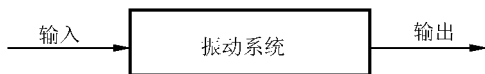


图 1 输出、输入与振动系统之间的关系

随机激励则与确定性激励相反,它们不能用时间的确定函数来描述,而只具有一定的统计规律性,必须用随机过程来描述,与其对应的系统运动方程为随机微分方程。随机微分方程不再存在确定的时间函数解,只能研究其所谓“几乎所有”的解。在求解时,并不逐个地考察解过程的样本函数,而是从概率等于 1 的总体上去研究随机微分方程的解。求解随机微分方程的“几乎所有”的解时,要涉及到随机过程的较多的概率特性和样本函数的性质,因此在实用中通常只求其较弱的解,即均方解。可以说,随机系统动力学的基础理论都是建立在随机微分方程均方解的基础上的。

目前,机械系统和结构系统设计的发展趋势是不断地从确定性设计方法过渡到概率设计方法,如可靠程度指标法和直接的可靠性法等,这是人们认识和研究不断深入的结果。最近,在机械系统和结构系统的设计中又提出了模糊优化设计。人类在认识世界的过程中,从模糊发展到精确,从心中无数到心中有数,这是一个飞跃。而今为了分析和处理模糊现象,又突破了精确数学的框架,产生了模糊数学。从模糊到精确,又从精确到模糊,这不是倒退,而是螺旋式的上升。如果一个系统的激励是模糊的,则它应该用模糊过程来描述,对应的运动方程应成为模糊微分方程了。关于模糊过程的定义、性质、构造与描述方法,以及模糊微分方程的解法等问题,目前还没有得到完全解决,有待于今后的进一步发展。

## 机械振动的运动学概念

### 一、机械振动的概念与分类

#### 机械振动的概念

机械振动可解释为机器或结构物在静平衡位置附近的一种反复运动。在许多情况下,机械振动是有害的,它影响机器设备的工作性能和寿命,产生不利于工作的噪声和有害于机械或结构物的动载荷,严重时会使零部件失效甚至破坏而造成事故。因此,对于大多数机器设备,应将其振动量控制在允许的范围内。反之,对于利用振动原理工作的机器设备,则又应使它能产生所希望的振动,选择其应有的效能。

实际的机器或结构物可以简化为一个力学模型。如图 1-1 所示,一个不发生形变的物体放在一个忽略了质量的弹簧上,组成一个“弹簧-原质量”系统。

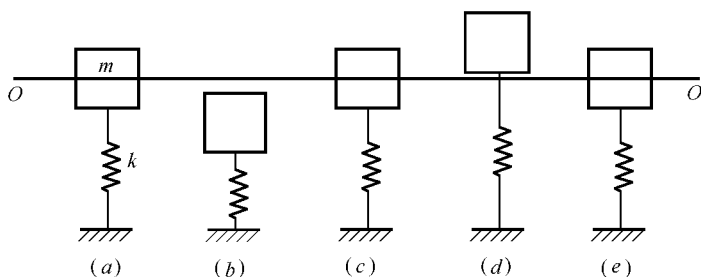


图 1-1 弹簧-原质量系统

物体静止时,物体处于图 1-1(a)所示的平衡位置,此刻物体的重力与弹簧支持它的弹性恢复力互相平衡,即它们的合力为零,故物体的加速度为零;当物体受到向下的冲击作用后即向下运动,弹簧被进一步压缩,弹性恢复力逐渐加大,使物体作减速运动。当物体的速度减小到零后,物体即运动到如图 1-1(d)所示的最低位置,此时重力大于弹簧的弹性恢复力,故合力的方向向上,使物体产生向上的加速度,物体即开始向上运动;当物体返回到如图 1-1(a)所示的平衡位置时,其所受合力又为零,但其速度不为零,由于惯性作用,物体继续向上运动,随着物体向上运动,弹簧逐渐伸长,弹性恢复力逐渐变小,物体重力大于弹性恢复力,合力方向向下,故物体又作减速运动。当物体向上

