

1 塑性梯度依赖模型研究文献综述

混凝土类材料与结构的破坏失效，是以材料内部裂纹萌生、扩展，并最终导致结构断裂破坏失去承载能力为特征的。固体力学的弹塑性与损伤耦合模型是目前较为常用的处理上述问题的理论工具^{[1]、[2]、[3]}。材料损伤演化的结果是非弹性变形的局部化，即：非弹性变形在变形后期随着外载增加而向物体的某一局部集中，而物体的其他部分则处于弹性卸载状态。具体到混凝土类材料，这个过程为：原来成片的微裂纹区最后汇集成一条主要的宏观裂纹，形成结构断裂，宏观裂纹外的微裂纹随之闭合。

基于 Noll 定义的简单材料^[4]框架内的连续介质局部本构理论，可以通过稳定性分析(Thomas-Hill-Mendel 条件)来确定非弹性变形局部化的发生条件，但是却无法确定局部化区域的宽度，从而也就无法很好地完成整个加载过程的力学分析。在数值计算方面，应用现有局部理论计算时，在载荷极点后区的数值结果通常严重依赖网格划分。因此，有必要建立非简单材料的非局部理论，以消除数值分析结果的网格依赖性，同时计入裂纹间的相互影响。

另一方面，连续介质的非局部理论^[5]认为：物体内一个点的非弹性力学行为不仅取决于外载荷作用下该点的力学量（如应力、应变等）的状态，而且与该点邻域内的点的力学量有关。该理论还认为，变形的一阶梯度不足以描述复杂材料的运动学及材料的力学行为。1909年，Cosserat 首先提出了著名的 Cosserat 本构理论。其后，20 世纪 60 年代，在高阶变形梯度等方面有了进一步的发展。限于求解手段，20 世纪 80 年代以前，上述理论一直仅限于材料的理论研究，在固体力学结构分析中没有重大应用实例的报道。

20 世纪 80 年代以来，非局部本构理论重新受到了重视。目前已有的理论模型除了上述的 Cosserat 模型外，主要的还有两大类：

(1) ‘面积加权平均’的非局部非弹性模型^[6]。在这一类模型中,引入了材料的特征尺寸的概念,同时引入权函数来表示物质点间力学量相互影响的数学关系,从而确定了局部化区域的宽度,并有效地消除了数值结果的网格依赖性。

(2) ‘梯度依赖’的非局部模型。这一类模型的理论及应用研究是目前国际上最为活跃的本构研究课题。由于数学上并没有严格的理论来规范本构行为中梯度依赖项的细节(阶数及形式等),目前的文献中有多种不同的梯度依赖形式。其中主要的有:

1) 金属塑性研究的应变梯度理论。文献^[7]对国内外金属塑性梯度依赖模型进行了详细的综述,文献^{[8]、[9]}则分别有详细的模型介绍和新进展报告。这一类模型主要包括高阶应变张量模型、偶应力理论等模型。以高阶应变模型为例,这一类模型的缺点是:由于3阶应变张量的引入,数值求解时需要引入特殊单元,计算量十分大。在国际上,未见有该类模型在混凝土的损伤塑性分析中应用的例子。

2) Aifantis 的梯度依赖模型^{[10]、[11]}。Aifantis 和他的合作者首先提出了一种应变软化塑性的梯度依赖模型:将等效塑性应变的 Laplacian 项和特征长度一起引入到塑性屈服条件中,从而使得物体内一点的弹塑性状态不仅取决于传统的等效应力和材料的屈服极限,还有赖于该点与相邻物质点之间的塑性应变场的 Laplacian 值和特征长度值的积。这一类模型数学表达简单,但是由于其梯度依赖项没有相应的热力学共轭量,因此在理论上是不完善的。

尽管其热力学理论不完善,但由于其数学表达简洁,实践上实用有效,Aifantis 类的梯度依赖模型依然在混凝土的损伤塑性分析中得到了广泛应用。例如,DeBorst 和他的合作者们将 Aifantis 的梯度依赖模型应用到混凝土标量损伤与塑性耦合的模型中,建立了梯度依赖的损伤塑性耦合模型^[12],并进一步结合面积加权平均非局部理论的思想,提出了隐式的梯度依赖模型^[13]。

除了上述两类主要的梯度依赖塑性损伤本构模型之外,近三年来一些研究者开始从热力学原理出发,提出混凝土的新的梯度依赖非局部本构模型:Nedjar^[14]将标量损伤的一阶梯度视作新的独立的内变

