第一章

绪　　论

第一节　　自动控制理论概述

一、自动控制理论在研究生产过程自动化中的作用

（1）自动控制理论是研究自动控制共同规律的科学，也是研究生产过程自动化的基础知识；

（2）掌握自动控制理论的基本内容，可以分析自动控制系统的性能；可以找出不满足性能指标要求的系统所存在的问题；可以设计和改造自动控制系统。

二、自动控制理论的基本内容

（1）自动控制系统的基本概念；

（2）自动控制系统的数学模型；

（3）自动控制系统的性能分析；

（4）自动控制系统的设计与改造。

三、学习自动控制理论需要使用的数学工具及相关知识

（1）线性微分方程的解；

（2）Laplace 变换的基本方法；

（3）简单电路分析的基本方法等。

第二节　　自动控制的基本概念

一、定义

1. 自动控制的定义

自动控制就是利用控制装置自动地操纵机器设备或生产过程，使其具有希望的状态或功能。

2. 自动控制系统的定义及组成

能够实现某种生产过程自动化的所有设备集合即为自动控制系统，它主要有控制装置和广义被控对象（包括被控对象、执行机构、检测变送器等）两大部分组成。

自动控制系统的工程实例分析及基本构成形式

1. 水箱水位控制系统

（1）控制系统的任务。要保证用户正常用水， 保证设备安全经济运行，则要保证水箱水位始终为一设定值。

（2）人工调节过程。水箱水位控制系统构成原理结构示意图如图 1-1 所示。对构成系统的基本部件及信号作以下说明：被控对象——水箱；被调量(测量值、实际值、检测值)——水箱水位 $h(t)$；对被调量的希望值（给定值、设定值） $h_0(t)$；调节量（控制手段）——入水流量 $q_1(t)$;扰动量(干扰输入）——用户用水流量 $q_2(t)$；控制设备为：

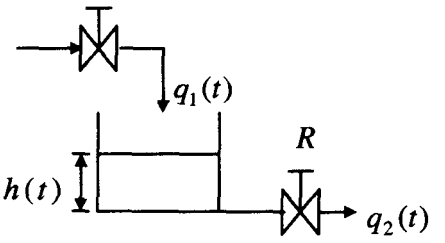


图 1-1　水位手动控制系统结构示意图

控制设备（人工调节）
- 检测变送部件一眼睛
- 执行部件一手
- 逻辑判断及数学运算部件一脑

控制过程分析：当供水系统在入水流量 $q_1(t)$与用户用水流量 $q_2(t)$相同时,被调量水箱水位 $h(t)$ 将保持在被调量的希望值 h_0（t）上。当 $q_2(t)$ 增加时，破坏了系统原有的平衡状态，使水位 $h(t)$ 下降。运行人员观察到水位 $h(t)$ 下降时，则需开大入水阀门，使入水流量 $q_1(t)$增加，以使水位上升至希望值。当 $q_1(t)$ 重新等于 $q_2(t)$ 时，水位又达到新的平衡状态。

原则性方框图：为了解系统的工作过程及各变量之间的传递关系，可以用如图 1-2 所示的原则性方框图来表示系统的控制过程。

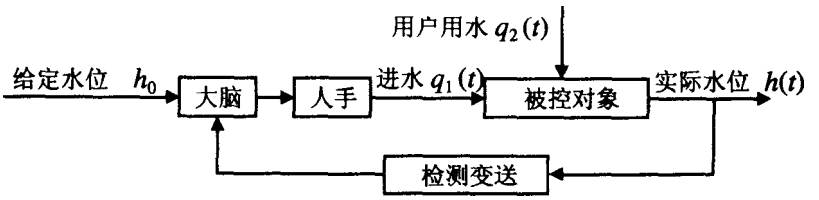


图 1-2　水箱水位手动控制系统原则性方框图

（3）自动调节（机械调节系统）过程。由人工调节过渡到自动调节，即用自动化装置代替人工操作。水箱水位简单机械自动控制系统原理结构示意图如图 1-3所示。对系统所用控制设备作以下说明：

控制设备
- 检测变送部件一浮子
- 执行部件一闸阀
- 逻辑判断及数学运算部件一杠杆、支点

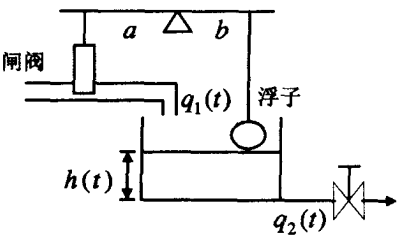


图 1-3　水箱机械控制系统结构示意图

控制过程分析：当 $q_2(t)$ 增加时，水位 $h(t)$ 下降，浮子下移，通过杠杆传递使入水阀门开大，水位 $h(t)$ 上升。当 $q_1(t)=q_2(t)$ 时，水位达到新的平衡状态。