的速度减小到零时,物体即运动到如图 1-1-10 所示的最高位置。此后,物体即开始向下运动,返回平衡位置;当物体返回到如图 1-1-11 所示的平衡位置时,其所受合力又为零,但其速度仍不为零。由于惯性作用,物体继续向下运动。这样,物体即在平衡位置附近来回往复运动。

物体从平衡位置开始向下运动,然后向上运动,经过平衡位置再继续向上运动,然后又向下运动回到平衡位置(从图 1-1-10 到图 1-1-11 称为完成一次振动)。

从运动学的观点来看,机械振动是指机械系统的某些物理量(位移、速度、加速度),在某一数值附近随时间的变化关系。

图 1-1-12 表示某物理量在相等的时间间隔内作往复运动,这种振动称为“周期振动”。往复一次所需的时间间隔称为“周期”。每经过一个周期后,运动便重复前一周期中的全部过程。

周期振动可用时间的周期函数表达为

$$y = A \sin(\omega t + \phi) \quad (1-1)$$

式中:

$$A \text{ 为振幅,} \dots$$

周期的倒数定义为“频率”,以  $f$  表示

$$f = \frac{1}{T} \quad (1-2)$$

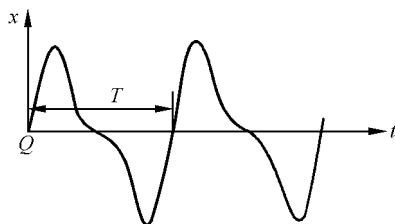


图 1-1-12 周期振动



图 1-1-13 非周期振动

图 1-1-13 表示在旋转机械起动过程中产生的振动,它没有一定的周期,不能表达成(1-1)式的形式。这种振动称为“非周期振动”。

### 机械振动的分类

为了便于分析讨论振动问题,有必要对振动加以分类。机械振动可根据不同的特征作如下的分类:

#### 按产生振动的原因分类

(1) 自由振动——当系统的平衡被破坏,只靠其弹性恢复力来维持的振动。

(2) 受迫振动——在外界激振力的持续作用下,系统被迫产生的振动。

(3) 自激振动——由于系统具有非振荡性能源和反馈特性,从而引起一种稳定的周期性振动。

#### 按振动的规律分类

(1) 简谐振动——能用一项正弦或余弦函数表达其运动规律的周期性振动。

(2) 非简谐振动——不能用一项正弦或余弦函数表达其运动规律的周期性振动。



达式：

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

比较(1)、(2)和(3)式,可以看出：

(1)只要位移是简谐函数,则速度和加速度也是简谐函数,而且与位移具有相同的频率；

(2)速度的相位比位移的相位超前  $\frac{\pi}{2}$ , 加速度比位移超前  $\pi$ ；

(3)因为  $a = -\omega^2 x$  这就表明,简谐振动的加速度与位移恒成正比而反向,即加速度始终指向平衡位置。这是简谐振动的运动学特征。

### 简谐振动的矢量表示法和复数表示法

#### 1. 矢量表示法

简谐振动可以用旋转矢量在坐标轴上的投影来表示。

如图 1 所示,从始点  $O$  作矢量  $\vec{OP}$ ,其模为  $A$ ,以等角速度  $\omega$  旋转,矢量的起始位置与水平轴的夹角为  $\varphi$ 。在任一瞬时,矢量与水平轴的夹角则为  $\omega t + \varphi$ 。

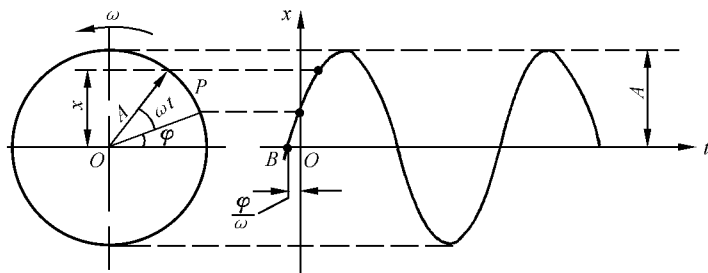


图 1 简谐振动的矢量表示法

这一旋转矢量在垂直轴上的投影则为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

这一旋转矢量在水平轴上的投影则为

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

由此可见,旋转矢量在垂直轴或水平轴上的投影,均可用来表示简谐振动。而这一旋转矢量的模,就是简谐振动的振幅,旋转矢量的角速度就是简谐振动的圆频率,旋转矢量与水平轴(或垂直轴)的夹角就是简谐振动的相位角,而简谐振动的初相位角,则是  $\varphi$  的旋转矢量与水平轴(或垂直轴)的夹角。