量,推导了相应的虚功率原理的形式,给出了相应的计算格式。Liebe 和 Steinmann 和 Benallal 一起^[15],本着‘能量耗散的非局部化’的理念,提出了‘损伤一阶梯度依赖’的自由能表示式。但遗憾的是,他们却最终得出了类似于 Aifantis 的依赖于损伤标量的 Laplacian 项的损伤加载条件。虽然从数值结果上看效果不错,但数学推导过程明显牵强。

我国学者李锡夔和他的合作者^[16]提出了用于塑性理论的 Aifantis 类的“等效塑性应变”的梯度依赖的混合有限元算法,其数值结果较合理地反映了变形软化塑性下的变形局部化现象;潘一山和徐秉业等^[17]结合 Aifantis 的梯度依赖模型研究了岩石塑性屈服的尺寸效应问题。由于损伤和塑性是本质上不同的两类内变量,用塑性理论近似代替断裂损伤模型虽然有一定的效果,但其缺陷是明显的。目前这一做法在国际上愈来愈少见。国内目前还没有文献报道把 Aifantis 类梯度依赖模型应用到混凝土的损伤塑性耦合分析中的实例。

虽然有了以上文献报道的工作,但是这一研究领域仍然存在若干问题,主要有:

(1) 在理论上,已有的 Aifantis 类的梯度依赖损伤塑性模型,主要是假设了加载条件的塑性应变梯度或标量损伤梯度依赖,不是从“能量耗散梯度依赖”原理推得的。其内变量的梯度依赖项没有相应的热力学共轭力,原模型的热力学理论基础不完善。

(2) 已有的梯度依赖非局部损伤塑性本构模型都是仅限于标量损伤与塑性的耦合的情况,没有混凝土张量损伤情况与塑性耦合的梯度依赖模型的研究文献。

(3) 将梯度依赖非局部模型与有限元结合时损伤和塑性应变的梯度依赖项的数值计算问题尚未完善解决。目前大型有限元程序多数采用常规有限元框架(区别于特殊混合型有限元和特殊扩展有限元^[14]而言)。将梯度依赖模型应用于常规有限元数值程序时,由于损伤变量和塑性变量均为数值求解的目标变量(高斯点上的待求未知量),没有解析表达式,所以其梯度和 Laplacian 值也就无法解析求得。将损伤/塑性应变的梯度依赖项作为节点变量而开发的混合有限元法

和扩展有限元法，都不仅需要大量额外的工作，而且在使用上也有限制。因此，如何解决梯度依赖模型应用于常规有限元数值程序时的相关数值问题，是目前亟待解决的。

(4) 关于特征长度值的定义和计算取值，目前还没有普遍为人们所接受的定论，主要争议在于：

1) 面积加权非局部模型定义特征长度为表示体元的尺寸，而梯度依赖模型则认为特征长度是非弹性行为相互影响的物质点间的最大距离。有少数人认为特征长度值是与混凝土中砂石颗粒尺寸相关的裂纹区宽度尺寸。也有人认为特征长度值只是梯度项对加载条件的影响系数，并且实际上在数值计算时有人也是这么做的。

2) 尽管多数人在计算中将特征长度值取为常量，但是这种做法并没有实验支持。而且近来 Geers 和 DeBorst 等^[13]还提出了“时变型”的特征长度的理论模型，认为特征长度的值随着裂纹的扩展是变化的。

(5) 虽然混凝土的塑性损伤局部本构理论研究近年来在国际上有很大发展，但也有若干重要问题尚未解决。塑性损伤本构的局部理论主要包括：塑性及损伤的加载条件、塑性流动和损伤演化律等。库伦类的加载条件^[18]是混凝土材料破坏分析中最实用的。由于 Mohr-Coulomb 类的屈服条件承载力项中含有已闭合了的裂纹（损伤）面间的摩擦力因素，而这一因素不能用有效应力来确切表达。为此国际上若干研究者的做法是不采用“有效应力”的概念。随后采用的计算方法主要有两种：一是将损伤导致的混凝土材料的“刚度降低”和“强度劣化”两方面分别考虑^{[19]、[20]}，‘刚度降低’因素通过损伤变量计算，而把‘强度劣化’则仅作为‘塑性应变软化现象’，用试验拟合得到的强度参数的“应变软化律”来计算，从而避免了“有效应力不能同时表达刚度降低和强度劣化”的弊病。二是引入正交异性损伤张量。理论上讲，一方面，二阶损伤张量通过适当的数学运算，能够精确区分裂纹闭合时的‘强度劣化’和‘刚度部分恢复’两方面的力学行为 另一方面，引入二阶损伤张量后，可以不采用有效应力的概念，而从细观上用损伤张量的不同分量来表达“刚度降低”和“强度劣化”两方面的行为特

