

机械工程测试技术

杨仁逖 黄惟公 杨明伦 主编

重庆大学出版社

内 容 提 要

本教材共分八章,从测试信号的拾取与传输记录,信号的描述与分析处理,测试系统特性与信号传输中的抗干扰、工程对象测试四个方面,较为详细地讲述了机械工程测试技术中的基本理论,基本知识和基本技能。同时,为了便于教师组织教学,每章之后均配备有适量的习题与思考题,供教学中选用。

本教材可作为机械类、机电类专科,非机械类、非电类本科机械工程测试技术的教材,亦可供有关工程技术人员参考。

机 械 工 程 测 试 技 术

杨仁逖 黄惟公 杨明伦 主编

责任编辑:曾令维 韩 洁 版式设计:韩 洁

责任校对:任卓惠 责任印制:张永洋

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:张鸽盛

社址:重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内

邮编:400044

电话:(023)65102378 65105781

传真:(023)65103686 65105565

网址:<http://www.cqup.com.cn>

邮箱:fxk@cqup.com.cn(市场营销部)

全国新华书店经销

重庆大学建大印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:9 字数:224千

1997年6月第1版 2002年6月第2次印刷

印数:6001—9000

ISBN 7-5624-1451-3/TH·62 定价:10.00元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

版权所有 翻印必究

序

近年来我国高等专科教育发展很快,各校招收专科生的人数呈逐年上升趋势,但是专科教材颇为匮乏,专科教材建设工作进展迟缓,在一定程度上制约了专科教育的发展。在重庆大学出版社的倡议下,中国西部地区14所院校(云南工学院、贵州工学院、宁夏工学院、新疆工学院、陕西工学院、广西大学、广西工学院、兰州工业高等专科学校、昆明工学院、攀枝花大学、四川工业学院、四川轻化工学院、渝州大学、重庆大学)联合起来,编写、出版机类和电类专科教材,开创了一条出版系列教材的新路。这是一项有远见的战略决策,得到国家教委的肯定与支持。

质量是这套教材的生命。围绕提高系列教材质量,采取了一系列重要举措:

第一,组织数十名教学专家反复研究机类、电类三年制专科的培养目标和教学计划,根据高等工程专科教育的培养目标——培养技术应用型人才,确定了专科学生应该具备的知识和能力结构,据此制订了教学计划,提出了50门课程的编写书目。

第二,通过主编会议审定了50门课程的编写大纲,不过分强调每门课程自身的系统性和完整性,从系列教材的整体优化原则出发,理顺了各门课程之间的关系,既保证了各门课程的基本内容,又避免了重复和交叉。

第三,规定了编写系列专科教材应该遵循的原则:

1. 教材应与专科学生的知识、能力结构相适应,不要不切实际地拔高;
2. 基础理论课的教学应以“必须、够用”为度,所谓“必须”是指专科人才培养规格之所需,所谓“够用”是指满足后续课程之需要。
3. 根据专科的人才培养规格和人才的主要去向,确定专业课教材的内容,加强针对性和实用性;
4. 减少不必要的数理论证和数学推导;
5. 注意培养学生解决实际问题的能力,强化学生的工程意识;
6. 教材中应配备习题、复习思考题、实验指示书等,以方便组织教学;
7. 教材应做到概念准确,数据正确,文字叙述简明扼要,文、图配合适当。

第四,由出版社聘请学术水平高、教学经验丰富、责任心强的专家担任主审,严格把住每门教材的学术质量关。

出版系列专科教材堪称一项“浩大的工程”。经过一年多的艰苦努力,系列专科教材陆续面市了。它汇集了中国西部地区14所院校专科教育的办学经验,是

西部地区广大教师长期教学经验的结晶。

纵观这套教材, 具有如下的特色: 它符合我国国情, 符合专科教育的教学基本要求和教学规律; 正确处理了与本科教材、中专教材的分工, 具有很强的实用性; 与出版单科教材不同, 有计划地成套推出, 实现了整体优化。

这套教材立足于我国西部地区, 面向全国市场, 它的出版必将对繁荣我国的专科教育发挥积极的作用。这套教材可以作为大学专科及成人高校的教材, 也可作为大学本科非机类或非电类专业的教材, 亦可供有关工程技术人员参考。因此我不揣冒昧向广大读者推荐这套系列教材, 并希望通过教学实践后逐版修订, 使之日臻完善。

吴云鹏

1993年
仲夏

前 言

本书是高等工科院校机械类专科系列教材之一。本课程属于必修的技术基础课。

测试是人类认识客观世界的手段,是科学研究的基本方法。在工程技术领域内,工程研究、产品开发、生产监督、质量控制和性能试验等,都离不开测试技术。特别在自动控制中越来越多地依靠测试技术采集信息,所以测试技术已成为控制系统的重要组成部分。本书根据工程专科的教学特点,着重基本知识的介绍,基本原理的阐述和基本技能的训练,教材的编写切实体现少而精,由浅入深,立足应用的原则,以达到培养应用型技术人才的目的。

