第一章　绪　　论

机械控制工程是研究控制论在机械工程中应用的科学。它是一门跨控制论和机械工程的边缘学科。随着工业生产和科学技术的不断向前发展，机械工程控制论这门新兴学科越来越为人们所重视。原因是它不仅能满足今天自动化技术高度发展的需要，同时也与信息科学和系统科学紧密相关，更重要的是它提供了辩证的系统分析方法，即不但从局部，而且从整体上认识和分析机械系统，改进和完善机械系统，以满足科技发展和工业生产的实际需要。

1.1　机械工程控制论的基本含义

1.1.1　控制论概述

控制论、相对论和量子论被称为 20世纪上半叶的三项科学革命，也是人类认识客观世界的三大飞跃。控制论是自动控制、电子技术、计算机科学等多种学科相互渗透的产物,是在 20 世纪 40 年代酝酿形成的。它抓住当时二战期间一切通信系统和控制系统的共同特点，形成了控制论的中心思想：通过信息的传递、加工处理和反馈来进行控制。1948 年,N·维纳发表了著名的《控制论》,基本上形成了经典控制理论。1954 年,我国科学家钱学森在美国运用控制论的思想和方法，首创了工程控制论，把控制论推广到工程技术领域，奠定了工程控制论这一技术科学的基础。不久又相继出现了生物控制论、经济控制论和社会控制论，控制论在建立后很短时期内便迅速渗透到许多科学技术领域，极大地推动了近代科学技术的发展。

按照自动控制技术发展的不同阶段，控制理论分为两大部分：经典控制理论和现代控制理论。经典控制理论以传递函数为基础，主要研究单输入－单输出系统的分析和控制问题。现代控制理论是在经典控制理论的基础上，于 20世纪 60 年代后发展起来的。它是以状态空间分析法为基础，主要分析和研究多输入－多输出、时变、非线性等系统的最优控制问题。近年来，随着计算机技术和现代应用数学的迅速发展，现代控制理论在最佳滤波、系统辨识、自适应控制、智能控制等方面又有重大进展。

1.1.2　机械工程控制论的研究对象与任务

机械工程控制论的研究对象是机械工程技术中广义系统的动力学问题。具体地讲，机械工程控制论是研究系统及其输入、输出三者之间的动态关系,也就是研究机械工程广义系统在一定的外界条件作用下,从系统的一定初始条件出发,所经历由内部的固有特性所决定的整个动态历程。例如，在机床数控技术中，调整到一定状态的数控机床就是系统,数控指令就是输入,数控机床的加工运动就是输出。这里系统是由相互联系、相互作

用的若干部分构成且有一定运动规律的一个有机整体。输入是外界对系统的作用，输出是系统对外界的作用。通常机械工程控制论简称为机械控制工程，其所研究的系统可大可小、可繁可简，完全由研究的需要而定，因而称之为广义系统。

由此可见，就系统及其输入、输出三者之间的动态关系而言，机械工程控制论的任务主要研究解决以下几个方面的问题：

(1) 当系统已定，输入已知时，求出系统的输出(响应)，并通过输出来研究系统本身的有关问题，称系统分析。

(2) 当系统已定，系统的输出也已给定时，要确定系统的输入，使输出尽可能符合给定的最佳要求，称系统的最优控制。

(3) 当输入已知输出也给定时，要确定系统，使其输出尽可能符合给定的最佳要求，称最优设计。

(4) 当输入和输出均已知时，求系统的结构与参数，即建立系统的数学模型，称系统辨识或系统识别。

(5) 当系统已定输出已知时，要识别输入或输入中的有关信息，称滤波与预测。

从本质上看，问题(1)是已知系统与输入求输出，问题(2)和(5)是已知系统与输出求输入，问题(3)和(4)是已知输入与输出求系统。

本书主要是以经典控制理论来研究问题(1)，即通过已知系统与输入求输出，来进行系统分析方面的问题研究。

1.1.3 反馈及反馈控制

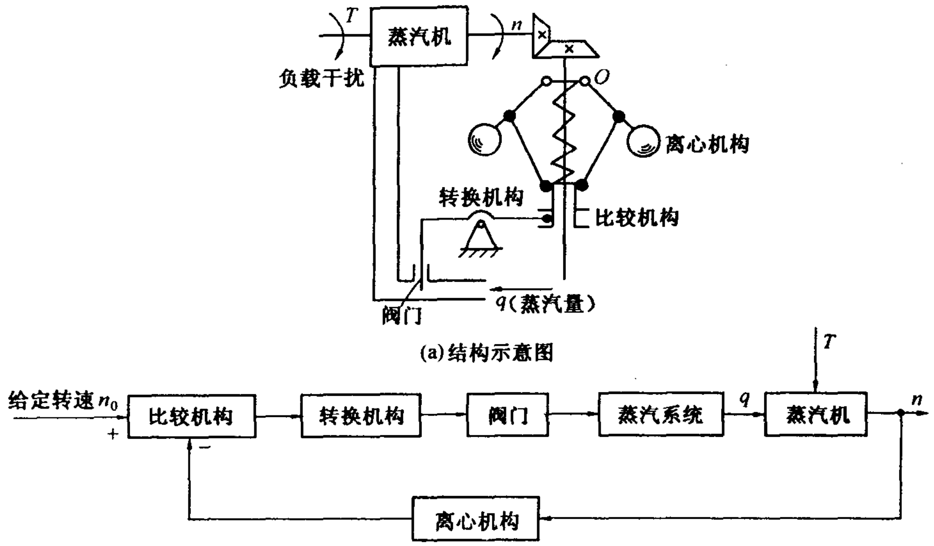
控制论的核心内容是：通过信息的传递、加工处理和反馈来进行控制。控制论把一切能表达一定含义的信号、符号、密码和消息等统称为信息。所谓信息传递，是指信息在系统及过程中以某种关系动态地传递，亦称转换。例如，对于机床加工工艺系统，要研究机床的加工精度问题，可将工件尺寸作为信息，通过工艺过程的转换，对加工前后工件尺寸的分布情况，运用信息处理的理论和方法来进行研究。