性。但是,二阶损伤张量引入后,不采用有效应力相应的塑性/损伤加载准则、损伤演化和塑性流动的描述还没有成熟的理论。近三年来,Mroz 等人 [21],[22],[23],[24] 在建立‘各向异性损伤’与‘损伤导致的各向异性塑性’耦合时不采用有效应力的 Coulomb 类屈服/加载条件的研究方面提出了很有意义的宏观模型,但是尚未涉及各向异性损伤塑性耦合时的塑性流动和损伤演化律的理论及数值求解。这个方向的研究在国际上仍处于初级阶段。

综上所述,从理论上、实验上并结合数值方法对混凝土的正交异性损伤塑性耦合分析的梯度依赖非局部本构模型,建立相应梯度依赖项的高效的数值求解格式,开发出具有网格稳定性(即数值结果对网格划分不敏感)的有限元软件,是目前本领域国际固体力学界的一个亟待解决的热点课题。对这一课题的完善研究,将建立理论上完善、使用上有效的混凝土梯度依赖非局部损伤塑性耦合本构模型,能为相关工程的混凝土结构的力学分析提供更加准确有效的理论工具。因此,对这一课题的深入研究,具有重要的理论意义和广阔的应用前景。

参 考 文 献

- [1] 谢和平. 岩石·混凝土损伤力学. 徐州:中国矿业大学出版社,1990
- [2] 周太全,贾军波,李兆霞. 弹塑性损伤分析的参变量原理. 东南大学学报(自然科学版),2001,31(5),67-71
- [3] Bazant Z. P., Cedolin L. *Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories*, Oxford University Press, 1991, Oxford, New York.
- [4] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. *Arch Rational Mech. Anal.* 1967, 27, 1-32
- [5] Maugin G. A. Remarks on the thermomechanics of weakly nonlocal theories. In: *Nonlocal Aspects in Solid Mechanics*, Abstracts of the EuroMech Colloquium 378, Mulhouse, France, 1998,2-9
- [6] Bazant and Pijaudier-Cabot. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *ASME J. Appl. Mech.*, 1988, 55, 287-293
- [7] 陈少华,王自强. 应变梯度理论进展. *力学进展*, 2003,33(2), 207-216.

-
- [8] 黄克智,黄永刚. 固体本构关系. 北京 清华大学出版社, 1999
 - [9] Wei YG(魏悦广). Constraint effects on the elastic plastic fracture behaviour in strain gradient solids. *Fatigue Frac. Engng. Mater Struc.*, 2002, 25(2), 433-444.
 - [10] Aifantis E. C. On the role of gradient in the localization of deformation and fracture. *Int. J. Engng. Sci.* 1992, 30, 1279-1299
 - [11] Aifantis E. C. Update on a class of gradient theories. *Mech. of Mater.*, 2003, 35(1), 259-280
 - [12] de Borst R., J. Pamin M. G. D. Geers. On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 1999, 18, 939-962
 - [13] Geers M. G. D., R. de Borst W. A. M. Brekelmans, R. H. J. Peerlings. Strain-based transient-gradient damage model for failure analysis. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 1998, 160, 133-153
 - [14] Nedjar B. Elastoplastic-damage modelling including the gradient of damage: formulation and computational aspects, *Int. J. Solids and Structures*, 2001, 38, 5412-5451
 - [15] Liebe T., P. Steinmann A. Benallal. Theoretical and computational aspects of a thermo- dynamically consistent framework for geometrically linear gradient damage. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 2001, 190, 6555-6576
 - [16] Li XK(李锡夔), S. Cescotto. A mixed finite element method in gradient plasticity for pressure dependent materials and modelling of strain localization, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 1997, 144, 287-305
 - [17] 潘一山,徐秉业,王明洋. 岩石塑性应变梯度与 II 类岩石变形行为研究. *岩土工程学报*, 1999, 21(4). 471-474
 - [18] Yu MH(俞茂宏). Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century. *Appl. Mech Rev.*, 2002, 55(3), 169-218.
 - [19] Lubliner J., J. Oliver S. Oller E. Onate. A plastic damage model for concrete. *Int. J. Solids Struct.*, 1989, 25(3), 299-326
 - [20] Govindjee S., G. Kay and J. C. Simo. Anisotropic modelling and numerical simulation of brittle damage in concrete. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 1995, 38, 3611-3633
 - [21] Mroz Z., Maciejewski J. Failure criteria of anisotropically damaged materials based on the critical plane concept. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2002, 26(2): 407-431