本课程所研究的对象是机械工程动态测试中常用的传感器,信号调理电路及记录仪器的工作原理,测试系统基本特性的评价,测试信号的分析 and 处理,以及几种常见机械参量的测试方法。全书大致可分为两部分:第一部分,一~六章,基本上按信号的获取、调理、记录、分析处理的流程编写,讨论了测试技术的一般问题;第二部分,七~八章,介绍一些机械参量的测试方法。在教学课时安排上,以讲授第一部分为主,第二部分可以选讲部分内容。

本书由杨仁逖、黄惟公、杨明伦担任主编。杨仁逖教授主持制定编写大纲并撰写绪论。黄惟公编写第一章第4节及第七、八章;渝洲大学杨明伦编写第一章第1~3节及第六章;余愚编写第二章及第五章;张捷编写第三章及第四章。全书由黄惟公副教授修改并统稿。

本书由重庆大学梁德沛教授主审。

在编写过程中,曾参考了兄弟院校的教材和资料,得到许多同仁的关心和帮助,谨致谢意。限于篇幅及编者的业务水平,在内容上若有局限性和欠妥之处,竭诚希望读者赐予宝贵的意见。

编者

1997年5月

绪 论

一、测试技术在机械工业发展中的作用

机械工业肩负着装备国民经济各个部门的任务,有责任为各行各业提供性能优异的机器和设备,诸如机床、精密机械、石油化工设备、轻纺机械、汽车拖拉机、车辆船舶以及兵器等等。为此,机械工业的技术改造在一定程度上应超前于其他部门,为其他行业奠定坚实的基础。面对上述任务,机械参量的动态测试技术显得特别重要。例如,由于机械加工精度和生产过程自动化水平的不断提高,机械加工过程已从单机自动化和生产自动线发展到柔性制造系统、计算机集成制造系统,并且逐步向无人化工厂过渡。显然,仅仅在工件加工完成以后进行测量已不能满足生产的需要。必须进一步对生产流程的全过程进行检测,并且还应采取诸如在线测试、安全监控、故障诊断以及自适应控制等技术。在自适应控制中,需将生产过程中必要的工艺参数及时检测出来,与所要求的数值相比,进行反馈并自动调节后,使生产过程在符合规定要求参数下工作,即用信息流来控制物质流和能量流。因此,先进的测试技术已成为现代生产系统中必不可少的起着感官作用的组成部分。

当前,空间技术、高能物理、大规模集成电路及机器人等高新技术的迅速发展,给机械工业部门提出了许多难度极大、条件苛刻的新课题。譬如,宇航飞行器、原子锅炉、生产大规模集成电路的机械装置及智能机器人等,它们要求具有很高的精度和运转时极高的可靠性,其元件必须具有很高的精度和优异的性能。这时测试技术就可以对这些设备及其元器件的质量和性能提供准确而客观的评价,为合理改进生产技术提供必不可少的基础数据,以指导设计和制造。不仅如此,测试技术还可以作为进行一切探索性、开发性和创造性的科学发现或技术发明的手段,可以断言,没有测试技术,就不会有科学上的进步。所以,测试技术是机械工业发展的一项重要基础技术,对从事机械工程的技术人员来说,必须掌握这一门学科。

二、信息、信号与测试技术的关系

测试包括测量和试验的全过程,是具有试验性质的测量。它是人们从客观事物中摄取所需要的信息,借以认识客观事物的本质,并掌握其内在联系和变化规律的一种科学方法。在测试过程中,需要选用专门的仪器设备,设计合理的实验系统和进行必要的数据处理,从而获得被测对象的有关信息的量值。所以,测试科学属于信息科学的范畴,又被称之为信息探测工程学。从物理学的观点来考虑,信息是物质所固有的,是其客观存在或运动状态的特征。然而它的传输却依赖于物质和能量。一般来说,信息的载体称为信号,而信息则蕴涵于信号之中。信息总是通过某些物理量的形式表现出来,这些物理量也就是信号。例如,单自由度的质量—弹簧系统的动态特性可以通过质量块的位移-时间关系来描述,质量块位移的时间历程这一信号所包含的该系统的固有频率和阻尼率等特征参数,就是人们所需要的信息。分析采集到的有

关信息,就可以掌握这一系统的动态特性。

根据信号变化的物理性质,可以将它分为非电信号和电信号。例如,随时间而变化的温度、力、位移和加速度等,属于非电信号;而随时间变化的电荷、电流、电压和磁通量等,则属于电信号。这两者可以借助于一定的装置相互转换。在测试过程中,常常将被测的非电信号通过传感器转换成电信号,以利于传输、放大、分析处理和显示记录等。

被测信号中携带着人们需要的有用信息,但也不同程度地混入了人们不感兴趣的无用信息,这些叠加在有用信息上的无用信息,通常称为干扰或噪声。各种电磁测量线路和测试装置在不同的环境中工作,不可避免地会侵入噪声而受到干扰。它对被测信号所产生的影响,最终将以误差的形式表现出来,导致测试的精确度降低,甚至难以进行正常的测试工作。因此,在噪声背景下提取有用信息,是测试工作者的任务之一。