机械控制工程中一个最基本、最重要的概念就是反馈。将系统的输出全部或部分地返送回系统的输入端，并与输入信号共同作用于系统的过程，称为反馈或信息反馈。如果反馈回去的信号与系统的输入信号方向相反，称之为负反馈；如果方向相同，则称之为正反馈。

在工程技术领域中，随着自动化程度的提高，广泛地采用自动控制系统。在自动控制系统中，通常存在着反馈控制。所谓反馈控制就是利用反馈信号对系统进行控制。下面以机械动力学的典型实例：蒸汽机离心调速器调速系统（如图 1.1所示)，来对反馈控制加以说明。

如图 1.1(a)所示，离心调速器由离心机构、比较机构和转换机构等部分组成。对调速系统的调节要求是：调节进入蒸汽机的蒸汽量 q，使蒸汽机在不同的工作负载 T 时，输出转速 n 保持不变。调速过程为当外界负荷变化使 T 减小时，因为蒸汽带入的功率不变，输出转速 n 将上升；n 上升后，离心机构以 O 点为支点进一步张开，比较机构的滑套上升，带动转换机构的杠杆，将调节阀的阀门关小，q 随之下降，使 n 降低逐渐趋向原给定值。显然，蒸汽机的输出转速 n 是通过离心调速器，根据转速 n 变化后调节蒸汽量 q 的大小来使

其回复给定值的，这就是转速 n 本身的反馈控制。



(a)结构示意图

(b)调速原理图

图 1.1　蒸汽机离心调速器调速系统

图 1.1(b) 所示为调速系统的原理框图。由图可见，在这里反馈信息为实际转速 n,经与给定转速 n_0 相比较形成一个闭环系统。通常人们利用反馈控制原理在机械系统或过程中加上一个人为的反馈，构成一个自动控制系统，这种反馈称为外反馈。离心调速器就是人为加上的反馈控制装置，目的在于抵抗负荷变化所引起的输出转速的变化。但是，在许多机械系统或过程中，往往存在相互耦合作用形成非人为的“内在”反馈,从而构成一个闭环系统,这种反馈称为内反馈。例如,机械系统中作用力与反作用力的相互耦合,从而形成内在反馈。又如在切削过程中自激振动的产生，也必是存在内在的反馈使能量在内部循环,促使振动持续进行。因而,许多机械系统从表面上看是开环系统,没有人为加上反馈控制，但经过分析可以发现它们实质上都是闭环系统。机械系统或过程中广泛存在着内反馈或外反馈，这里要注意必须是从动力学而不是静力学的观点，从系统而不是孤立的观点进行分析，才能揭示系统或过程的本质。

1.2　控制系统的工作原理与组成

1.2.1　工作原理

所谓控制系统，是指系统的输出能按照要求的参考输入或控制输入进行调节的系统。下面以水箱液位控制为例，分析人工控制和自动控制的控制过程。图 1.2 为人工控制水箱液位的示意图。人工控制的任务是克服水箱出水口扰动量 Q_2 变化,保持水箱液位恒定。操作人员可以通过改变进水阀门的开口度，控制进水量 Q_1,达到控制水箱液位的目的。人工调节过程可归纳如下：

(1) 操作者观察液位的高度或液位计的读数，这是人眼的功能。

(2) 将实际的液位高度与给定液位高度进行比较，得出液位偏离给定值的大小和方向，这是人脑的功能。

(3) 根据偏差值的大小和方向，再控制进水阀门的开口度，改变进水量，这是人手的功能。

由此可见，人工控制过程就是观测、求偏差及纠正偏差的过程。简言之为“求偏与纠偏”的过程。如果将上述人工控制过程中操作人员的作用由自动控制器来代替，一个人工调节的系统就变成一个自动控制系统。

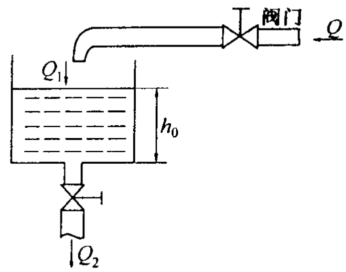


图 1.2　水箱液位的人工控制

图 1.3所示为水箱液位的自动控制系统。在这个自动控制系统中，用浮子作为测量元件代替人眼，用电位计作为比较器代替人脑，用放大器、电机及减速器作为驱动环节代替人手。水箱液位的自动控制过程为：当电位器的电刷位于中点位置，其输出电压为 u_1 时，电动机不动，控制阀门有一定开口度，水箱中进水量与出水量相等，液位保持在希望值上。一旦进水量 Q_1 或出水量 Q_2 发生变化，例如液面上升时，浮子位置也相应升高，通过杠杆作用电位器电刷从中点位置下移至 u_2，从而给电动机提供一定的控制电压 $\triangle u = u_1 - u_2$，驱动电动机及减速器减小阀门开口度，使水箱的进水量减少。水箱液面开始下降，浮子位置也相应下降，直至偏差 $\triangle u = 0$，电位器电刷回到中点位置，系统重新处于平衡位置，液面恢复给定高度。反之，若水箱液位下降，则系统会自动增大阀门开口度，加大进水量，使液位上升到给定高度。