- [22] Pietruszczak S. and Z. Mroz. On failure criteria for anisotropic cohesive-frictional materials. *Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomech.*, 2001. 25, 509-524
- [23] 沈新普, 王建学, Zenon Mroz. 正交各向异性损伤材料的 Mohr-Coulomb 条件. *煤炭学报*, 2003, 28(1): 26-30
- [24] 沈新普, Zenon Mroz, 徐秉业. 岩土材料弹塑性正交异性损伤耦合本构理论. *应用数学和力学*, 2001, 22(9): 1028-1034

2 剪切梁模型的数学描述及基本特性

2.1 引言

在反平面剪切载荷及侧压力共同作用下层间裂纹及其扩展所导致的层间失效是复合材料、岩石等工程中重要的结构失效模式，有关层间裂纹的综述可见于 Garg^[1]及 Hutchinson 和 Suo^[2]等的文章。以往的研究多数采用 Griffith 能量准则下的混合裂纹模型研究层间裂纹。本文采用“黏性裂纹”^{[3]、[4]}模型研究层间裂纹。这一模型假设在宏观裂纹前方存在一个损伤过程区。在损伤过程区的这部分层间材料发生弹塑性变形，并发生损伤，从而引起塑性软化。当层面上作用有压应力时，则裂纹面上会发生摩擦滑动，从而损伤区的扩展和摩擦滑动两种耗散机制并存，并且会产生耦合效应。

侧压力作用下的层间剪切失效的力学研究目前尚无文献报道。这一问题包括如下几个方面：1) 层间裂纹面上的摩擦与磨损规律。2) 循环载荷作用下，损伤区的演化及局部的温度效应。3) 层间裂纹的扩展、失稳及其对结构整体的影响等。

本章仅研究侧压力作用下反平面剪切单调载荷引起的层间裂纹的扩展规律。针对反平面剪切问题，提出了能够反映层间界面断裂失效问题力学特性的剪切梁模型，对剪切梁在反平面剪切载荷及侧压力共同作用下的力学行为做了解析分析计算，给出了对应裂纹稳定扩展阶段的应力及位移分布结果。对损伤区与自由端与边界相互作用产生的失稳点的特性和失稳路径上的结构行为，可参见第 3 章。

2.2 问题的描述及剪切梁模型

本小节首先给出反平面剪切问题的弹性力学描述，之后提出“剪切梁”的概念。

图 2.1 所示为一对受反平面剪切作用的梁,梁间为‘黏性层(内聚力层)’。由于问题的对称性,取上部的梁为研究对象,几何尺寸标于图 2.1 中。均布侧压力 $\sigma_{zz}=\sigma_n$ 作用于梁的上表面,在梁的 $x=0$ 一端作用有剪切载荷 $\tau(0)=\tau_{yz}(0)A$, 这里 $A=bt$, 另一端 $x=L$ 为自由端,假设梁的宽度 b 远大于厚度 t ,忽略梁的弯曲效应,从而近似认为梁的反平面剪切状态下的平面应变梁。这样梁内只有非零剪应力 τ_{yz} 和 τ_{zy} 及侧压力 $\sigma_{zz}=\sigma_n=\text{const}$ 作用,其他应力分量为零,从而梁的平衡方程为:

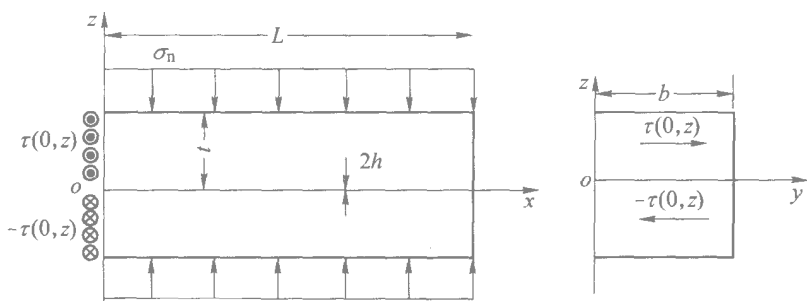


图 2.1 由黏性层(内聚力层)结合的一对梁

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

用 $w=w(x, z)$ 表示梁中沿 y 轴的位移, 并且应用 Hooke 定律, 有:

$$\tau_{yz} = -G_2 \frac{\partial w}{\partial z}, \tau_{xy} = -G_1 \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.2)$$

则式(2.1)化为:

$$G_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G_2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (2.3)$$

式中, G_1, G_2 分别为沿 x 轴和沿 z 轴的剪切模量。梁的力边界条件为底部(即层间界面上) $z=0, \tau_{yz} = -\tau_f$, 上表面 $z=t, \tau_{yz} = 0$, 加载端 $x=0, \tau_{xy}(0) = f_0(y, z)$, 自由端 $x=L, \tau_{xy}(L) = 0$ 。