原则性方框图：如图 1-4 所示。

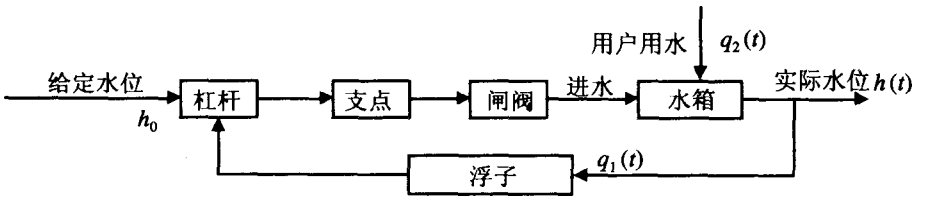


图 1-4　水箱水位手动控制系统原则性方框图

2.　简单主汽温度自动调节系统

（1）控制系统的任务。为保证机组的安全经济运行，要求主蒸汽温度为设定值。

（2）控制系统构成。系统构成如图 1-5 所示。主要由被控对象——过热器管道，执行机构——电动喷水阀门（执行器），检测变送组件——热电偶和温度变送器，控制系统核心部件——电动控制器（调节器）组成。其中，被调量（测量值）——主汽温度，调节量（控制信号）——喷水流量，干扰信号——炉膛燃烧工况。

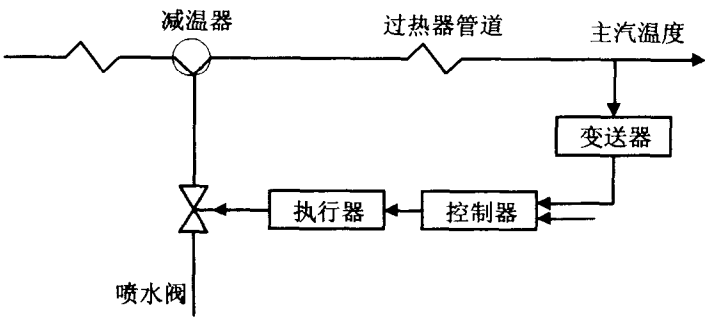


图 1-5　简单主汽温度控制系统结构示意图

（3）控制系统原则性方框图如图 1-6 所示。

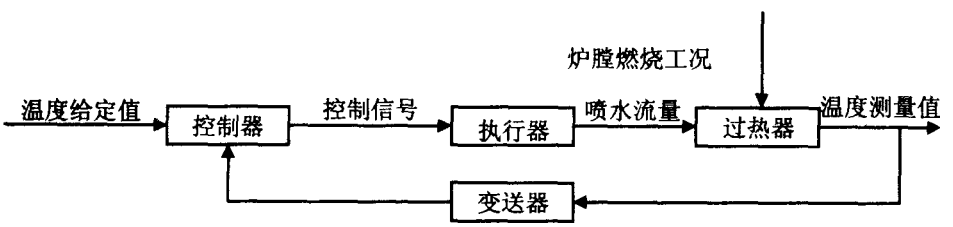


图 1-6　简单主汽温控制系统原则性方框图

（4）控制过程分析。当主汽温度的测量值等于设定值时，喷水阀门不动，系统处在动态平衡状态。此时，若炉膛燃烧工况发生变化，使汽温上升，造成给定值和测量值产生偏差，则偏差信号经过控制器的方向性判断及数学运算后，产生控制信号使喷水阀门以适当形式打开，喷水流量增加。测量值最终回到设定值，系统重新回到平衡状态。

3. 简单炉膛负压自动调节系统

（1）为保证锅炉的安全经济运行，要求炉膛负压为设定值。

（2）控制系统构成，如图 1-7 所示。主要由被控对象—— 锅炉炉膛，执行机构——引风挡板，检测变送组件——差压计和差压变送器和控制系统核心部件——电动控制器组成。其中，被调量一炉膛负压，调节量—— 引风量，干扰信号—— 送风量变化。

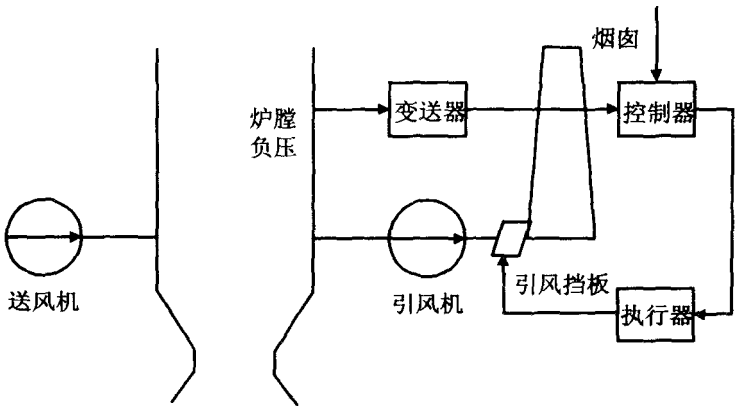


图 1-7　锅炉炉膛负压自动控制系统结构示意图

（3）控制系统原则性方框图如图 1-8 所示。

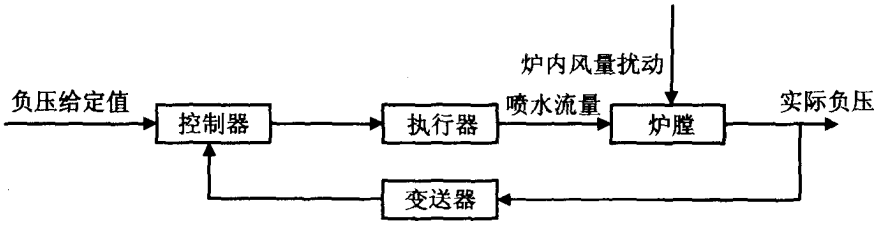


图 1-8　锅炉炉膛负压自动控制系统原则性方框图

（4）控制过程分析。炉膛负压是靠送风量和引风量的平衡来保证的。当炉膛负压的测量值等于设定值时，引风挡板的开度不动，系统处在动态平衡状态。此时，若机组要求增加负荷，则要求增加送风量，这样会使炉膛负压上升，造成给定值和测量值产生偏差，则偏差信号经过控制器的方向性判断及数学运算后，产生控制信号使引风挡板以适当形式打开，增加引风量，使测量值最终回到设定值，系统重新回到平衡状态。