简谐振动的速度和加速度也可用旋转矢量来表示。因为速度和加速度也是时间  $t$  的正弦(或余弦)函数,其圆频率仍为  $\omega$ ,并分别具有以下的最大值：

$$v_{\max} = A\omega$$

$$a_{\max} = A\omega^2$$

故可用等速旋转的两个矢量  $\vec{v}$  和  $\vec{a}$  来表示。但速度矢量超前于位移矢量  $\frac{\pi}{2}$ , 加速度

矢量则超前于位移矢量  $\vec{x}$  如图 1-10 所示。

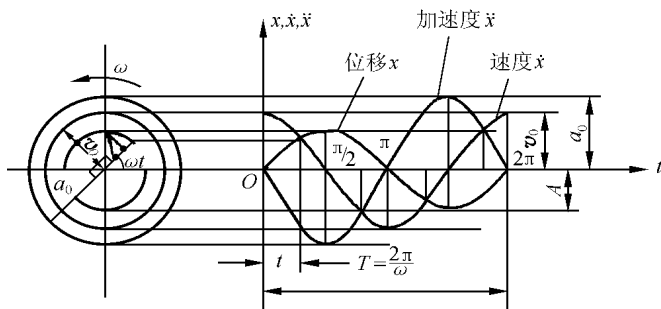


图 1-10 简谐振动的位移、速度和加速度矢量

从图 1-10 中可以看出,所谓相位差是指两物理量达到最大值(或最小值)时时间上的差异。若两个物理量同时达到最大值或最小值,则相位差  $\varphi$  称为同相;若两个物理量一个达到最大值时,另一个正好达到最小值,则相位差  $\varphi$  称为反相。

### 1.3 复数表示法

复数可以用复数平面上的一个矢量来表示。如图 1-11 所示,长度为  $A$  的矢量  $\vec{z}$  在实数轴和虚数轴上的投影分别为  $A \cos \theta$  及  $A \sin \theta$ ,故矢量  $\vec{z}$  就代表了下列复数:

$$z = A(\cos \theta + j \sin \theta)$$

而  $\vec{z}$  的长度就代表了这一复数的模  $A$ ,  $\vec{z}$  与实数轴的夹角就是这一复数的复角  $\theta$ 。

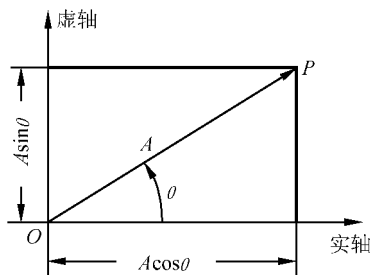


图 1-11 复数的矢量表示法

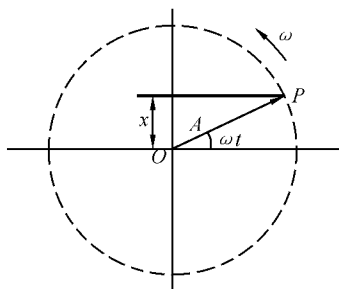


图 1-12 复数旋转矢量

若使  $\vec{z}$  绕  $O$  点以等角速度  $\omega$  在复平面内逆时针旋转,就成为一个复数旋转矢量(图 1-12)。它在任一瞬间的复角为  $\theta$ ,故这一旋转矢量的复数表达式即为

$$z = A(\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

根据欧拉公式

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

则前式可改写成

$$z = A e^{j\omega t}$$

如前所述,任一简谐振动都可用一个旋转矢量在直角坐标轴上的投影来表示。因此,同样可用一个复数旋转矢量在复平面的实轴或虚轴上的投影来表示一个简谐振动。也就是说,可以用复数来表示简谐振动,即:

曾越粵藻

式中符号 隔在表示取复数 在的虚数部分(当然 ,也可以取复数 在的实数部分来表示简谐振动 ,只不过此时的简谐振动是用余弦函数表示而已)。为了书写方便 ,今后对复数 粵藻不作特别说明时 ,即表示取其虚数部分 ,这样可省略符号 隔。

所以 ,简谐振动的复数表达式是 :

$$\text{曾越粵藻} \quad (1.12)$$

若初相位不为零 ,则上式应改写成 :

$$\text{曾越粵藻} \cdot \text{藻越粵藻} \quad (1.13)$$

式中 :粵越粵藻 称为复振幅。

简谐振动的速度和加速度也可用复数表示

$$\text{曾越粵藻} \quad (1.14)$$

$$\text{曾越粵藻} \cdot \text{藻越粵藻} \quad (1.15)$$

$$\text{曾越原粵藻} \cdot \text{藻越粵藻} \quad (1.16)$$

将以上结果画在复平面上 ,可得以如图 1.11 所示的相互关系。

可以看出 ,对复数 粵藻 每求导一次 ,则相当于在它前面乘上一个 蚤 ,而每乘上一个 蚤 就相当于把这个复数旋转矢量逆时针旋转  $\frac{\pi}{2}$ 。这就给运算带来一定的方便。

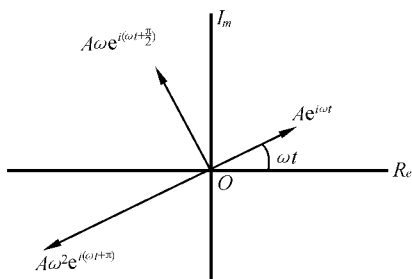


图 1.11 简谐振动位移、速度、加速度在复平面上的相互关系

简谐振动的合成

在实际的振动系统中 ,往往同时遇到几个简谐振动叠加的情况 ,因此有必要研究简谐振动的合成。现根据不同的情况分别讨论如下 :

同方向上两个简谐振动的合成

所谓同方向上的简谐振动 ,是指两个振动方向在同一直线方向上。由于这两个振动同时发生 ,最终表现出的振动形式就是它们综合的结果。

当两个简谐振动的频率相同时 ,可设这两个简谐振动的复数表达式为

$$\begin{cases} \text{曾越粵藻} \\ \text{曾越粵藻} \end{cases}$$

这是两个复数旋转矢量 ,根据矢量相加的原理 ,它们的和(即合成振动)为

$$\begin{aligned} &\text{曾越曾垣曾} \\ &\text{越粵藻} \cdot \text{垣粵藻} \\ &\text{越}[(\text{曾垣曾}) \cdot \text{垣粵藻}] \end{aligned}$$

设复数

$$\text{曾越粵藻} \cdot \text{垣粵藻}$$

式中 :

$$\text{合成振动振幅 } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi}$$

$$\text{合成振动初相位 } \alpha = \arctan \frac{A_2\sin\varphi}{A_1 + A_2\cos\varphi}$$

(员源)

由此可见,合成振动仍然是一个简谐振动,其频率与原来分振动的频率相同。合成振动的振幅决定于分振动的振幅及其相位差,两个分振动同相时,相位差  $\varphi = 0$ ,则合成振动振幅等于两个分振动的振幅和;两个分振动反相时,相位差  $\varphi = \pi$ ,则合成振幅等于两个分振动的振幅差。

当两个简谐振动的频率不同时,问题就比较复杂,因为这时两个振动的相位差本身也成了时间的函数。

设  $t = 0$  时,两个分振动的相位差为  $\theta$ 。

则在时间为  $t$  时,两个分振动的相位差可用下式表示:

$$\varphi = (\omega_1 - \omega_2)t + \theta = \Delta\omega \cdot t + \theta$$

式中  $\omega_1, \omega_2$ ——两个分振动的频率;