假设 τ_{yz} 沿 z 轴的分布为线性分布, 即:

$$\tau_{yz} = \tau_f(x) \left(\frac{z}{t} - 1 \right) \quad (2.4)$$

式中, $\tau_f(x)$ 表示层间界面 $z=0$ 上的剪切力。以 τ 表示 τ_{xy} , 即 $\tau_{xy} = \tau$ 则式(2.1)化为

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\tau_f}{t} = 0 \quad (2.5)$$

以上我们用弹性力学的方法建立了简化了的反平面剪切问题的平衡方程式(2.5), 下面我们要说明, 式(2.5)的平衡方程也可以采用本文提出的‘剪切梁’模型(如图 2.2 所示)来实现。

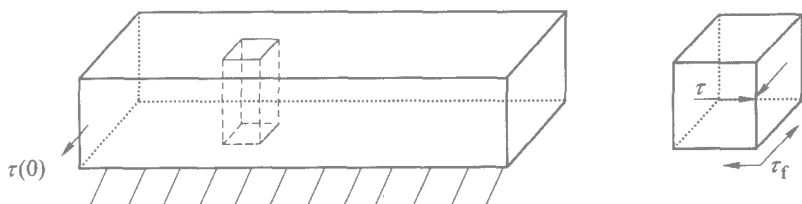


图 2.2 剪切梁示意图

在‘剪切梁’模型中位移沿 z 向均布, $w=w(x)$, 既 $\partial w / \partial x = 0$, 且梁为弹性梁,

$$\tau = -G \frac{dw}{dx} \quad (2.6)$$

弹性梁中的应力 τ 与梁下底面的黏性夹层中的应力 τ_f 形成自平衡系统^[5], 即有如下关系式成立:

$$A \frac{d\tau}{dx} + b\tau_f = 0 \quad (2.7)$$

式中, $A=bt$ 。式(2.7)的位移形式为:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{b}{AG} \tau_f = \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{\tau_f}{tG} = 0 \quad (2.8)$$

比较式(2.5)和式(2.7), 我们可以得出结论 上述剪切梁模型与侧压作用下的反平面剪切层间界面问题是等效的。另外还要指出, 剪

切梁不是真梁，并不具备梁的所有特性。

接下来我们简要地给出厚度为 h 的黏性界面层的弹塑性本构关系，这些关系在模型用于数值计算时是必要的。

用 γ_f 表示剪应变,则

$$\gamma_f = \frac{w}{h}, \tau_f = G_f \gamma_f = \frac{G_f}{h} w = K w \quad (2.9)$$

这里, G_f 表示界面层材料的剪切模量。侧压下已经剪裂的裂纹面上的滑动摩擦力为 $\tau_s - \mu \sigma_n$, μ 为滑动摩擦系数, 剪切位移的全量及率形式为:

$$w = w^e + w^s, \dot{w} = \dot{w}^e + \dot{w}^s \quad (2.10)$$

侧压下已经剪裂的裂纹面上的临界滑动条件为:

$$F^s(\sigma_n, \tau_f) = \|\tau_f\| - \mu \sigma_n \leq 0 \quad (2.11)$$

初始未损伤界面层材料临界损伤条件为:

$$F^s(\sigma_n, \tau_f) = \|\tau_f\| - \mu \sigma_n - \tau_{fc}^0 \leq 0 \quad (2.12)$$

式中, τ_{fc}^0 是对应于 $\sigma_n = 0$ 时的抗剪强度, 而在张应力条件下, 损伤临界面是圆弧形式, 如图 2.3a 所示, 其相应的方程式为:

$$F_t^d = \left[\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_{t0}} \right) + \left(\frac{\tau_n}{\tau_{fc}^0} \right) \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \leq 0 \quad (2.13)$$

忽略扩容的影响, 滑动势函数的形式为:

$$\Phi = \tau_f - \alpha = 0 \quad (2.14)$$

式中, α 是材料参数。关于接触扩容条件的讨论可见文献 [6]。由以上各式可得, 滑动位移增长的率方程为:

$$\dot{w}^p = \dot{\lambda}^p \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_f} = \dot{\lambda}^p > 0, F^s \leq 0, \dot{\lambda}^p F^s = 0 \quad (2.15)$$

式中, $\dot{\lambda}^p$ 是大于零的乘子, 对于单调载荷条件, 对式 (2.15) 积分可得剪切滑动位移全量形式, 为:

$$w^p = \lambda^p \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_f} = \lambda^p > 0, F^s \leq 0, \lambda^p F^s = 0 \quad (2.16)$$