4. 简单汽包水位自动调节系统

（1）为保证机组的安全经济运行，要求汽包里的出汽量和进水量平衡，则要求汽包水位为设定值。

（2）系统结构原理图如图 1-9 所示。主要由被控对象——汽包，执行机构——给水阀门，检测变送组件——差压计和差压变送器和控制系统核心部件——电动控制器组成。其中被调量——汽包水位，调节量——给水流量，干扰信号——蒸汽流量。

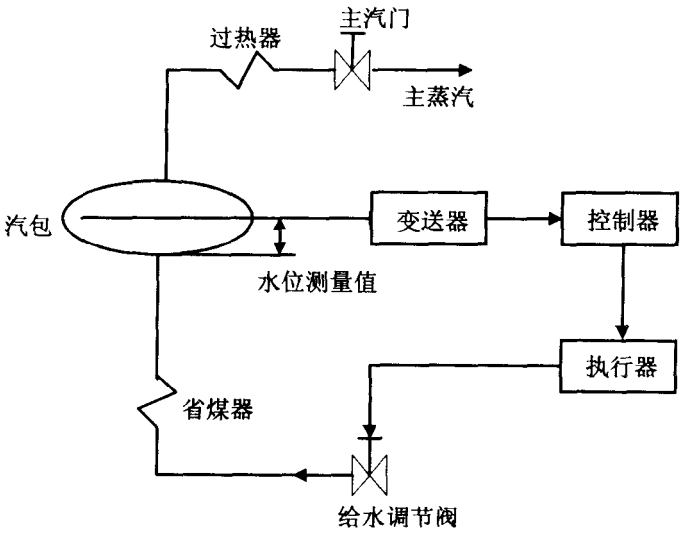


图 1-9 汽包水位简单调节系统结构原理图

（3）控制系统原则性方框图如图 1-10所示。

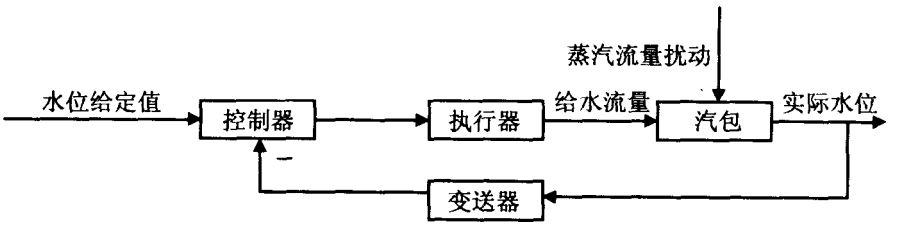


图 1-10 汽包水位自动控制系统原则性方框图

（4）控制过程分析。当汽包水位的测量值等于设定值时，给水阀门的开度不动，系统处在动态平衡状态。此时，蒸汽流量增加会使水位下降，造成给定值和测量值产生偏差，则偏差信号经过控制器的方向性判断及数学运算后，产生控制信号使给水阀门以适当形式打开，增加给水量，使测量值最终回到设定值，系统重新回到平衡状态。

三、简单自动控制系统的组成及调节机理

通过上述工程实例，我们对自动控制系统的基本构成形式以及控制系统的自动调节机理有了一定的了解。为了寻求自动控制系统统一的规范模式，对自动控制系统的组成及调节机理作以下描述。

1. 组成

简单自动控制系统可以分为被控制对象和自动控制装置（包括测量变送组件、控制器和执行机构）两大部分，或者分为广义被控对象（包括被控对象、执行机构、检测变送组件）和控制器（衡流给定器、比较器和运算器）两大部分。反馈控制系统构成形式的原则性框图如图·1-11 所示。

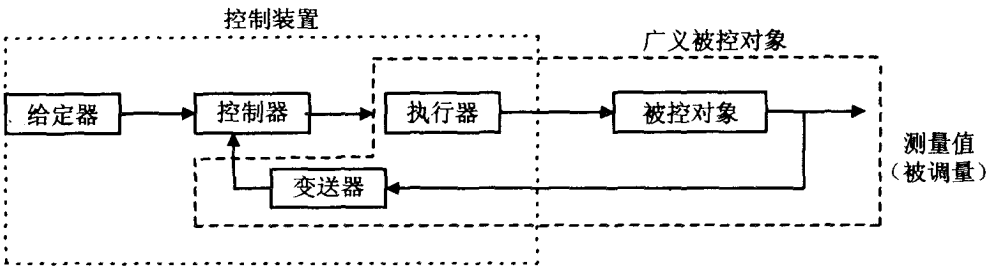


图 1-11　反馈控制系统构成形式的原则性方框图

2. 常用术语

（1）控制系统中的设备名称：广义被控对象、控制设备、被控对象、控制器（调节器）、检测变送器、执行器。

（2）控制系统中的信号名称：测量值（实际值、被调量）、希望值（给定值）、干扰信号、控制信号、调节量（控制量）。

3. 调节机理

依据给定值和测量值的偏差进行负反馈调节，调节的目的是最终减小或消除偏差。负反馈控制系统是实现生产过程自动化的基本结构形式。对于任何复杂的控制系统都不失负反馈的基本结构形式。