三、本课程研究的对象和性质

随着科学技术的发展,从事机械设计与制造的工程技术人员,不仅需要掌握宏观上不随时间而变化的静态量的测量(诸如长度、角度、重量等),而且还要掌握日益增多的机械动态参量(诸如力、位移、振动、噪声及温度等)的测试。由于这些机械参量随时间而不断变化,因而沿用传统的计量器具已难以进行符合客观规律的测试,所以要尽量采用非电量电测法。对于高等学校机械工程各有关专业,本课程是一门技术基础课,它所研究的对象主要是机械工程中常见的动态参量的电测技术及有关基础理论。尽管它涉及的知识范围宽广,但由于教学时数所限和各课程之间的分工不同,教材中只讨论测试技术的理论基础和常见机械参量的测试方法及具体应用。

基础理论部分包括测试信号的描述和分析,测试装置的基本特性及信号传输中的抗干扰等问题。

信号分析一般采用时域分析法和频域分析法。时域分析法又可称为波形分析法,它是通过信号的幅值随时间而变化的波形图或数学表达式来求取任一时刻的瞬时值,或者是信号的峰值、均值和均方根值等。通过对信号的时域分析,可以研究信号的稳定分量和波动分量;在时域内对信号进行相关分析,可以了解信号自身或不同信号彼此之间的相似程度;研究信号在各个时刻的瞬时幅值的取值分布状态,可以知道信号幅值的取值概率和概率分布情况。频域分析法是以频率为横坐标来研究信号的幅值、相位等的分布,可得到相应的幅值谱、相位谱等,进而分析信号在频域内的特性,故又称之为信号的频谱分析法。通过对信号的频谱分析,可以从另一个方面提供更为丰富的有用信息,这是近代信息技术发展中的一个重要手段。

要想从被测对象中获取有关信息,必须借助于专门的设备——测试装置来实现。因此,应了解常用传感器、信号调理电路和记录仪器的工作原理和性能,并掌握它们的静态特性和动态特性的评价方法和不失真测试条件,以利于正确、合理地选用,并组成测试系统。信号在传输过程中会受到各种噪声的干扰,为保证信号的不失真传输,应采取有效的抗干扰措施。

本课程具有很强的实践性。因此,机械参量测试的具体应用部分中对力、力矩和位移的测试,分章予以论述,使初学者对动态测试技术的基本问题有一个完整的概念,并能初步用于机械工程中某些参量的测试。在学习过程中应紧密联系实际,加强实验环节的学习,弄清物理意义,才能获得有关动态测试技术的完整概念,才能初步具有处理实际测试工作的能力。

第一章 确定性信号的频域描述

信号中携带着人们所需要的有用信息。对信号进行分析,其目的是通过对信号的数学变换,改变信号的形式,使得便于识别、提取信号中有用的信息。把时域信号经过一定的数学处理,变换到频域上来描述,即进行频谱分析,是最常用的信号分析方法。

第一节 信号的分类

对实际信号,可以从不同的角度、不同的特征以及不同的使用目的进行分类。

一、确定性信号和非确定性信号

1. 确定性信号

能用确定的数学关系式来表达的信号称为确定性信号。

2. 非确定性信号(随机信号)

不能用确定的数学关系式来表达的信号称为非确定性信号。例如汽车在行使过程中的振动,随风摆动的树叶的振动,海浪的高低,其幅值的大小、最大幅值出现的时间等,均无法由公式来计算、预测,就是实际测量的结果每次也不相同,这种性质称为“随机性”,故也称这种非确定性信号为随机信号。

二、周期信号与非周期信号

确定性信号又可以分为周期信号和非周期信号。

1. 周期信号

若一个随时间变化的信号 $x(t)$,当满足关系式: $x(t) = x(t + nT)$ 时,称 $x(t)$ 为周期信号。其中: T ——周期信号的周期,单位:秒(sec); n ——周期信号的整周期数, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 。

2. 非周期信号

能用确定的数学关系式表达,但取值不具有周期性的信号称为非周期信号。指数信号,阶跃信号等都是非周期信号。

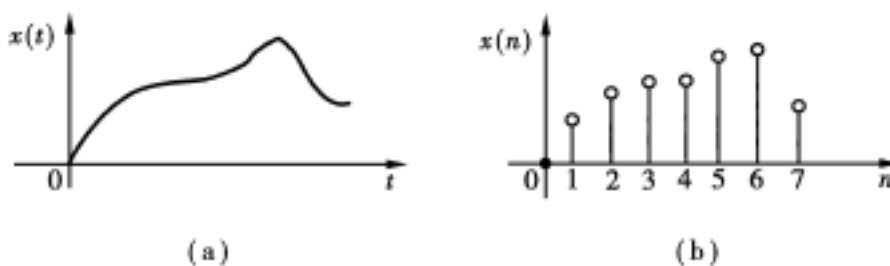


图 1-1 连续信号与数字信号

(a) 连续信号 (b) 数字信号

三、模拟信号与数字信号

随着计算机技术的应用,也可以从另一个角度把信号分为模拟信号和数字信号。

用连续变量的函数表示的信号称为模拟信号,如图 1-1(a)所示。如果信号变量和幅值都是离散的,称为数字信号,如图 1-1(b)。模拟信号若要用计算机进行分析,必须经模拟/数字转换器(A/D转换器)变为数字信号。