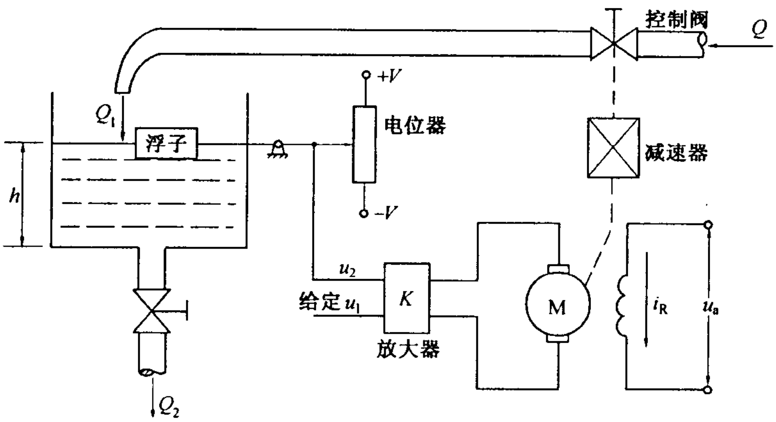


图 1.3　液位自动控制系统示意图

由此可见，控制系统的工作原理可以归纳如下：

(1) 检测被控制量或输出量的实际值。

(2) 将实际值与给定值进行比较得出偏差值。

(3) 用偏差值产生控制调节作用去消除偏差。

这种基于反馈原理，通过检测偏差再纠正偏差的系统称为反馈控制系统或闭环控制系统。通常反馈控制系统至少具备测量、比较和执行三个基本功能。

液位自动控制系统方框图如图 1.4所示。图中箭头表示信号作用的方向，“$\otimes$”代表比较元件，每一个方框代表一个环节。每个环节的作用是单向的，且输出受输入控制。该图清

楚地说明了反馈控制的基本原理。可以说，反馈控制是实现自动控制最基本的方法。

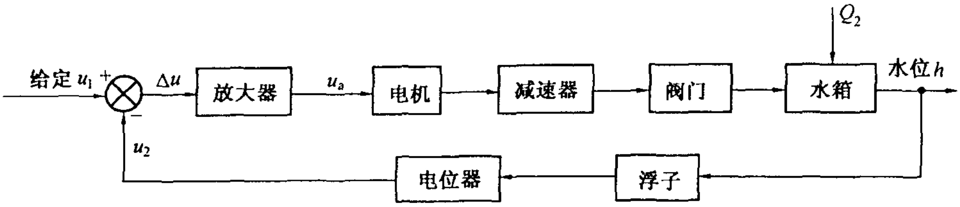


图 1.4　液位自动控制系统方框图

1.2.2　控制系统的组成

图 1.5所示为反馈控制系统的组成框图，通常称为闭环控制系统。由图可见，闭环控制系统一般由给定元件、反馈元件、比较元件、放大元件、执行元件及校正元件等单元组成。当一个控制系统的方框图中没有反馈回路时，称之为开环系统。开环系统较闭环系统简单，其系统组成中没有反馈元件和比较元件。

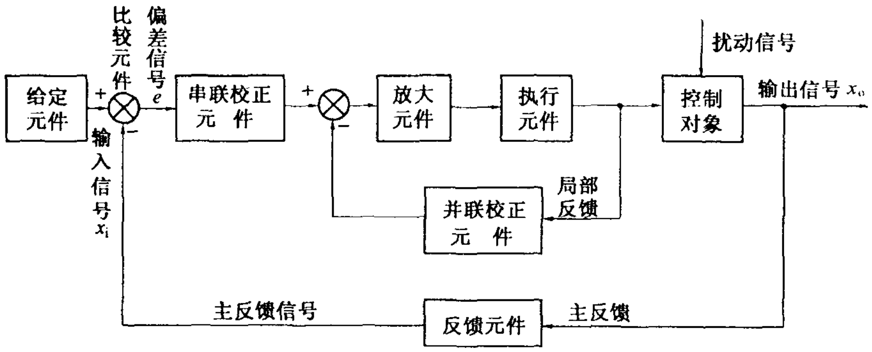


图 1.5　闭环控制系统的组成

(1) 给定元件。主要用于产生给定信号或输入信号。

反馈元件。测量被控制量或输出量，产生主反馈信号。反馈元件一般使用检测元件，为了便于传输，这些检测元件通常是用电量来测量非电量的一些元件。例如，用电位计或旋转变压器将位移或转角变换为电压信号；用热电偶将温度变换为电压信号；用光栅测量装置将直线位移变换为数字电信号等。

(3)
(2) 比较元件。用来接收输入信号和反馈信号并进行比较，产生反映两者差值的偏差信号。

(4) 放大元件。对较弱的偏差信号进行放大以推动执行元件动作。放大元件有电气的、液压的和机械的等等。

(5) 执行元件。直接对被控对象进行操纵的元件，例如伺服电动机、液压马达及伺服液压缸等。

(6) 校正元件。校正元件不是反馈控制系统所必须具有的，它是为了改善系统控制性能而加入系统中的元件。校正元件又称校正装置。串联在系统前向通道上的校正装置称为串联校正装置，并接在反馈回路上的称为并联校正装置。

以上介绍了控制系统的工作原理和基本组成。下面将常用的控制系统的一些基本概念和名词术语归纳如下：

(1) 控制对象。在控制理论和控制技术中,运动规律或状态需要控制的装置称为控制对象或被控对象。

(2) 控制器。在控制系统中,被控对象以外的所有装置,统称为控制器。因此,控制系统可以说由控制器和控制对象两部分组成。

(3) 输入信号。又叫输入量、控制量或给定量。从广义上讲,输入信号是指输入到系统中的各种信号，包括对系统输出不利的扰动信号在内。一般来说，输入信号是指控制输出量变化规律的信号。

(4) 输出信号。又叫输出量、被控制量或被调节量。表征被控对象运动规律或状态的物理量。输出信号是输入信号作用的结果，因此，它的变化规律应与输入信号之间保持确定的关系。

(5) 反馈信号。它是输出信号经过反馈元件变换后加到输入端的信号。若反馈信号的符号与输入信号相同,称为正反馈 ;反之,称为负反馈。控制系统中的主反馈通常采用负反馈,以免系统失控。系统中的局部反馈,主要用于对系统进行校正等,以满足控制系统的性能要求。