第三节　自动控制系统的性能指标

一、问题的提出

前面通过工程实例对自动控制系统的组成形式及调节机理做了定性的描述。至于一个自动控制系统的控制水平如何还应该做出定量的描述，才能确定该系统是否可以使用。例如：水箱水位控制系统，即便构成的是负反馈控制结构形式，但是，当杠杆的支点位置不同时，产生的控制效果就会截然不同。支点向左移动时，系统消除水位偏差的速度较慢，如果速度过慢，可能会影响高层用户用水；支点向右移动时，系统消除水位偏差的速度加快，但有可能引发水位的剧烈波动，甚至导致系统不再会回到平衡状态。怎样选择支点的位置才能既保证系统的调节速度又保证系统的稳定性呢？对其他系统的设计同样存在类似的问题，即如何确定控制器内部的算法，才能既保证系统的调节速度又保证系统的稳定性，还要保证系统的准确性？为解决这一问题，必须要对自动控制系统做出定量的描述。

为保证生产设备的安全经济运行，在设计自动控制系统时，必须给出明确的系统性能指标，即控制系统的稳定性、准确性和快速性指标。通常用这三项技术指标来综合评价一个控制系统的控制水平。

二、性能指标的简单概念

已知反馈控制系统构成形式的原则性框图如图 1-11 所示。在系统处在动态平衡的前提条件下，要获取系统的性能指标，必须对系统产生激励作用，从而让测量值偏离给定值，此时，系统控制器才能产生控制作用，才能观测出系统的控制水平。首先，系统必须具备能够抗拒扰动重新回到平衡状态的能力，这就是系统的稳定性概念。再从测量值与给定值动静态偏差的大小及消失速度给出具体的、定量的描述。

1. 激励信号的选择依据

（1）使系统计算性能指标的计算过程简单；

（2）能够代表系统实际扰动的形式；

（3）激励信号的强度足够激发系统的动态调节过程并且系统设备又能够承受。

2. 常用激励信号的形式

（1）阶跃信号；

（2）脉冲信号（理想）或方波信号（实际）；

（3）斜坡信号：

（4）加速度信号。

上述激励信号的数学表达式及其曲线形式如图 1-12所示。

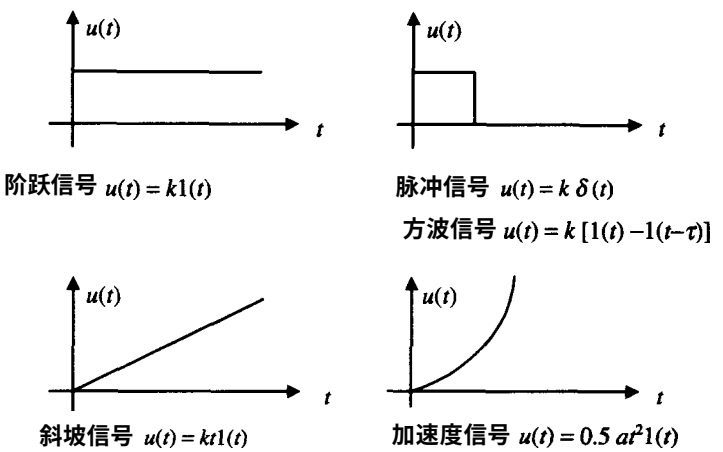


图 1-12 常用激励信号的数学表达式及其曲线形式

3. 衡量系统测量值跟踪给定值能力的技术指标

对于稳定的系统，在给定值为单位阶跃扰动的情况下，获得输出值（测量值）随时间变化的响应曲线如图 1-13 所示。从系统三项性能指标的综合性考虑，一般情况下，响应曲线为衰减振荡过程的形式最佳。从响应曲线上可获取以下常用性能指标。