下面对时域内的模拟信号进行进一步的划分,其中本节未提到的内容将在以后的章节中讲述。

第二节 周期信号的频域描述

一、周期信号的三角函数展开式和频谱

最简单的周期信号是正弦信号

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) = A\sin(2\pi ft + \phi)$$

式中 A ——正弦信号的幅值;

ω ——正弦信号的圆频率(单位:rad/sec), f 称频率(单位:Hz);

ϕ ——正弦信号的相位(也称相角或初相角。单位:rad)。

如果正弦信号的周期为 T ,则它们之间的关系为:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

幅值、频率、相位是正弦信号的三要素,三者唯一地确定了正弦信号的形式。余弦信号 $\cos \omega t$ 与正弦信号 $\sin \omega t$ 只是相位相差 $\frac{\pi}{2}$,在信号分析中也可称为正弦信号。

1. 傅里叶级数

满足狄利克雷(Dirichlet)条件的周期信号,可在一个周期内用正弦函数和余弦函数表达成傅里叶级数的形式。即:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1-1)$$

式中 常值分量 $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$ (T 为周期信号的周期) (1-2)

显然,常值分量就是周期信号 $x(t)$ 的均值。

余弦分量的幅值 $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt$ (1-3)

正弦分量的幅值 $b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt$ (1-4)

经过数学变化, 傅里叶级数也可以表示成如下形式:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n) \quad (1-5a)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1-5b)$$

式中 $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ (1-6)

$$\varphi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} \quad (1-7)$$

$$\varphi_n = \frac{\pi}{2} - \varphi_n$$

此式具有更明确的物理意义, 它表明, 任何满足狄利克雷条件的周期信号, 均可在一个周期内表示成一个常值分量 a_0 和一系列正弦分量之和的形式。其中, $n=1$ 的那个正弦分量称为基波, 对应的频率 ω_0 称为该周期信号的基频, 其他正弦分量按 n 的数值, 分别称为 n 次谐波, 如 $\sin 2\omega_0 t$, $\sin 3\omega_0 t$ 和 $\sin 9\omega_0 t$ 分别称为二次谐波、三次谐波和九次谐波。

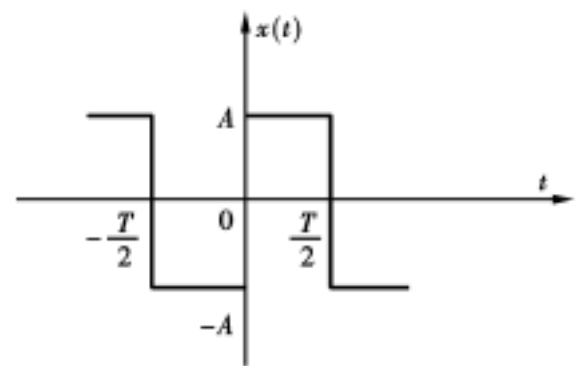


图 1-2 周期方波

2. 周期信号的频谱

以 $n\omega_0$ 为横坐标, 以 A_n 为纵坐标, 按 $n\omega_0 - A_n$ 的关系绘出的曲线图形称为周期信号的幅值频谱, 简称幅频谱。

以 $n\omega_0$ 为横坐标, 以 φ_n 为纵坐标, 按 $n\omega_0 - \varphi_n$ 的关系绘出的曲线图形称为周期信号的相位频谱图, 简称相频谱。

幅值频谱、相位频谱统称频谱。对信号进行数学变换, 获得频谱的过程称为信号的谱分析。

例 1 求如图 1-2 周期方波的频谱。

解 周期方波信号 $x(t)$ 在一个周期内可以表示为

$$x(t) = \begin{cases} -A & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ A & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

其常值分量, 从几何图形上很明显看出此周期方波的均值为 0;

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = 0$$

余弦分量的幅值因 $x(t)$ 是奇函数, 所以

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt = 0$$

正弦分量的幅值:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-A) \sin n_0 t dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (A) \sin n_0 t dt \\
 &= \frac{2A}{n} (1 - \cos n) \\
 &= \begin{cases} \frac{4A}{n} & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases}
 \end{aligned}$$

该方波的幅值为: $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + \left(\frac{4A}{n}\right)^2}$

$$= \frac{4A}{n} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

当 $n = 2, 4, 6, \dots$ 时, $A_n = 0$

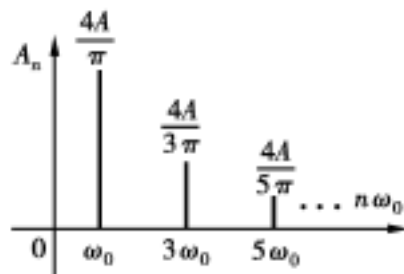
该方波的相位为: $\varphi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} = \arctan \left[\frac{\frac{4A}{n}}{0} \right]$

$$= \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

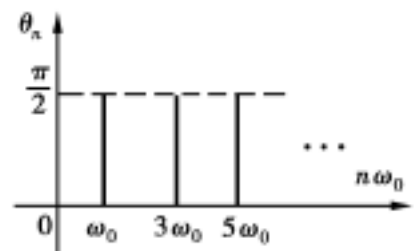
得到: $x(t) = \frac{4A}{\pi} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) +$

$$\frac{4A}{3\pi} \cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4A}{5\pi} \cos\left(5\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