(6) 偏差。系统的输入量与反馈量之差，即比较环节的输出。

(7) 误差信号。是指输出量的实际值与希望值之差，通常希望值是系统的输入量。这里需要注意，误差和偏差不是相同的概念，只有在单位反馈系统，即反馈信号等于输出信号的情况下，误差才等于偏差。

(8) 扰动信号。又叫干扰信号。扰动信号是指偶然的无法加以人为控制的信号。扰动信号也是一种输入信号，通常对系统的输出产生不利的影响。

(9) 自动控制。在无人直接参与的情况下，利用一组装置使被控对象的被控制量按预定的规律运动或变化的控制方式。

(10 自动控制系统。被控对象和参与实现被控制量自动控制的装置或元件的组合。

1.3 对控制系统的基本要求与分类

1.3.1 基本要求

自动控制系统应用的场合不同，对系统性能的要求也不同。但从控制工程的角度出发，对每个控制系统却有相同的基本要求，一般可归纳为稳定性、准确性和快速性。

1.稳定性

稳定性是保证控制系统正常工作的首要条件。因为控制系统中都包含储能元件，若系统参数匹配不当，就可能引起振荡。稳定性就是指系统动态过程的振荡倾向及其恢复平衡状态的能力。对于稳定性满足要求的系统，当输出量偏离平衡状态时，应能随着时间收敛并且最后回到初始的平衡状态。

2.准确性

准确性是指控制系统的控制精度，一般用稳态误差来衡量。所谓稳态误差是指以一定变化的输入信号作用于系统后，当调整过程结束趋于稳定时，输出量的实际值与期望值之间的误差值。准确性是衡量控制系统性能的重要指标。例如数控机床稳态误差愈小，加工精度就愈高。

3.快速性

快速性是指当系统的输出量与输入量之间产生偏差时，系统消除这种偏差的快慢程度。快速性是在系统稳定的前提下提出的，它是衡量控制系统性能的又一个重要指标。快速性好的系统，消除偏差的过渡过程时间短，因而就能复现快速变化的输入信号，并具有较好的动态性能。

在实际中,由于控制对象的具体情况不同,每类控制系统对稳定、准确、快速这三方面的要求各有侧重。例如,调速系统对稳定性要求较严格,而伺服系统对快速性要求较高。即使对于同一系统,稳、准、快也是相互制约的。提高快速性,可能会引起强烈振荡,降低了系统的稳定性 改善了稳定性,控制过程可能会过于迟缓,快速性甚至准确性都会变差。如何分析和解决这些矛盾，正是本课程所要讨论和学习的重要内容。

1.3.2 控制系统的分类

控制系统的种类很多，在实际中可以从不同的角度进行分类。

1.按输入量的变化规律进行分类

(1) 恒值控制系统

恒值控制系统的输入量是一个恒定值，一经给定，在运行过程中就不再改变（但可定期校准或更改输入量）。这种控制系统的任务是保证在任何扰动作用下系统的输出量为恒定 值 。

工业生产中的温度、压力、流量、液位等参数的控制,以及某些原动机的速度控制,机床的位置控制等均属此类控制。

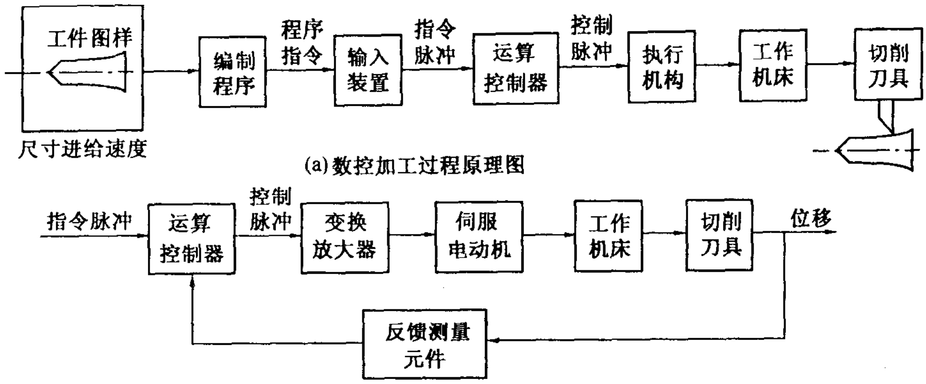
(2) 程序控制系统

这种控制系统的输入量不为恒定值，其变化规律是预先知道和确定的。可将输入量的变化规律预先编成程序，由程序发出控制指令，在输入装置中再将控制指令转换为控制信号，经过全系统的作用，使控制对象按照指令的要求运动。

图 1.6所示为一个数控机床切削加工的程序控制系统。将待加工的工件按图纸要求预先编制成加工程序，将程序指令通过输入装置送到数控装置进行计算，产生的控制脉冲使刀具和工件按程序指令的要求运动，这样就加工出所需工件的外形。

(3) 随动系统

随动系统又称伺服系统。这种控制系统输入量的变化规律是不能预先确定的。当系统的输入量发生变化时，要求输出量迅速平稳地随着输入量变化，并且能排除各种干扰因素的影响，准确地复现控制信号的变化规律。控制指令可以由操作者根据需要随时发出，也可以由目标物或相应的测量装置发出。如机械加工中的仿形机床，武器装备中的火炮自动瞄准系统以及导弹自动跟踪系统等均属于随动系统。



(a)数控加工过程原理图

(b)数控机床进给系统方框图

图 1.6　程序控制系统

2.按系统中传递信号的性质分类

(1) 连续控制系统

连续控制系统是指系统中各部分传递的信号都是连续时间变量的系统。连续控制系统又可分为线性系统和非线性系统。能用线性微分方程描述的系统称为线性系统，不能用线性微分方程描述、存在着非线性部件的系统称为非线性系统。