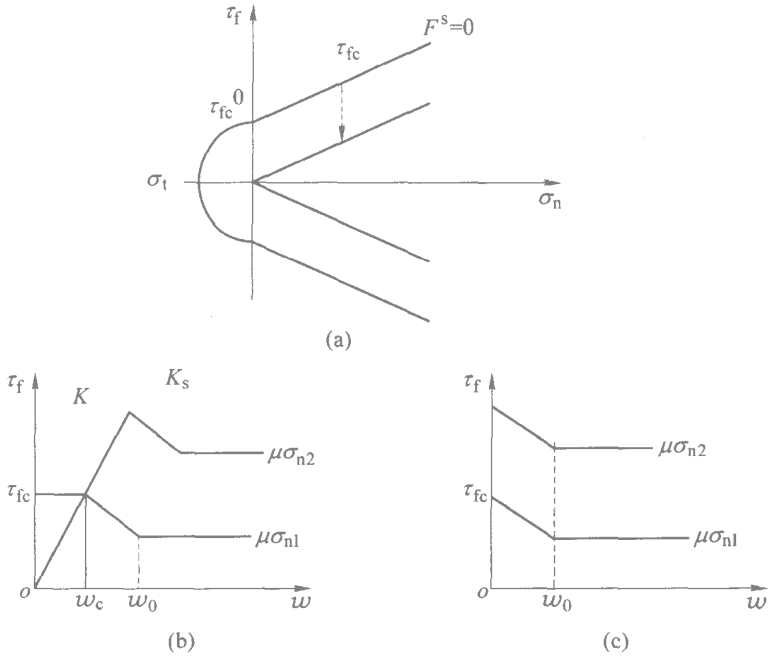


图 2.3 弹性及刚塑性界面层材料的本构关系和临界滑动准则示意图

(a) 临界滑动准则示意图；(b) 弹性界面层材料的本构关系；(c) 刚塑性界面层材料的本构关系

当有卸载及反向摩擦滑动发生时，摩擦滑动的历史将被记录下来。图 2.3 给出了应力位移关系及临界滑动条件。

对于给定的 σ_n ，剪应力首先达到峰值强度 τ_{fc} ，之后进入塑性软化阶段，一直下降到滑动摩擦力值 $\tau_s = \mu\sigma_n$ ，达到完全损伤阶段，宏观裂纹形成，相应的公式为：

$$\left. \begin{aligned} \tau_f &= Kw, 0 < w < w_c = \frac{\tau_{fc}}{K} \\ \tau_f &= \tau_{fc} - K_s(w - w_c), w_c < w < w_0 = w_c + \frac{\tau_{fc} - \tau_s}{K_s} \\ \tau_f &= \tau_s = \mu\sigma_n, w_0 < w \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

式中， K_s 是界面层材料的弹性软化模量。

裂纹扩展过程中，总的耗散能可以分为损伤耗散和摩擦滑动耗散

两部分,即

$$W = W^d + W^p \quad (2.18)$$

式中

$$W^p = w^s \tau_s, W^d = \int_{w_c}^w (\tau_f - \mu \sigma_n) dw \quad (2.19)$$

如图 2.4 所示, W^p 为平行四边形 $OEFCO$ 所围部分, W^d 为四边形 $AHGBA$ 所围部分。

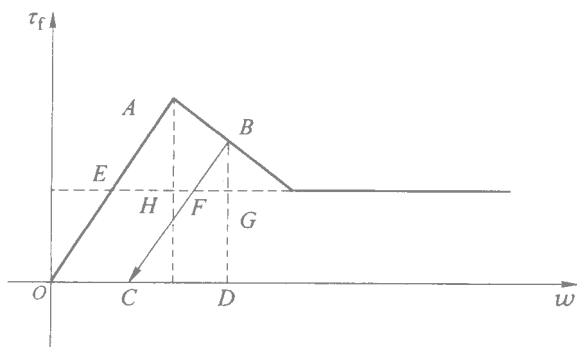


图 2.4 能量耗散示意图

2.3 刚塑性损伤界面层模型下界面裂纹的解析解

2.3.1 刚塑性损伤界面层模型

首先设界面层的刚度 $K = G_f/h = \infty$, 也就是忽略界面层的弹性性能的影响, 图 2.3c 给出了刚性损伤界面层材料的本构模型。

为简便起见, 以梁的高度 t 为基准, 将所有的长度单位无量纲化:

$$x = \frac{\bar{x}}{t}, w = \frac{\bar{w}}{t}, h = \frac{\bar{h}}{t}, s = \frac{\bar{s}}{t}, L = \frac{\bar{L}}{t} \quad (2.20)$$

式中“ $\bar{\quad}$ ”表示具有长度单位的变量。无量纲化后的平衡方程式(2.7)及式(2.8)化为:

$$\frac{d\tau}{dx} + \tau_f = 0, \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{\tau_f}{G} = 0 \quad (2.21)$$