（1）调节时间 t_S。系统动态调节过程所需要的时间。

（2）超调量 $\sigma\%=(C_{max}-1)\times 100\%$：在动态调节过程中，测量值超过给定值的最大幅度的百分比。

（3）最大动态偏差 e_{max}。在动态调节过程中，测量值超过给定值的最大幅度。

（4）静态偏差 e_{SS}。在动态调节过程结束后，测量值与给定值之差。

（5）振荡次数 x。动态调节过程中产生周期振荡的次数。

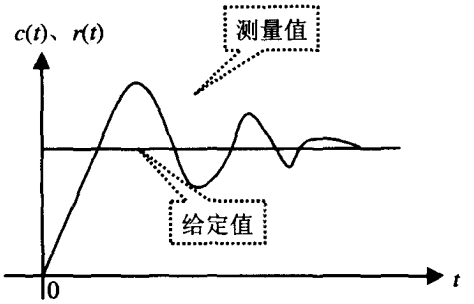


图 1-13　给定阶跃扰动下的响应

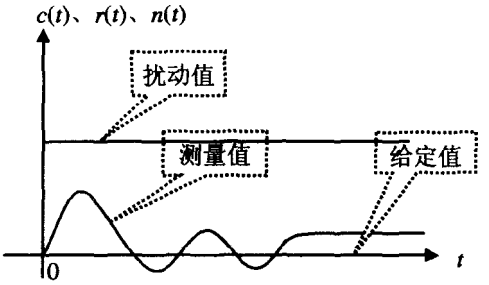


图 1-14　干扰阶跃扰动下的响应

4. 衡量系统测量值抗拒干扰信号能力的技术指标

对于稳定的系统，在干扰信号为单位阶跃扰动的情况下，获得输出值（测量值）随时间的响应曲线如图 1-14 所示。从响应曲线上可获取以下常用性能指标：

（1）调节时间 t_S。在动态调节过程中，测量值超过给定值的最大幅度。

（2）衰减率 $\psi\%=1-C_3/C_{max}$。表征系统动态调节过程的衰减程度。

（3）最大动态偏差 e_{max}。在动态调节过程结束后，测量值与给定值之差。

（4）静态偏差 e_{SS}。在动态调节过程结束后，测量值与给定值之差。

（5）振荡次数 x。动态调节过程中产生周期振荡的次数。

怎样确定控制系统的性能指标是控制系统的分析问题；怎样使自动控制系统的性能指标满足设计要求是控制系统的设计与改造问题。这些问题将在本教材陆续介绍。

第四节　自动控制系统分类

由于各种被控对象的动态特性不尽相同，因此，设计满足性能指标要求的自动控制系统的结构形式也随之不同；考虑到所设计系统的性能价格比，在设计过程中设备的选型也会不同。考虑以上种种因素，对自动控制系统就其结构、执行机构的动力源形式、系统给定值形式以及所选择的控制器形式做以下分类：

一、按系统结构分类

1. 开环（前馈）控制系统

控制器与被控对象之间的信号传递只有顺向作用，而没有反馈联系的控制过程，即被调量的变化情况不参与系统的调节作用。开环控制的优点是调节作用直接而快速，它在扰动信号产生作用的同时即参与调节。但是，它的调节作用的针对性极强。开环控制系统举例如图 1-15 所示。显然在用户用水发生变化的同时，入水流量立刻跟随作相应的变化，这样的调节作用使水位的波动减小，如果设计过程使两个阀门开度的配比合适，可以使扰动对水位的影响降到最小，这便是开环控制调节作用的直接和快速性。但是，当入水管路压头发生变化时，对水位信号所产生的影响，开环调节系统的调节作用却无能为力，这便是调节作用的针对性。

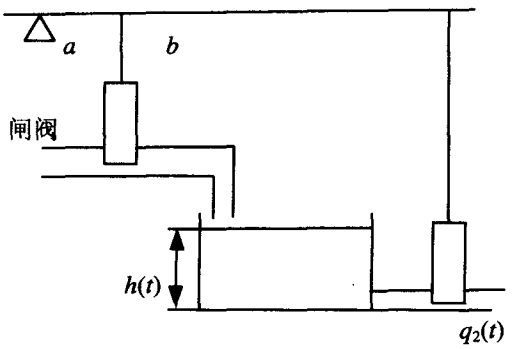


图 1-15　水箱水位前馈控制系统结构示意图

2. 闭环负反馈控制系统

闭环负反馈控制系统是控制系统最常规的构成形式。被调量信号的变化情况是系统调节作用的依据，即调节作用是根据被调量的测量值与给定值的偏差而形成的。前面所举工程实例均属这种结构形式。这种控制方式的优点是无论系统的扰动来自何方，只要被调量的测量值偏离给定值，则系统就会产生调节作用。不足之处则是调节速度较开环控制相比要慢些，因为它的调节作用是在被调量的测量值已经偏离给定值之后才开始的。

3. 复合控制系统

闭环控制与开环控制的有机结合，可以构成具有较好性能指标的自动控制系统。

4. 串级控制系统

由于被控对象的控制难度太大，一个控制器不能产生良好的控制效果时，可以选择两个控制器串行连接形成双回路串级反馈控制系统，以提高系统的控制水平。这种控制方式在热工控制系统的设计过程中是常见的。图 1-16 为串级主汽温控制系统结构示意图。