+



(a)



(b)

图 1-3 周期方波的频谱图

(a) 幅值频谱 (b) 相位频谱

根据以上计算结果可作出该信号的幅值频谱和相位频谱,如图 1-3(a)和(b)所示。图上每条对应于某个频率值的直线称为谱线。

从上例可以看出,周期信号的频谱具有以下特点:

- 1) 离散性 即周期信号的频谱图上的谱线是离散的。
- 2) 谐波性 即周期信号的频谱图上的谱线只发生在基频 ω_0 的整数倍频率上。

3) 收敛性 从总体上来看,周期信号高次谐波的幅值具有随 n 的增加而呈衰减的趋势,因此,在频谱分析中可根据精度的需要决定谐波的次数。

频谱图上,每条谱线的高度反映了该信号中所对应频率分量的数值大小(包括幅值和相位),借此可以准确地了解信号中频率成分的组成,了解哪些频率成分占的比重,起主导作用,哪些频率成分占的比重小,其作用微弱等等,这在工程信号的分析中应用相当广泛。

周期信号经过傅里叶级数展开,得到它的频谱,这就完成了信号从时域到频域的转换。如图 1-4 所示,时域上的方波信号,从频域角度来观察,能看到的是一条条的谱线。

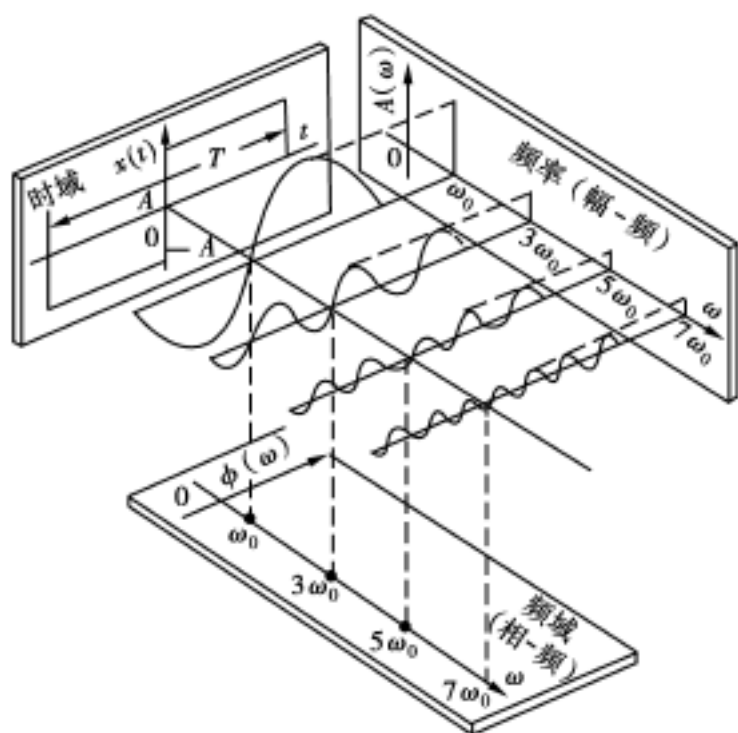


图 1-4 周期信号的时域、频域描述

然而在工程中,从这个角度的观察,往往可以比从时域角度观察获得更多的有用信息。此图中的相位频谱采用的是公式(1-5b),所以初相位都是 0。

二、周期信号的复指数展开式

为了进一步学习,还需要了解周期信号的复指数展开式。

由欧拉公式

$$e^{\pm j t} = \cos t \pm j \sin t$$

和

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{j t} + e^{-j t}) \quad (1-8)$$

$$\sin t = j \frac{1}{2}(e^{j t} - e^{-j t})$$

代入式(1-1)得:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - j b_n}{2} e^{j n \omega_0 t} + \frac{a_n + j b_n}{2} e^{-j n \omega_0 t} \right] \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1-9)$$

现令 $a_0 = c_0$ $c_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n)$ $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + j b_n)$

由公式(1-3)、(1-4)很容易推导出:

$$a_{-n} = a_n \quad b_n = -b_{-n}$$

$$\text{则} \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{2}(a_{-n} - jb_{-n})$$

$$\begin{aligned} \text{式(1-9) 可变为: } x(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cdot e^{jn_0 t} + c_{-n} \cdot e^{-jn_0 t}] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{jn_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \cdot e^{-jn_0 t} \end{aligned}$$

上式中变量 n 的取值与式(1-9) 相同, 若将上式中的第三项变量 n 前的负号看成是 n 的一部分, 它等效于变量 n 从 $-1 \sim -\infty$ 的区间内取值, 则上式变为:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{jn_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n \cdot e^{jn_0 t} \\ x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn_0 t} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \end{aligned} \quad (1-10)$$

$$\begin{aligned} \text{式中} \quad c_n &= \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n_0 t dt - j \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n_0 t dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) [\cos n_0 t - jsin n_0 t] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn_0 t} dt \end{aligned} \quad (1-11)$$