给定梁的加载端 $x=0$ 处的剪应力载荷为 $\tau(0)$, 相应的剪位移为 $w(0)$, 则界面层中的损伤区将从加载端开始扩展开来。整个单调加载过程包括以下几个阶段:

- (1) 损伤过程区自 $x=0$ 加载端起始阶段;
- (2) 宏观裂纹出现, 并与损伤区一起向 $x=L$ 自由端稳定扩展;
- (3) 损伤区前峰到达自由端并与自由端发生相互作用, 裂纹失稳扩展。

综合运用以上给出的平衡方程、本构关系和边界条件, 可以解析求解出对应以上三个阶段的各量的表达式。

以下直接给出阶段 2 的剪应力及位移场的解析解, 关于阶段 1 和阶段 3 的分析可见本研究第二部分。

2.3.2 裂纹稳定扩展时界面层上剪应力及位移的解析解

对应裂纹及损伤区的稳定扩展, 沿界面层全长的应力状态分为 3 个区: 1) 摩擦滑动区 $0 \leq x \leq s_1$; 2) 损伤软化区 $s_1 \leq x \leq s_2$; 3) 刚性区。在刚性区内, 应力及位移皆为 0, 下面将给出剪力及位移在摩擦滑动区和损伤软化区的解。

2.3.2.1 摩擦滑动区的应力及位移解

由界面层中剪应力在摩擦滑动区和损伤区交界点上的边界条件, 可得:

$$[\tau] = [\tau'] = [\tau''] = 0, \text{ for } 0 \leq x \leq s_1$$

式中“ $[\]$ ”表示间断值; w' 和 w'' 为 w 对坐标 x 的一阶及二阶导数, s_1 为滑动区与损伤区交界点的坐标, 由于采用了刚塑性本构模型, 界面层上损伤区靠近自由端一侧的外边缘 s_2 点两侧的剪应力 $\tau_f(s_2)$ 呈不连续变化, 即 $\tau_f(s_2^-) = \tau_{fc}$, $\tau_f(s_2^+) = 0$ 。在摩擦滑动区 $0 \leq x \leq s_1$ 内的界面层上的剪切力为:

$$\tau_f = \tau_s = \mu \sigma_n \quad (2.23)$$

将上式代入式(2.21)并积分可求得对应摩擦滑动区内的剪应力和位移场为：

$$\begin{aligned} w(x) &= -\frac{\mu \sigma_n}{G} \left(\frac{x^2}{2} - s_1 x + \frac{s_1^2}{2} \right) + \frac{\tau(s_1)}{G} (s_1 - x) + w(s_1) \\ \tau(x) &= \mu \sigma_n (x - s_1) + \tau(s_1) \end{aligned} \quad (2.24)$$

式中, $\tau(s_1)$ 和 $w(s_1)$ 分别是 $x = s_1$ 点上的剪应力和位移值。实际上 $w(s_1)$ 就是 COD 准则中的裂纹最大张开位移值。从损伤软化本构方程可得：

$$w(s_1) = \frac{\tau_{fc} - \mu \sigma_n}{K_s} = \frac{\tau_{fc}^0}{K_s} = w_c, \tau(s_1) = \tau(0) - \mu \sigma_n s_1 \quad (2.25)$$

2.3.2.2 损伤软化区的应力及位移解

在损伤软化区 $s_1 \leq x \leq s_2$ 内, 界面层上的应力位移关系为

$$\tau_f = \tau_{fc} - K_s (w - w_c) \quad (2.26)$$

将上式代入式(2.21)可得该区平衡方程, 为：

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{K_s}{G} w = \frac{\tau_f}{tG} \quad (2.27)$$

求解二阶非齐次常微分方程得：

$$\begin{cases} w(x) = c_1 \cos(r_s x) + c_2 \sin(r_s x) + \frac{\tau_{fc}}{K_s} \\ \tau(x) = Gr_s [c_1 \sin(r_s x) - c_2 \cos(r_s x)] \end{cases} \quad (2.28)$$

式中

$$r_s = \sqrt{\frac{K_s}{G}} \quad (2.29)$$

式中, c_1, c_2 为积分常系数, 可通过不同分区的边界条件确定。

由 $x = s_2$ 点处的边界条件

$$\tau(s_2) = 0, w(s_2) = 0 \quad (2.30)$$

可求得

$$c_1 = \frac{\tau_{fc}}{K_s} \cos(r_s s_2), c_2 = \frac{\tau_{fc}}{K_s} \sin(r_s s_2) \quad (2.31)$$