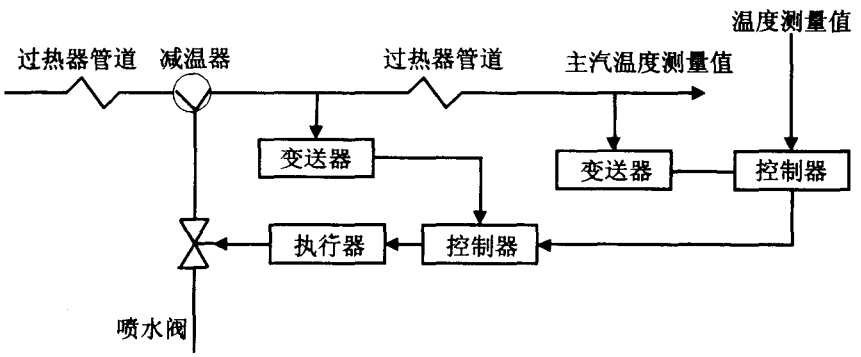


图 1-16　串级主汽温控制系统结构示意图

二、按执行机构动力源分类

（1）电动控制系统。执行机构由电驱动的自动控制系统；

（2）液动控制系统。执行机构由液体压力驱动的自动控制系统；

（3）气动控制系统。执行机构由气体压力驱动的自动控制系统。

三、按给定值形式分类

（1）定值调节系统。给定值是一个确定的常数（如汽包水位控制系统）；

（2）随动调节系统。给定值是无法预知的变数（如单元机组负荷控制系统）；

（3）程序调节系统。给定值是已知变化规律的变数（如全程主汽温调节系统）。

四、按控制器形式分类

（1）常规控制系统。由常规控制器构成的自动调节系统；

（2）计算机控制系统。由专用计算机作为控制器构成的自动调节系统。

五、按数学描述分类

（1）线性系统。可以用线性微分方程描述的系统，具有齐次性和叠加性；

（2）非线性系统。只能用非线性微分方程描述的系统

☆☆☆ 单 元 小 结 ☆☆☆

1. 所谓自动控制系统就是在没有人直接参与的情况下，利用控制装置操纵受控对象，使被调量等于给定值。

2. 自动控制的基本方式分开环和闭环两种。开环控制实现起来简单，并且造价低，但抗干扰能力差，控制精度较低。自动控制原理中主要考虑的是闭环负反馈控制方式，因为这种控制方式的特点是抗干扰能力强，控制精度高，但是系统的设计难度较大，存在着是否能够正常工作的问题—一即稳定性问题。另外，有时为提高系统的设计水平，在反馈控制的基础上还可以增加前馈作用，以提高控制系统的设计水平。

3. 反馈控制系统的基本组成为：被控对象、执行器、检测变送器、调节器（包括恒流给定器、比较、运算和放大功能）。

4. 单回路反馈系统的调节原理：依据偏差调节，目的是最终消除偏差。

5. 控制系统中的信号名称：被调量（检测值、测量值、实际值、输出量）、调节量（控制量）、输入量、扰动量、偏差量。

6. 对控制系统综合性性能指标的要求是：一稳、二准、三快。具体性能指标可根据实际工程情况，按不同形式给出。

7. 自动控制理论是分析和设计自动控制系统的理论基础，大致可以分为古典控制理论和现代控制理论两大组成部分，而古典控制理论又是现代控制理论的基础，本书主要介绍古典控制理论。随着生产技术的不断更新和发展，自动控制理论也在不断发展，但掌握这些最基本的知识，对学习和掌握各种新型的控制技术是必不可少的

☆☆☆ 思 考 题 ☆☆☆

1-1 什么是自动控制？对于人类活动有什么意义？

1-2 什么是前馈？什么是反馈？什么是负反馈？

1-3 闭环控制系统是怎样实现控制作用的？

1-4 衡量控制系统的性能指标通常有哪些？

1-5 试举火电厂热工控制系统中的定值调节系统和程序调节系统实例。

1-6 自动控制系统一般有哪几部分组成？每一部分的作用是什么？

第二章

基础知识补充

为了掌握控制系统定量的性能分析方法及基本设计方法，首先要掌握的是在控制理论的研究过程中所经常使用的数学工具。为此，必须对数学基础知识作以下复习和补充。

第一节　Laplace 变换

一、 Laplace 变换的作用

Laplace 变换是工程数学的一个主要分支。从工程应用的角度出发，它的作用是将复杂的线性微分方程的求解过程化成代数方程来求解。在控制理论的研究过程中，它仅仅作为一种数学工具出现的，正如我们在学习对数这一概念时一样。例如：计算 3.26^{126}，如果不借助于计算器用人工计算，这个过程将是很繁琐的。为了化简这个计算过程，通过对它取对数，并利用对数的性质定理及查表计算对数值，再通过反对数表便计算出其最终结果。用 Laplace 变换求解线性微分方程的整个计算过程与上述对数的简单计算过程极为相似，因此，在对 Laplace 变换的学习过程中，力求掌握对这一数学工具的正确灵活使用，而对复杂的理论推导过程不作要求。在控制理论课程的学习过程中引入 Laplace变换是为了简化系统数学模型的形式，简化系统的性能分析和设计过程。

二、Laplace 变换的定义

若将实变量 t的函数 $f(t)$，乘以指数函数 e^{-st}（其中 $s=\sigma+j\omega$是一个复数），再在 $0\sim\infty$之间对 t 积分，就得到一个以 s 为自变量的新函数 $F(s)$。$F(s)$称为 $f(t)$ 的 Laplace 变换式，并用符号 $L[f(t)]$表示

$$F(s)=L[f(t)]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

上式称为 Laplace 变换的定义式。为了保证定义式中等号右边的积分存在（收敛），则函数 $f(t)$ 应该满足下列条件：

（1）当 $t<0$ 时，$f(t)=0$；

（2）当 $t>0$ 时，$f(t)$连续或分段连续；

（3）当 $t\to\infty$ 时，$f(t)$项比 e^{st} 项增加的速度慢，所以 $f(t)e^{st}$ 函数有界。

由于 $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ 是一个定积分，t 在新函数中消失。因此 $F(s)$只取决于 s，它是复变量 s 的函数。所谓 Laplace 变换过程，即是将原来的实变量函数 $f(t)$ 转换成复变量函数 $F(s)$。