式(1-10) 就是傅里叶级数的复指数展开式。

从式(1-11) 可以看出, c_n 实际上是一个复数, 它可表示成实部 c_{nR} 和虚部 c_{nI} 的形式, 也可以用复数的模和相角表示为:

$$\begin{aligned} c_n &= c_{nR} + jc_{nI} \\ &= |c_n| e^{j\phi_n} \end{aligned}$$

式中 $|c_n| = \sqrt{c_{nR}^2 + c_{nI}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n$ 为 c_n 的模;

$$\phi_n = \arctan \frac{c_{nI}}{c_{nR}} = \arctan \frac{b_n}{a_n} = \phi_n \quad \text{为 } c_n \text{ 的相角。}$$

因此, c_n 具有明确的物理意义, 即包含了 $x(t)$ 的幅值信息也包含了相位信息。

以 $\omega_0 - |c_n|$ 绘出的曲线称为 $x(t)$ 的幅值谱, 以 $\omega_0 - \phi_n$ 绘出的曲线称为 $x(t)$ 的相位谱。

若用 $2\omega_0$ 取代式(1-10) 中的 ω_0 , 则有

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn_0 t} \quad (1-12)$$

由傅里叶级数的复数展开式和三角函数展开式可以看出: 两者的相位谱是一致的, 各频率分量的幅值在量值上有确定关系 ($|c_n| = \frac{1}{2} A_n$), 但是 $|c_n|$ 和 A_n 中的 n 取值不同, 前者在 $-\infty \sim +\infty$ 取值, 而后者在 $0 \sim +\infty$ 取值; 二者的频谱都为离散谱, 分布规律一致, 只是分布范

围不同。通常称前者为双边谱,后者为单边谱。由于 n 的取值可以为负数,这样就产生了负频率,负频率没有实际的物理意义,是由于推导而引入复指数函数的结果。

例 2 求例 1 所示方波的双边谱。

解 利用例 1 的结果

$$|c_n| = \sqrt{c_{nR}^2 + c_{nI}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n = \frac{2A}{n} \quad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots)$$

$$c_n = \arctan \frac{c_{nI}}{c_{nR}} = \arctan \frac{b_n}{a_n} = \frac{\pi}{2} \quad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots)$$

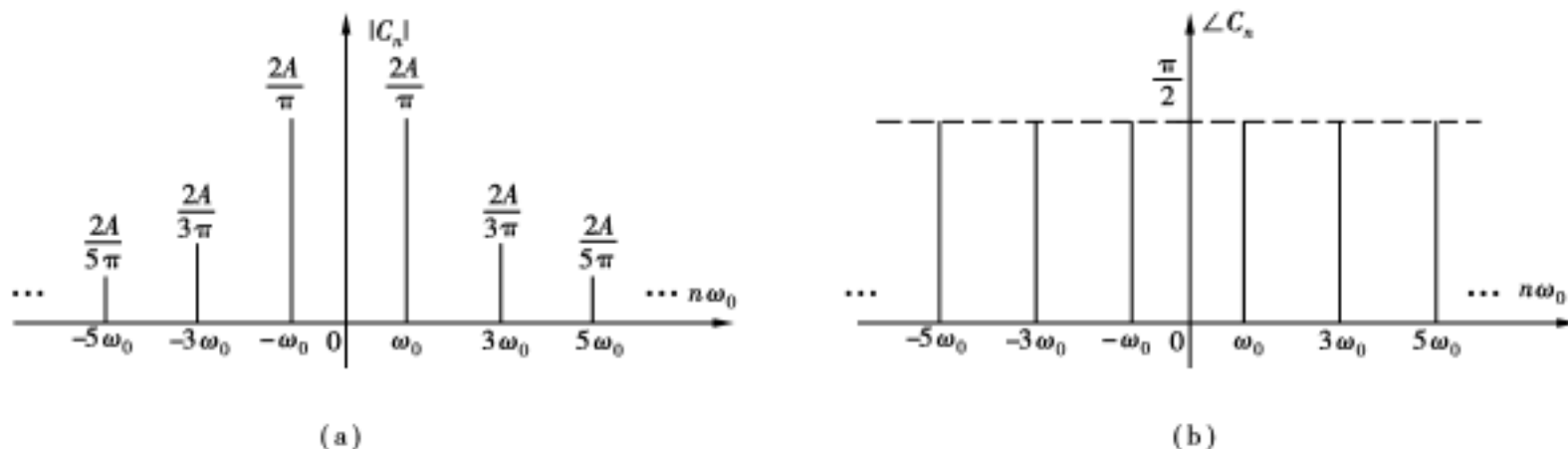


图 1-5 周期方波信号的双边谱

(a) 双边幅值谱 (b) 双边相位谱

其双边频谱图如图 1-5 所示。双边谱在理论推导中被广泛使用。

第三节 非周期信号的频域描述

非周期信号可分为瞬变信号和准周期信号。准周期信号是由一系列正弦信号叠加组成的,但各正弦信号的频率比不是有理数,例如信号: $x(t) = \sin \omega_0 t + \sin \sqrt{2} \omega_0 t$, 频率比 $\frac{\sqrt{2} \omega_0}{\omega_0} = \sqrt{2}$ 不是有理数,显然准周期信号的频谱是离散的,由于其频谱与周期信号没有本质的不同,因此在频域中不单独进行研究。指数函数、阶跃函数、矩形窗函数等是典型的瞬变信号。不作特别声明,本书在提到非周期信号时一般指瞬变信号。