将式(2.31)代入式(2.28)可得

$$\left. \begin{aligned} w(x) &= \frac{\tau_{fc}}{K_s} \{1 - \cos[r_s(s_2 - x)]\} \\ \tau(x) &= Gr_s \sin[r_s(s_2 - x)] \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

将式(2.32)第一式代入式(2.26)即得 $\tau_f(x)$ 的表达式, 图 2.5(a), (b), (c) 分别给出了裂纹稳定扩展过程中给定载荷下 $w(x)$, $\tau(x)$

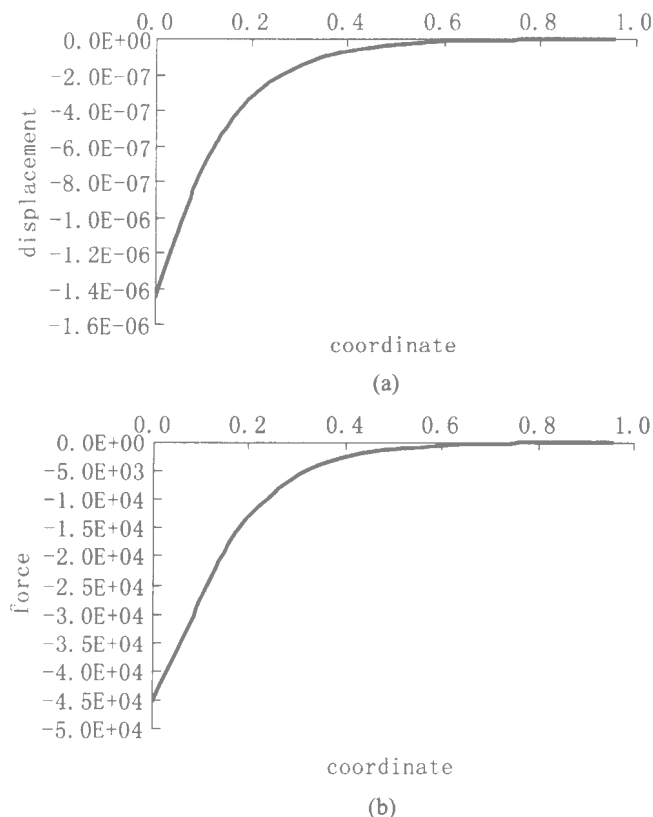


图 2.5 裂纹稳定扩展过程中给定载荷下的参数分布 (一)

(a) 界面层上 $w(x)$ 的分布 (b) $\tau(x)$ 的分布

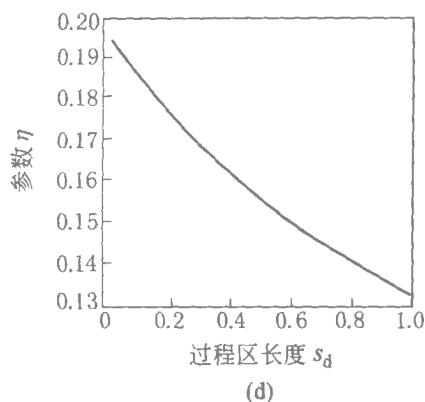
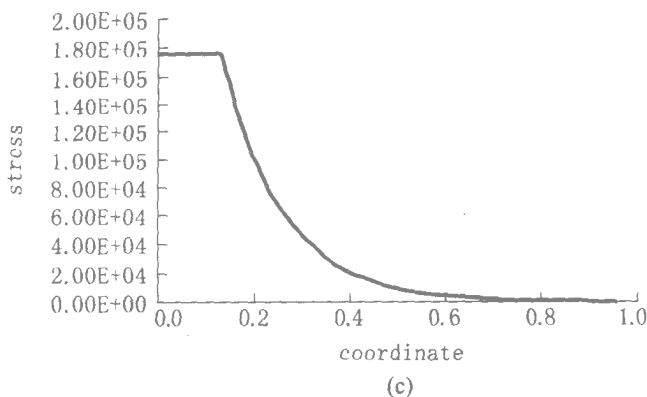


图 2.5 裂纹稳定扩展过程中给定载荷下的参数分布 (二)

(c) $\tau_f(x)$ 的分布 ; (d) s_d 随 η 的变化曲线

$\tau_f(x)$ 的分布情况。从计算结果来看, 本文的裂纹前方损伤过程区内的应力分布, 没有弹性断裂理论所得值那样的奇异性, 但比弹塑性分析所得值有更高的应力集中, 比较符合岩石工程的实际, 表明了本章模型的合理性。

2.3.3.3 损伤区的几何尺寸

损伤区的几何尺寸是界面失效分析中的主要参数之一。利用 $x=s_1$ 处的剪应力及位移的连续条件, 可以求得损伤区的几何尺寸, 为