$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ , 为两个分振动的频率差。

这时,仍可应用前面的推导结果,但必须把  $\varphi$  看成是一个变量。根据(员源)式可得

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\omega t + \theta)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\omega t}$$

(员源)

由此可见,合成振动的振幅  $A$  是时间  $t$  的周期函数,它将以  $\Delta\omega$  作为频率,在  $A_1 - A_2$  至  $A_1 + A_2$  的范围内变动。若两个分振动的振幅相差较大,则合成振动的振幅中总是由振幅大的一个分振动占主导地位,而振幅小的分振动则只能使前者产生一些畸变。若两个分振动的振幅相差不大,那么合成振幅按一定频率时而增大、时而减小的现象就十分明显。振幅的这种变化的现象称为“拍”(beat),如图 员源所示。振幅从一个最小值通过最大值再到下一个最小值的时间是拍的周期  $T_{拍}$ ,其倒数就称为拍频,拍频就等于两个振动的频率之差。

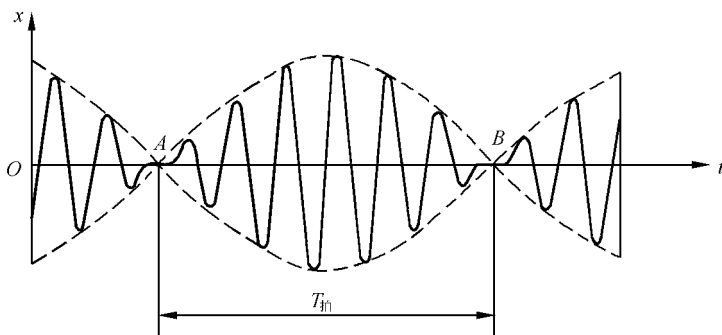


图 员源 拍

只有两个分振动的频率之比是有理数时,合成振动才可能是周期振动,它的周期就是两个分振动周期的最小公倍数。如果两个分振动的频率比是无理数,那么它们的周期就不可能找到最小公倍数,合成振动就不会是周期性运动。

圆 互相垂直方向上两个简谐振动的合成

当一个质点在同一平面上互相垂直的两个方向同时产生简谐振动时,要研究该质点的综合运动形式,就要将这两个简谐振动合成起来。

设该质点在  $x$  和  $y$  这两个互相垂直的方向上所作的简谐振动用下式表示

$$\left. \begin{aligned} x &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

将上式展开,并进行消去参数  $t$  的运算,得出  $x$  与  $y$  的函数关系如下

$$\frac{x^2}{A_1^2} - \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2)$$

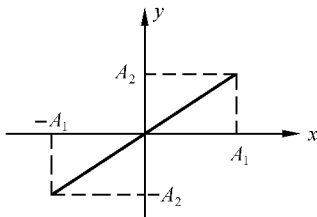
上式一般表示一个斜的椭圆,但随着相角的差与振幅的不同,可以退化为直线或正圆。

例如,当  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$  时,式(2)变成

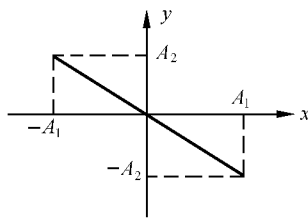
$$\frac{x^2}{A_1^2} - \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0$$

即

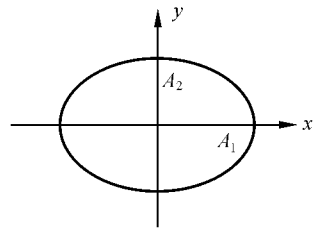
$$\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} = 0$$



(a)



(b)



(c)

图 1 简谐振动的合成

显然,这就是图(a)所示的直线。

若  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ , 则式(2)变成

$$\frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} = 0$$

这是图(b)所示的直线。

若  $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  或  $\frac{3\pi}{2}$ , 则式(2)变成