对于周期信号我们可以借助傅里叶级数完成从时域到频域的转变。而非周期信号不具有周期性,不能使用傅里叶级数进行频谱分析,因此必须寻找新的数学工具,这就是傅里叶变换。

一、傅里叶变换及非周期信号的频谱

1. 傅里叶变换

设有一个周期信号 $x_T(t)$ 在区间 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上等于非周期信号 $x(t)$, 区间外按周期延拓。

当 $T \rightarrow \infty$ 时,此周期信号就成为原非周期信号了:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) = x(t)$$

由傅里叶级数的复指数形式(1-10)得:

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{jn \omega_0 t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn \omega_0 t} dt \right] \cdot e^{jn \omega_0 t}$$

当周期趋于无穷大时

谱线间隔趋于无穷小

离散频率变为连续频率

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \omega$$

$$n \omega_0 = \omega$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\omega}{d\omega_0}$$

求和变为求积分

则
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega \quad (1-13)$$

令
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-14)$$

则
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-15)$$

若用 ω 取代以上二式中的 ω , 则有

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-16)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-17)$$

式(1-14)和式(1-16)称为非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶正变换, 式(1-15)和(1-17)称为非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶反变换。二者组成一个傅里叶变换对, 简记为:

$$x(t) \begin{matrix} \xrightarrow{FT} \\ \xleftarrow{IFT} \end{matrix} X(\omega)$$

2. 非周期信号的频谱

$X(\omega)$ 一般为复数, 它可以表示成复数的模和幅角的形式, 也可以表示成实部和虚部之和的形式, 即

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

$$= R_e(\omega) + jI_m(\omega)$$

式中 $|X(\omega)|$ 的模

$$|X(\omega)| = \sqrt{R_e^2(\omega) + I_m^2(\omega)}$$

$X(\omega)$ 的相角

$$\phi(\omega) = \arctan \frac{I_m(\omega)}{R_e(\omega)}$$

我们称 $|X(\omega)|$ 为 $x(t)$ 的幅值谱密度函数, 其图形称为 $x(t)$ 的幅值频谱图;

$\phi(\omega)$ 为 $x(t)$ 的相位谱密度函数, 其图形为 $x(t)$ 的相位频谱图。

例3 试求图 1-6 所示矩形窗函数的频谱。

解 该矩形窗函数的时域表达式为:

$$w(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{据式 (1-15)} \quad W(f) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} w(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= -\frac{1}{j2\pi f} [e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} - e^{j2\pi f \frac{T}{2}}] \\ &= \frac{\sin(\pi fT)}{f} = T \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = T \text{sinc}(\pi fT) \end{aligned}$$

在数学上, 定义 $\text{sinc} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ 为采样函数(如图1-7),

它是一个特殊的实偶函数, 该函数在信号分析中很有用, 其数值可以从数学手册上查到。

$W(f)$ 函数只有实部, 没有虚部。其幅值谱为: $|W(f)| = |T \text{sinc}(\pi fT)|$, 相位谱视 $T \text{sinc}(\pi fT)$ 的符号而定, $T \text{sinc}(\pi fT)$ 为正值时相位为零, $T \text{sinc}(\pi fT)$ 为负值时相位为 π 。图 1-8 作出了窗函数 $w(t)$ 的频谱图。

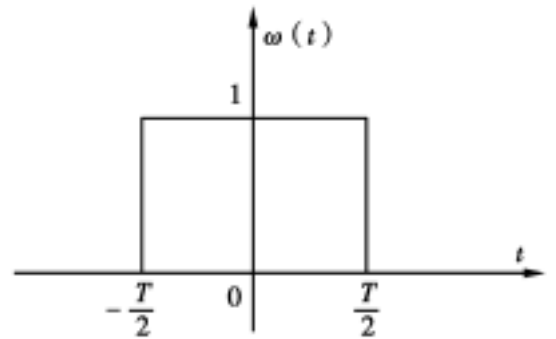


图 1-6 矩形窗函数

综上所述, 可以得出以下几点结论:

周期信号从时域描述到频域描述采用的是傅里叶级数, 非周期信号从时域描述转换到频域描述采用的是傅里叶变换。在这两大类信号之间是采用了令周期信号的周期 $T \rightarrow \infty$, 使周期信号演变为非周期信号, 进而导出了非周期信号的傅里叶变换方法。尽管这些假设不十分严密, 但可以定性地了解傅里叶级数与傅里叶变换之间的