(2) 离散控制系统

离散控制系统是指系统中某一处或数处的信号是以脉冲序列或数字量传递的系统，又称数字控制系统。由于连续控制系统和离散控制系统的信号形式差别较大，因此在分析方法上有明显的不同。连续控制系统以微分方程来描述系统的运动状态，并用拉氏变换法求解微分方程；而离散控制系统则用差分方程来描述系统的运动状态，用 Z 变换法引出脉冲传递函数来研究系统的动态特性。

此外，还可以按描述系统的数学模型将控制系统分为线性控制系统和非线性控制系统；按系统部件的类型分为机电控制系统、液压控制系统、气动控制系统、电气控制系统等。

1.4　本课程的特点及学习方法

机械控制工程是一门技术基础课，它是利用控制论的原理和方法来解决机械工程问题的一门技术学科。机械工程中的机械设计与制造和机电一体化，其专业性都较强，涉及的实际问题也较复杂。本课程的学习是在数理基础课和专业课之间架起一座桥梁，并将两者紧密结合起来。在学习本课程之前，应有较好的数学、力学、电学基础知识，还要有一定的机械工程方面的专业知识。学好机械控制工程这门技术基础课，将为后续的专业课“数控机床”、“测试技术”、“智能机器人”、“机电传动及控制”等奠定理论基础。

由于本课程内容抽象、概括性强，而且涉及知识范围广，其理论基础几乎涉及机械类专业学生所学的全部数学知识。因而，学习本课程不必过分追求数学论证上的严密性，但应注意数学结论的准确性和物理概念的明晰性。既要抽象思维，又要注意联系专业，学会

用广义系统动力学来解决专业实际问题。为了获得更好的学习效果，还要重视实验，重视习题，要独立完成作业，这有助于基本概念的理解和基本方法的运用。

习　　题

1.1　控制论的中心思想是什么？

1.2　机械工程控制论的研究对象与任务是什么？

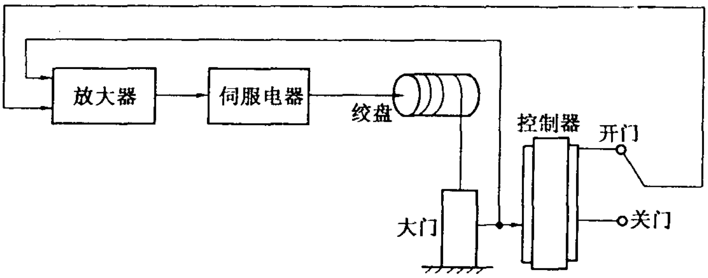
1.3　什么是反馈？什么是外反馈和内反馈？

1.4　反馈控制的概念是什么？为什么要进行反馈控制？

1.5　闭环控制系统的基本工作原理是什么？

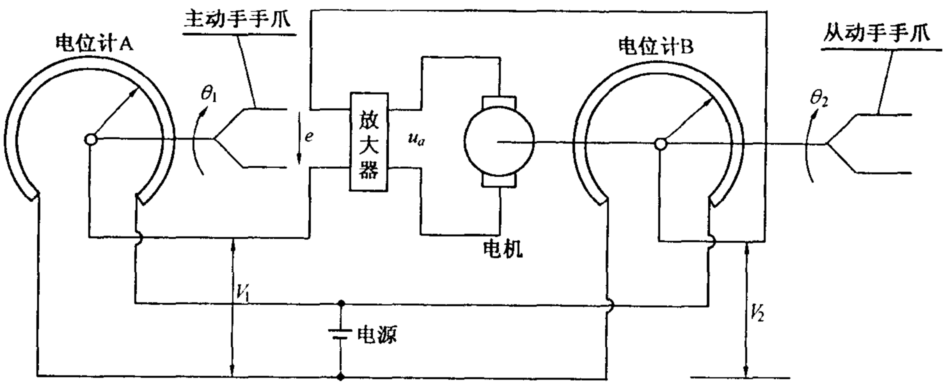
1.6　对控制系统的基本要求是什么？

1.7　某仓库大门自动控制系统的原理如题 1.7 图所示，试说明自动控制大门开启和关闭的工作原理，并画出系统方框图。



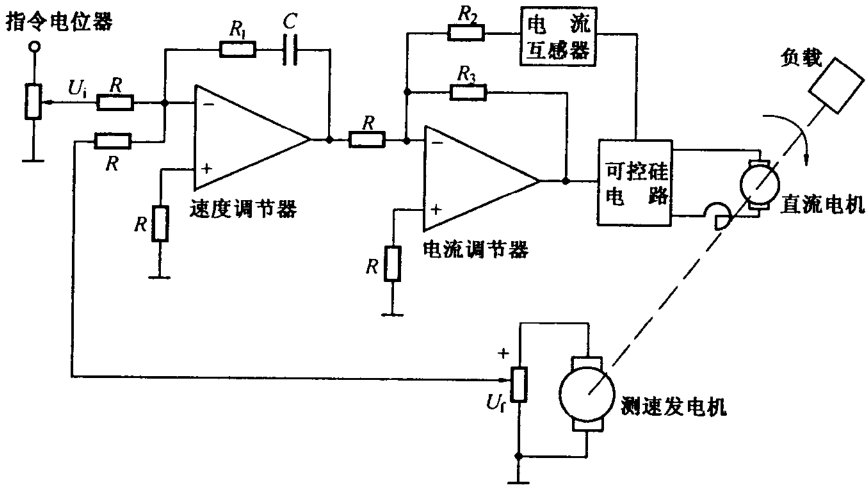
题 1.7图仓库大门控制系统原理图

1.8　远距离操作机器人的手臂工作原理如题 1.8 图所示,试简述其工作原理并画出系统方框图。



题 1.8图机器人手臂工作系统原理图

1.9　直流电动机双闭环调速系统的原理如题 1.9 图所示,试画出系统的方框图,并分析哪些装置起测量、比较、执行和校正作用。



题 1.9 图　直流电动机调速系统原理图

第二章　系统的数学模型

为了从理论上对控制系统的性能进行分析，首要的任务就是建立系统的数学模型。系统的数学模型是描述系统输入量、输出量以及内部各变量之间关系的数学表达式，它揭示了系统结构及其参数与其性能之间的内在关系。系统的数学模型有多种形式，这取决于变量与坐标的选择。在时域，数学模型一般采用微分方程或一阶微分方程组表示；在频域，则采用传递函数和频率特性来表示。