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

这就是图(c)所示的正椭圆。

这时,如果  $A_1 = A_2$ , 则质点轨迹就是一个圆。

当两个方向上的振动频率  $\omega_1$  与  $\omega_2$  不同时,质点的振动轨迹就极为复杂,这些轨迹(包括  $\omega_1$  与  $\omega_2$  相同的情况)统称为李沙如图(李沙如图)。

在振动试验中可将  $x$  和  $y$  方向上的两个振动信号分别输送到阴极示波器的  $x$  和  $y$  轴,在荧光屏上就会得到这两个互相垂直的简谐振动合成的图形——李沙如图。和同方向简谐振动

合成一样,只有当  $\omega_{\text{圆}}$  与  $\omega_{\text{圆}}$  的比例是有理数时,所得到的李沙如图才是封闭的。在振动试验中可以利用李沙如图来判断 曾赠方向的频率比,即根据李沙如图水平线及垂直线切点的个数之比,来判断两个方向上分振动的频率比。在图 员源葬中,水平方向有 圆个切点,垂直方向有 猿个切点,故两个方向上分振动的频率比就是切点数的反比。这就是说,水平方向与垂直方向的频率比是 猿圆 而在图 员源遭中,水平方向的频率是垂直方向频率的  $\frac{\text{圆}}{\text{猿}}$  因此,若一个方向上的频率已知,则另一个方向的频率就可根据李沙如图推算出来。

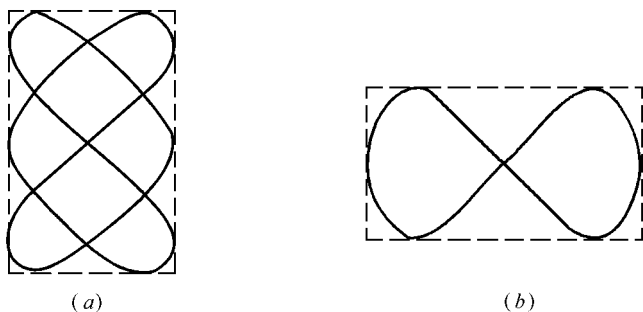


图 员源 李沙如图

### 三、非简谐周期振动的谐波分析

在研究机械振动时,常会遇到位移某些参量的变化具有周期性,但又不是简单的简谐运动,即是一种非简谐的周期运动,其位移、速度和加速度都不一定是简谐的。此外,在激振时,激振力也往往不是简谐的,有时就要用脉冲方波或三角波来激振。对于这些非简谐的周期运动,常常需要将它分解成一系列的简谐振动的叠加,这就需要应用富里哀级数的理论。

在数学理论上,把一个周期函数展开成一个富里哀级数,亦即展开成一系列的简谐函数之和,称为“谐波分析”。把这种谐波分析法用于振动理论,就可以把一个周期振动分解为一系列简谐振动的叠加。

设有一个周期振动函数  $y(t)$ ,它的周期为  $T$  展开成富里哀级数为

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) \quad (1.4.1)$$

摇摇式中

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  称为基频

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\pi} \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

因为两个频率相同的简谐振动可以合成为一个简谐振动,即

$$A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

式中

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

因此,式(1)也可以写成

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\pi} \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \quad (1)$$

上式中,第一项是常数,对振动没有影响,第二项 $A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$ 的频率与非简谐周期振动的原频率 $\omega_0$ 相同,故这一项称为基本谐波或第一谐波,频率等于原函数频率两倍的第三项 $A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2)$ 称为第二谐波;……频率等于原函数频率 $k$ 倍的第 $k$ 项 $A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$ 称为第 $k$ 谐波。

为了使谐波分析形象化,可以把 $A_k$ 和 $\varphi_k$ 与 $\omega$ 之间的变化关系用图形来表示,如图1所示。因为只是在 $\omega = k\omega_0$ 各点, $A_k$ 和 $\varphi_k$ 才有一定的数值,所以图形是一组离散的垂线。这种图形称为离散频谱。周期振动的频谱均为离散频谱,频谱图上每一根竖线代表一个谐波分量。