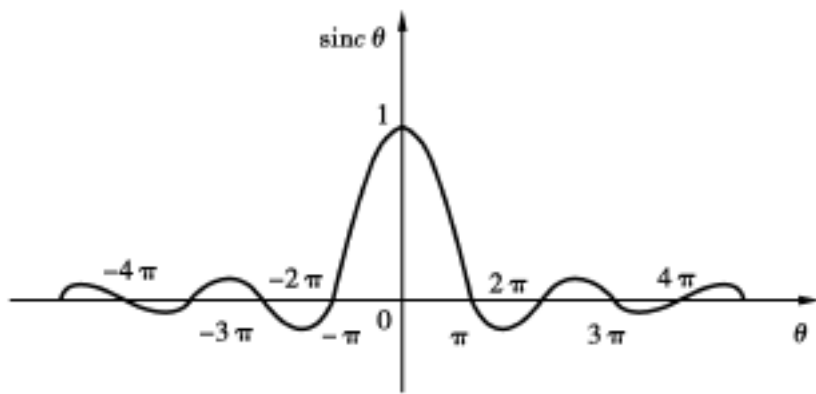


图 1-7 sinc 的图像

的联系与区别, 所得到的非周期信号的频谱有以下特征:

(1) 非周期信号的频谱是连续的。在式(1-12)中, 因 $e^{j2\pi n f_0 t} = \cos 2\pi n f_0 t + j \sin 2\pi n f_0 t$, 这就表明周期信号可以分解成一系列正弦信号之和的形式, 各正弦信号的幅值为 $|C_n|$; 又因为幅值、相位均为离散变量 nf_0 的函数, 所以其频谱具有离散性。在式(1-17)中, 因 $e^{j2\pi ft} = \cos 2\pi ft + j \sin 2\pi ft$, 这就表明非周期信号也可视为由无数个正弦信号之和的形式, 但这些正弦信号的频率是分布在无穷区间上(因 f 是连续变量) 这些正弦信号幅值就是式(1-17)中的 $|X(f) df|$, 因此非周期信号的频谱是连续的。

(2) 非周期信号幅值频谱的量纲是单位频率宽度上的幅值。在周期信号傅里叶级数展开式中, 函数 $e^{j2\pi n f_0 t}$ 的系数(即幅值)是 $|C_n|$, 它具有与原信号幅值相同的量纲。非周期信号的表达式(1-17)中, 函数 $e^{j2\pi ft}$ 的系数是 $|X(f) df|$ (df 是频带宽), 若将其处理成 $\frac{|X(f)| df}{df} = |X(f)|$

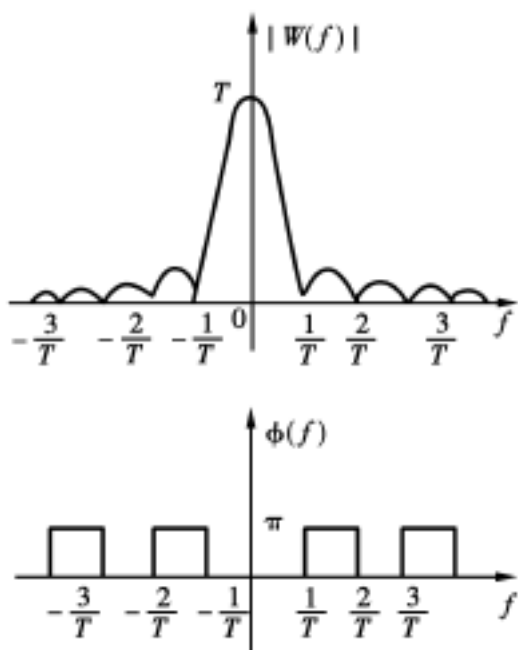


图 1-8 矩形窗函数的频谱

的形式, 则可以看出 $|X(f)|$ 的物理意义, 即 $|X(f)|$ 是非周期信号单位频带宽上的幅值, 具有密度的含义。所以称 $X(f)$ 为原信号 $x(t)$ 的频谱密度函数, 它的量纲就是信号的幅值与频率之比。

二、傅里叶变换的性质

表 1-1 列出了傅里叶变换的主要性质, 这些性质一般从傅里叶变换的基本公式出发, 大多容易证明, 也容易理解, 此处只就几种本课程学习中常用的主要性质作些证明和解释。

(1) 线性叠加性

若

| | |
|--------|--------|
| $x(t)$ | $X(f)$ |
| $y(t)$ | $Y(f)$ |

则 $ax(t) + by(t) \quad aX(f) + bY(f) \quad (1-18)$

证:

$$\begin{aligned}
 F[ax(t) + by(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} [ax(t) + by(t)] e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} ax(t) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} by(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= a \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt + b \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= aX(f) + bY(f)
 \end{aligned}$$

线性叠加性质说明相加信号的频谱等于各个单独信号频谱之和。

(2) 对称性质

若 $x(t) \quad X(f)$

则 $X(t) \quad x(-f) \quad (1-19)$

证: $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$

以 $-u$ 代替 t $x(-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{-j2\pi fu} df$

以 t 代替 f $x(-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j2\pi ut} dt$

再以 f 代替 u $x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j2\pi ft} dt$

由式(1-17) 得: $X(t) \quad x(-f)$

表 1-1 傅里叶变换的主要性质