建立系统数学模型，通常采用解析法或实验法。解析法就是依据系统本身所遵循的有关物理定律列写数学表达式，在列写方程的过程中往往要进行必要的简化。实验法适用于较复杂的系统。当研究者对系统的构成、机理、信息传递等缺乏了解，无法用解析法建立系统的数学模型时，必须根据系统对某些典型输入信号的响应或其他实验数据建立系统的数学模型，这种用实验数据建立数学模型的方法也称为系统辨识。

应当指出，建立合理的数学模型，对于系统的分析和研究是极为重要的。因为在建模时，不可能将实际系统错综复杂的物理现象完全表达出来，所以要对模型的简洁性和精确性进行折中考虑。通常根据系统的实际结构参数及系统分析所要求的精度，忽略一些次要因素，建立反映系统内在本质特性的简化模型。本章主要讨论用解析法建立系统的数学模型。

2.1　系统的微分方程

微分方程是系统数学模型最基本的表达形式，利用它可以得到描述系统其他形式的数学模型。微分方程是在时域内描述系统或元件动态特性的数学表达式。通过求解微分方程，就可以获得系统在输入作用下的输出响应。

2.1.1　建立数学模型的基本步骤

用解析法列写系统或元件微分方程的基本步骤：

(1) 分析系统的工作原理和信号传递变换的过程，确定系统和各元件的输入、输出量。

(2) 从系统的输入端开始，按照信号传递变换过程，依据各变量所遵循的物理学定律，依次列写出各元件、部件的动态微分方程式。

(3) 消去中间变量，得到一个描述元件或系统输入、输出变量之间关系的微分方程式。

(4)写成标准形式。将与输入有关的项放在等式右侧，与输出有关的项放在等式的左侧，且各阶导数项按降幂排列。

2.1.2 系统微分方程的列写

1.机械系统

机械系统中各元件的运动有直线移动、转动或二者兼有。根据达朗贝尔原理：作用于每一个质点上的合力，同质点的惯性力形成平衡力系，用公式表示为

$$-m_i\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_i(t)+\sum f_i(t)=0$$

式中 $\sum f_i(t)$——作用在第 i 个质点上力的合力；

$-m_i\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_i(t)$—— 质量为 m_i 的第 i 个质点的惯性力。

(1) 机械移动系统

图2.1(a)所示的质量－弹簧－阻尼系统是典型的机械移动系统。图 2.1(b)表示初始状态重力 mg 与初始弹簧拉力 kx_0平衡，图 2.1(c)表示在外力 $f(t)$作用下，取质量 m 为分离体的受力分析。对该系统应用达朗贝尔原理，可列写其运动微分方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=f(t)$$

式中 m—— 质量，kg；

x—— 位移，m；

B—— 粘性阻尼系数，$\mathrm{N\cdot s\cdot m^{-1}}$；

k—— 弹簧常数，$\mathrm{N\cdot m^{-1}}$；

$f(t)$——外力，N。

一般 m、B、k均为常数，故机械移动系统的数学模型为二阶常系数线性微分方程，它描述了输入外力 $f(t)$ 与输出位移 x 之间的动态关系。通常方程的系数取决于系统的结构参数，而方程的阶次等于系统中独立储能元件的数量。

当质量 m 很小可忽略不计时，系统的运动方程变为一阶常系数微分方程

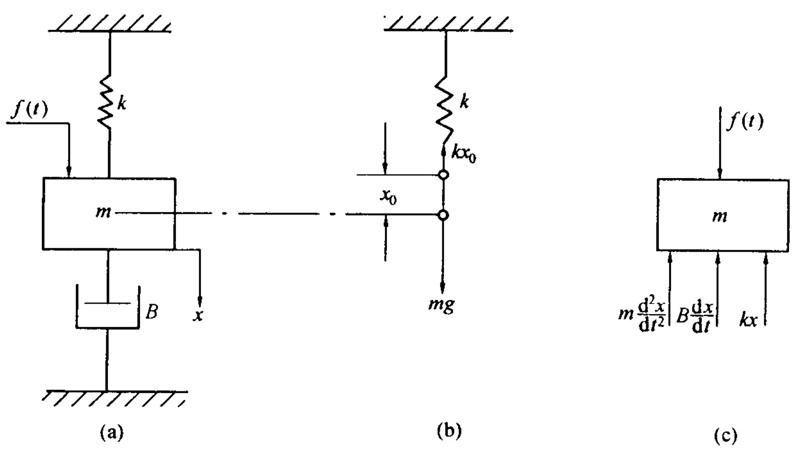


图 2.1 机械移动系统及受力分析

$$B\frac{dx}{dt}+kx=f(t)$$

由此可见，同一系统由于简化程度不同，可以有不同的数学模型。

(2) 机械转动系统

图 2.2所示为在扭矩 T 作用下的机械转动系统,系统包含有惯量、扭转弹簧、回转粘性阻尼。外加扭矩和转角间的微分方程为

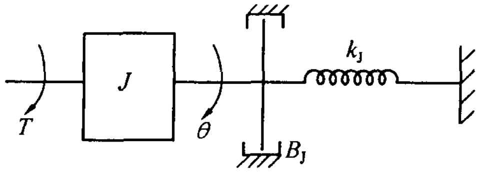


图 2.2　机械转动系统

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+B_J\frac{d\theta}{dt}+k_J\theta=T$$

式中　J——转动惯量,$N \cdot m^2$;

θ——转角,rad;

B_J——回转粘性阻尼系数,$N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}$;

k_J——扭转弹簧常数,$N \cdot m \cdot rad^{-1}$;