Laplace 变换是一种单值变换。$f(t)$ 和 $F(s)$ 之间是一一对应关系。通常称 $f(t)$ 为原函数，$F(s)$ 为象函数。

【例 2-1】计算下列原函数的象函数

（1）$f(t)=1(t)$ 或写成 $f(t)=1 \quad (t\geqslant 0)$;

（2）$f(t)=t\cdot 1(t)$ 或写成 $f(t)=t \quad (t\geqslant 0)$。

解：

（1）首先确定原函数 $f(t)$满足 Laplace 变换的条件，再根据 Laplace 变换得

$$F(s)=\int_0^{\infty}1(t)e^{-ts}dt=\int_0^{\infty}e^{-ts}dt=-\frac{1}{s}\int_0^{\infty}d(e^{-ts})=-\frac{1}{s}e^{-ts}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s}$$

（2）同理

$$F(s)=\int_0^{\infty}te^{-ts}dt=-\frac{1}{s}\int_0^{\infty}td(e^{-ts})=-\frac{1}{s}[te^{-ts}\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}e^{-ts}dt]=\frac{1}{s}\times\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2}$$

显然，用 Laplace 变换的定义来计算原函数的象函数时，$f(t)$的结构越复杂，变换过程就更加复杂，故一般情况，采用查表的方式求取象函数。另外，在研究控制理论的过程中所遇到的时间函数都能够满足上述变换条件。

常用函数的 Laplace 变换见表 2-1。

表 2　　Laplace 变换表

序　号	原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$1(t)$	1/s
3	$e^{\pm\sigma}$	$\frac{1}{s\mp a}$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$te^{\pm\sigma}$	$\frac{1}{(s\mp a)^2}$
6	$t^n e^{\pm\sigma}$	$\frac{n!}{(s\mp a)^{n+1}}$

续表

序　号	原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$
7	$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
8	$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
9	$e^{\pm \sigma t} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s \mp a)^2+\omega^2}$
10	$e^{\pm \sigma t} \cos \omega t$	$\dfrac{s \mp a}{(s \mp a)^2+\omega^2}$

利用 Laplace 变换表可以简化求取函数的积分计算过程。但是 Laplace 变换表的覆盖面是有限的，即对于有些函数来说，不可能利用表中所提供的内容直接求解，而需要运用一些 Laplace 变换的运算定理将原函数化成可以查表的形式再求取象函数。

三、Laplace 变换的运算定理

为了解决对原函数 $f(t)$ 实施变化过程中的复杂计算问题，引入有关 Laplace 变换的运算定理。有关定理的推导过程本教材不作介绍，有兴趣者可以参看有关书籍。书中直接给出常用 Laplace 变换的性质定理，见表 2-2。

【例 2-2】计算下列原函数的象函数

（1）$f(t)=2t+\sin 2t+\mathrm{e}^{-3t}$　　$(t>0)$；

（2）$f(t)=4te^{-3t}+\mathrm{e}^{-3t}\cos 2t$　　$(t>0)$。

解：

（1）利用叠加定理和比例定理得

$$F(s)=\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s^2+4}+\frac{1}{s+3}$$

（2）利用叠加定理、比例定理、位移定理得

$$F(s)=\frac{4}{(s+3)^2}+\frac{(s+3)}{(s+3)^2+4}$$

四、Laplace 反变换的运算方法

在 Laplace 变换的使用过程中，不但应用正变化过程，有时还必须使用其反变换的过程，即已知象函数求原函数。这种运算过程称为 Laplace 反变换。前面已经提及过，Laplace 变换过程是单值变化，且变换过程中的原函数和象函数是一一对应的。因此反变换的计算同样可以利用 Laplace 变换表和 Laplace 变换运算定理。只是在计算过程中有时需要用到一些

数学变换的技巧，即将复杂的象函数形式改变成可以直接利用运算定理或直接可查表的形式。这种数学变换的技巧只要通过简单训练即可掌握。

表 2-2　　laplace 变换性质定理

序　号	定理名称	公　　式
1	叠加定理	$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
2	比例定理	$L[kf(t) = kF(s)]$
3	微分定理	$L[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)$ $L[\ddot{f}(t)] = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$ $L[\dddot{f}(t)] = s^3F(s) - s^2f(0) - s\dot{f}(0) - f(0)$
4	位移定理	$L[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$
5	延迟定理	$L[f(t-\tau)] = e^{-\tau s}F(s)$
6	终值定理	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$
8	初值定理	$\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$

【例 2-3】计算下列象函数的原函数

(1) $F(s)=\dfrac{5}{2s+1}$;　　(2) $F(s)=\dfrac{s+2}{s(s+1)}$;

(3) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$;　　(4) $F(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$;

(5) $F(s)=\dfrac{1}{s(s+1)^2(s+2)}$;　　(6) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+2s+5}$;

(7) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+2s+5)}$;　　(8) $F(s)=\dfrac{2}{s(s^2+2s+5)}$。

解：反变换解题的过程主要是利用分部分式的方法，将原表达式化成可以直接查表计算的形式求解。分部分式的方法有留数法和待定系数法两种。在这里我们仅仅介绍待定系数法，解题过程如下所述。