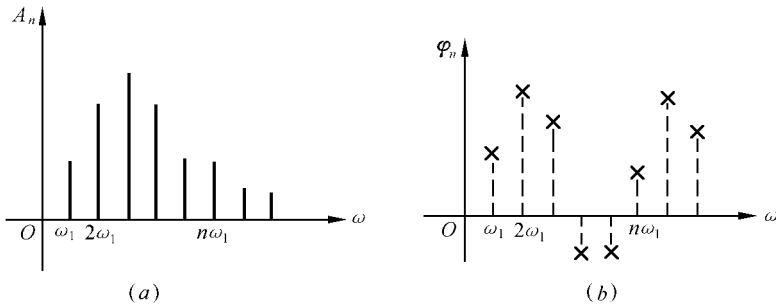


图1 离散频谱图

例如,某一个非简谐周期振动

$$x = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2)$$

可分解为 $A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$ 及 $A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2)$ 两个简谐振动的叠加,其时间历程(以时间为横坐标,以振动位移为纵坐标所作的线图)如图2所示。因为这一周期振动只有两个谐波分量,故其频谱图上只有两条竖线(见图3)。

三角波与脉冲方波是振动研究中常遇到的周期波形,现分别对他们进行谐波分析。

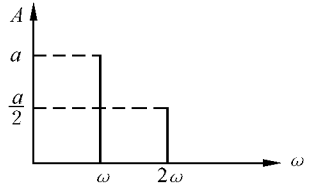
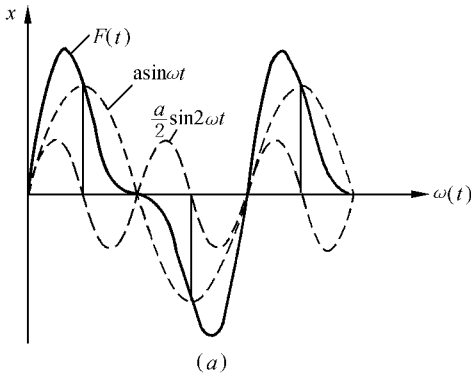


图 15-15 非简谐周期振动及其频谱图

例 15-1 已知一个三角波(见图 15-16)的函数表达式为

$$F(\omega) = \begin{cases} \omega & 0 \leq \omega < \pi \\ \pi - \omega & \pi \leq \omega < 2\pi \end{cases}$$

试将  $F(\omega)$  在  $[0, 2\pi]$  区间展开为富里哀级数。

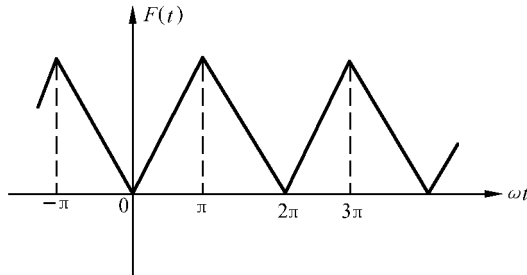


图 15-16 三角波

解

$$F(\omega) = \frac{\omega}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \omega \cos n\omega d\omega + \int_{\pi}^{2\pi} (\pi - \omega) \cos n\omega d\omega \right\} + \frac{\omega}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \omega \sin n\omega d\omega + \int_{\pi}^{2\pi} (\pi - \omega) \sin n\omega d\omega \right\}$$

$$= \frac{\omega}{\pi} \left[ \frac{1}{n^2} (\cos n\omega) \right]_0^{\pi} + \frac{\omega}{\pi} \left[ \frac{1}{n^2} (\cos n\omega) \right]_{\pi}^{2\pi} + \frac{\omega}{\pi} \left[ \frac{1}{n} (\sin n\omega) \right]_0^{\pi} + \frac{\omega}{\pi} \left[ \frac{1}{n} (\sin n\omega) \right]_{\pi}^{2\pi}$$

当  $n$  是奇数时  $\cos n\pi = -1$  则  $\frac{1}{n^2} (\cos n\omega) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n^2} (-1 - 1) = -\frac{2}{n^2}$

当  $n$  是偶数时  $\cos n\pi = 1$  则  $\frac{1}{n^2} (\cos n\omega) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n^2} (1 - 1) = 0$