T——扭矩,$N \cdot m$。

2. 电网络系统

电阻 R、电感 L和电容器 C是电网络系统中的三个基本元件。电网络分析基础通常是根据基尔霍夫电流定律和电压定律写出微分方程式。

基尔霍夫电流定律是：若电路有分支，它就有节点，则汇聚到某节点的所有电流之代数和应等于零,即

$$\sum i(t)=0$$

即表示汇聚到节点 A 的电流的总和为零。

基尔霍夫电压定律是：电网络的闭合回路中电势的代数和等于沿回路的电压降的代数和,即

$$\sum E=\sum Ri$$

应用此定律对回路进行分析时，必须注意元件中电流的流向及元件两端电压的参考极性。

图 2.3为 RLC无源电网络,设输入端电压 $u_i(t)$ 为系统输入量,电容器 C两端电压 $u_o(t)$ 为系统的输出量，可按以下步骤建立此电网络的数学模型。

根据基尔霍夫定律,可以列出

$$u_i(t)=Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int i(t)dt$$

$$u_o(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt$$

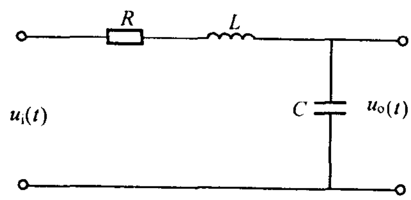


图 2.3　RLC无源电网络

消去中间变量 $i(t)$,整理得

$$LC\frac{d^2}{dt^2}u_o(t)+RC\frac{d}{dt}u_o(t)+u_o(t)=u_i(t)$$

一般 R、L、C 都是常数，则该电网络的数学模型为二阶常系数线性微分方程。若 $L=$

0，系统可简化为一阶常系数微分方程

$$RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{\mathrm{o}}(t)+u_{\mathrm{o}}(t)=u_{\mathrm{i}}(t)$$

从以上得出的机械系统和电网络系统的数学模型来看，物理本质不同的系统，可以有相似的数学模型。反过来，同一数学模型可以描述物理性质完全不同的系统。由此可以从控制理论的角度出发，抛开系统的物理属性，用同一方法进行普遍意义的分析研究。从动态特性上看，在相同形式的输入作用下，物理本质不同而数学模型相似的系统，其输出响应相似。这样就可以利用电网络系统来模拟其他难于实现的系统，进行实验研究。这种数学模型相似的系统称为相似系统，而在微分方程中占据相同位置的物理量称为相似量。

2.1.3　非线性数学模型的线性化

以上推导的系统数学模型都是线性微分方程。通常把由线性微分方程描述的系统称为线性系统。机械控制工程主要研究的就是线性系统。线性系统具有一个最重要的特点是可以运用叠加原理。当系统同时有多个输入时，可以对每个输入单独考虑，得到与每个输入对应的输出响应，把所有输出响应叠加起来，就会求得系统总的输出响应。这就给系统的分析研究带来了极大的方便，并且线性系统的理论已发展得相当成熟。

在实际工程中，纯粹的线性系统几乎不存在。这是因为组成系统的元件，都不同程度地存在非线性特征,导致系统成为非线性系统。例如,元件的不灵敏区,机械传动的间隙与摩擦,元件在大信号作用下的饱和性等。对非线性系统,工程上要进行线性化处理,称为非线性数学模型的线性化。所谓线性化，就是在一定的条件下作某种近似，或者缩小工作范围，从而将非线性微分方程近似地作为线性微分方程来处理。

线性化的方法，常用的称为小偏差法或切线法。只要变量的非线性函数在工作点处有导数或偏导数存在，就可以将非线性函数展开成泰勒级数，分解成这些变量在工作点附近的小增量的表达式，然后略去高于一次的小增量项，就可获得近似的线性函数。

对于以一个自变量作为输入量的非线性函数 $y=f(x)$,在平衡工作点(x_0,y_0)附近展开成泰勒级数,则有

$$y=f(x)=f(x_0)+\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}(x-x_0)+\frac{1}{2!}\left.\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2+\cdots$$

略去高于一次增量项，便得非线性系统的线性化方程为

$$y=f(x_0)+\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}(x-x_0)$$

写成增量方程,则为

$$y-y_0=\Delta y=K\Delta x$$

式中　$y_0=f(x_0)$—— 系统的静态方程;

$K=\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$;

$\triangle x=x-x_0$。

若输出变量 y 与两个输入变量 x_1、x_2 有非线性关系,即 $y=f(x_1,x_2)$,同样可以将方

程在工作点 (x_{10}, x_{20})附近展开成泰勒级数,并忽略二阶和高阶导数项,便可得到 y 的线性化方程为

$$y = f(x_{10}, x_{20}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_1 = x_{10} \\ x_2 = x_{20}}}(x_1 - x_{10}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_1 = x_{10} \\ x_2 = x_{20}}}(x_2 - x_{20})$$

写成增量方程,则为

$$y - y_0 = \Delta y = K_1 \Delta x_1 + K_2 \Delta x_2$$

式中　$y_0 = f(x_{10}, x_{20})$—— 系统静态方程;

$K_1 = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\substack{x_1 = x_{10} \\ x_2 = x_{20}}}$;

$K_2 = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_1 = x_{10} \\ x_2 = x_{20}}}$。

下面以滑阀控制油缸的液压伺服系统为例,来讨论液压系统数学模型的建立问题,其中涉及非线性数学模型的线性化问题。系统如图 2.4 所示,工作原理是:当阀心右移 x,即阀的开口量为 x 时,高压油进入油缸左腔(腔Ⅰ),低压油与右腔(腔 Ⅱ)连通,活塞推动负载右移 y。图中各符号意义为:q 为负载流量,在不计油的压缩和泄漏的情况下,即为进入或流出油缸的流量;$p = p_1 - p_2$为负载压降,即活塞两端单位面积上的压力差,它取决于负载;A 为活塞面积;B 为粘性阻尼系数。