（1）$F(s)=\dfrac{5}{2s+1}=\dfrac{2.5}{s+0.5}$　$f(t)=2.5e^{-0.5}$　$(t\geq 0)$

（2）$F(s)=\dfrac{s+1}{s(s+1)}=\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s+1}$　（设定待定系数）

$s+2=a(s+1)+bs$　（上式两边去分母）

$$s+2=(a+b)s+a \quad \begin{cases} a+b=1 \\ a=2 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases} \quad f(t)=2-e^{-t} \quad (t\geqslant 0)$$

(3) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}=\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s^2}+\dfrac{c}{s+1}$

$$1=as(s+1)+b(s+1)+cs^2 \quad (a+c)s^2+(a+b)s+b \quad \begin{cases} a+c=0 \\ a+b=0 \\ b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

$f(t)=-1+t+-e^{-t} \quad (t\geqslant 0)$

(4) $F(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}=\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s+1}+\dfrac{c}{s+2}1=a(s+1)(s+2)+bs(s+2)+cs(s+1)$

$$(a+b+c)s^2+(3a+2b+c)s+2a=1 \quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=0.5 \\ b=-1 \\ c=0.5 \end{cases}$$

$f(t)=0.5-e^{-t}+0.5e^{-2t} \quad (t\geqslant 0)$

(5) $F(s)=\dfrac{1}{s(s+1)^2(s+2)}=\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s+1}+\dfrac{c}{(s+1)^2}+\dfrac{d}{s+2}$

$1=a(s+1)^2(s+2)+bs(s+1)(s+2)+cs(s+2)+ds(s+1)^2$

$(a+b+d)s^3+(4a+3b+c+2d)s^2+(5a+2b+2c+d)s+(2a)=1$

$$\begin{cases} a=0.5 \\ b=0 \\ c=-1 \\ d=-0.5 \end{cases}$$

$f(t)=0.5-te^{-t}-0.5e^{-2t} \quad (t\geqslant 0)$

(6) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+2s+5}=\dfrac{1}{(s+1)^2+2^2} \quad f(t)=e^{-t}\sin 2t \quad (t\geqslant 0)$

(7) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+2s+5)}=\dfrac{s+1-1}{(s+1)^2+2^2}=\dfrac{s+1}{(s+1)^2+2^2}-0.5\times\dfrac{2}{(s+1)^2+2^2})$

$f(t)=e^{-t}\cos 2t-0.5e^{-t}\sin 2t \quad (t\geqslant 0)$

(8) $F(s)=\dfrac{2}{s(s^2+2s+5)}=\dfrac{a}{s}+\dfrac{bs+c}{(s^2+2s+5)}=\dfrac{0.4}{s}+\dfrac{-0.4s-0.8}{(s^2+2s+5)}$

$$=\frac{0.4}{s}-\frac{0.4s}{(s^2+2s+5)}-\frac{0.8}{(s^2+2s+5)}$$

$$=\frac{0.4}{s}-\frac{0.4(s+1)}{(s+1)^2+2^2}-0.2\times\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

$$f(t)=0.4-0.4\mathrm{e}^{-t}\cos 2t-0.2\mathrm{e}^{-t}\sin 2t \quad (t\geqslant 0)$$

其中 $2=a(s^2+2s+5)+s(bs+c)$ $\begin{cases}a+b=0\\2a+c=0\\5a=2\end{cases}$ $\begin{cases}a=0.4\\b=-0.4\\c=-0.8\end{cases}$

第二节　线性微分方程求解

代数关系式是用于描述静态因果关系的数学模型。所谓静态模型，即指其因果关系与时间无关。例如 $f(x)=4x+2$ 函数表达式，x 是自变量，$f(x)$ 是因变量。x 每取一值，$f(x)$ 就有一个值与之对应，而这种对应关系与时间不发生关系。

微分方程是用于描述动态过程的数学模型。任何生产过程都是动态过程，所以其数学模型必须由微分方程来描述。例如：当过热汽温调节系统被控对象的喷水阀门开度随时间变化时，主蒸汽温度也会由于喷水流量的变化而随时间变化。

在后续的学习过程中，我们会发现微分方程是控制系统数学模型的一种最基本形式，而对控制系统性能指标的分析过程是以微分方程解的形式为理论依据的。

一、线性常系数微分方程的定义及其性质

1. 定义

设微分方程为

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1\dot{y}(t)+a_0 y(t)=b_m x^{(m)}(t)+b_{m-1}x^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\dot{x}(t)+b_0 x(t)$$

$y(t)$ 所有导数项都是一次的，当 $a_n\neq 0$，这种方程称为 n 阶线性微分方程。

（1）a_i, b_i 为常系数时，是线性常系数微分方程；

（2）$x(t)\equiv 0$ 为齐次方程，否则为非齐次方程。

2. 性质

线性微分方程具有齐次性和叠加性。

（1）叠加性。当输入 $x_1(t)$ 作用下的输出响应是 $y_1(t)$，输入 $x_2(t)$ 作用下的输出响应是 $y_2(t)$，则有输入 $x_1(t)+x_2(t)$ 作用下的输出响应是 $y_1(t)+y_2(t)$.

（2）齐次性。当输入 $x(t)$ 作用下的输出响应是 $y(t)$，则有输入 $ax(t)$ 作用下的输出响应是 $ay(t)$.