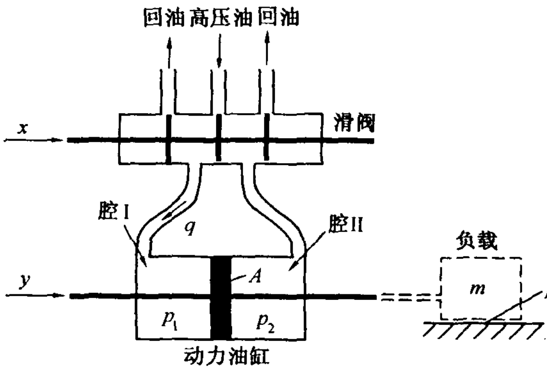


图 2.4　阀控油缸液压伺服系统

当阀开口为 x 时,高压油进入油缸左腔,若不计油的压缩和泄漏,流体连续方程为

$$q = A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

作用在活塞上力的平衡方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + B\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Ap$$

根据液体流经微小缝隙的流量特性,流量 q、压力 p 与阀的开口量 x 一般为非线性关系,即

$$q = q(x, p)$$

将该非线性方程在工作点(x_0, p_0)附近进行线性化处理,则得

$$q = q(x_0, p_0) + \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x = x_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial q}{\partial p}\right|_{p = p_0}(p - p_0)$$

设在零位时,$x_0 = 0, p_0 = 0, q(x_0, p_0) = 0$,则得

$$q = K_q x - K_c p$$

式中　$K_q = \left.\dfrac{\partial q}{\partial x}\right|_{x = x_0}$—— 流量增益,表示由阀心位移引起的流量变化;

$K_c = -\left.\frac{\partial q}{\partial p}\right|_{p=p_0}$——流量－压力系数,表示由压力变化引起的流量变化,因为随负载压力增大负载流量变小，故有一负号。

联立以上各式,得

$$p = \frac{1}{K_c}(K_q x - q) = \frac{1}{K_c}\left(K_q x - A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

将上式代人力平衡方程，整理即得该液压伺服系统经线性化后的数学模型，即

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \left(B + \frac{A^2}{K_c}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{AK_q}{K_c}x$$

2.2 拉氏变换与反变换

拉普拉斯变换（拉氏变换）是分析研究线性动态系统的数学基础。机械控制工程经常要涉及求解线性微分方程的问题，按照一般方法解算比较麻烦，如果用拉氏变换求解线性微分方程，就可将复杂的微积分运算转化为代数运算，使求解过程大为简化。更重要的是，利用拉氏变换可以方便地把描述系统运动状态的微分方程转换为系统的传递函数，并由此发展出用传递函数的零极点分布、频率特性等间接地分析和设计控制系统的工程方法。

2.2.1 拉氏变换的定义

若 $f(t)$为实变量 t的单值函数,且 $t<0$时$f(t)=0$, $t\geqslant 0$时 $f(t)$ 在任一有限区间上连续或分段连续,则函数 $f(t)$的拉氏变换定义为

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

式中,s为复变量,$s=\sigma+\mathrm{j}\omega$($\sigma$、$\omega$ 均为实数)；$F(s)$是函数 $f(t)$ 的拉氏变换,它是一个复变函数,通常称 $F(s)$为$f(t)$的象函数,而称 $f(t)$为 $F(s)$ 的原函数;L是表示进行拉氏变换的符号。

拉氏反变换为

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

式中,L^{-1} 表示进行拉氏反变换的符号。

由此可见，在一定条件下，拉氏变换能把一实数域中的实变函数 $f(t)$ 变换为一个在复数域内与之等价的复变函数 $F(s)$,反之亦然。

2.2.2 典型函数的拉氏变换

1. 单位阶跃函数(图 2.5)

单位阶跃函数的定义为

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geqslant 0 \end{cases}$$

单位阶跃函数的拉氏变换式为

$$L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = -\left.\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

2. 单位脉冲函数(图 2.6)

单位脉冲函数的定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

且有特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\mathrm{d}t = f(0)$$

$f(0)$ 为 $t = 0$时刻的函数 $f(t)$的值。

单位脉冲函数的拉氏变换式为

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \left.\mathrm{e}^{-st}\right|_{t=0} = 1$$

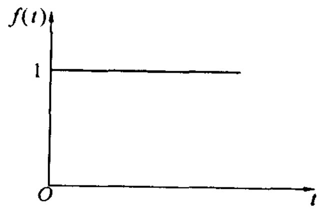


图 2.5　单位阶跃函数

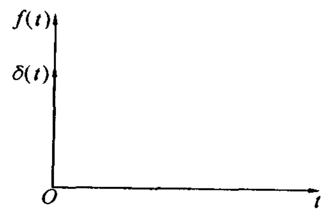


图 2.6　单位脉冲函数

3.单位斜坡函数(图 2.7)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geqslant 0 \end{cases}$$

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = -\left. t\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\mathrm{d}t = -\left.\frac{1}{s^2}\mathrm{e}^{-st}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}$$

4. 指数函数 e^{at} 图 2.8)

$$L[\mathrm{e}^{at}] = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(s-a)t}\mathrm{d}t = -\left.\frac{\mathrm{e}^{-(s-a)t}}{s-a}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

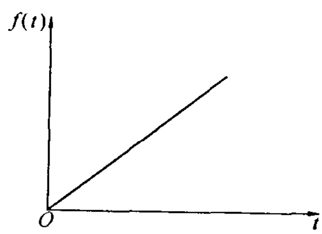


图 2.7　单位斜坡函数

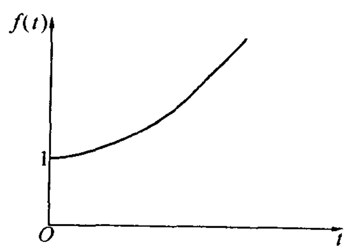


图 2.8　指数函数