# 第一章　弹性力学基础

本章阐述弹性力学的基本概念和分析方法，着重介绍化工容器机械设计中经常遇到的弹性力学的平面问题和空间轴对称问题。

## 第一节　弹性力学的任务和分析方法

### 一、弹性力学的任务

弹性力学是研究物体在弹性范围内由于外力的作用或物体温度改变而产生的应力、应变和位移。就这一方面而言，弹性力学的任务和材料力学是相似的，因此材料力学中关于弹性体的均匀连续假设和各向同性假设也适用于弹性力学。

然而，弹性力学与材料力学是不同的，其差别在于：材料力学主要是研究杆状构件和比较简单的杆件系统，且采用了关于变形或应力分布的假设，并以一个有限大的单元体作为研究对象；而弹性力学除了研究杆件外，还研究平面问题及空间问题。由于结构和受力的复杂性，因此在研究这些问题时，并不采用变形或应力分布之类的假设，而是以无限小的单元体作为研究和分析问题的出发点。

### 二、有关基本概念和分析方法

弹性力学中经常用到的基本概念有 外力、内力、应力、应变和位移。

作用于物体的外力可分为体积力(体力)和表面力(面力)两种。体力是分布在物体体积内的力，例如重力和惯性力。体力在坐标轴 $x$、$y$、$z$ 上的投影用 $X$、$Y$、$Z$ 表示，为该物体内某点的体力分量。面力是分布在物体表面上的力，例如流体压力和接触力。面力在坐标轴 $x$、$y$、$z$ 上的投影用 $\bar{X}$ $\bar{Y}$、$\bar{Z}$ 表示，为该物体表面上某点处的面力分量。

物体受外力作用时，其内部相邻部分之间就产生了相互作用力，这种内部相互作用的力就称之为内力。内力在各点的集度就是各点的应力。通常用它沿作用截面的法线和切线方向上的分量，即正应力 $\sigma$ 和剪应力 $\tau$ 来表示。因为这些分量与物体的形状改变或材料的强度有直接的关系。

为了考察物体受外力后内部某一点 $P$ 的应力，过 $P$ 点从物体内截取出一微小的正六面体，棱边平行于坐标轴，长度分别为 $PA=\mathrm{d}x$、$PB=\mathrm{d}y$、$PC=\mathrm{d}z$，如图 1-1 所示。微体的每一截面上的应力都可以分解成与三个坐标轴平行的一个正应力和两个剪应力。为了表明各应力分量的作用面和作用方向，在正应力 $\sigma$ 上加一个坐标角码，例如 $\sigma_x$ 是指作用在垂直于 $x$ 轴的截面上，并与 $x$ 轴平行的正应力 在剪应力 $\tau$ 上加两个坐标角码，前

一个角码表示作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个角码表示作用方向沿着哪一个坐标轴，例如 $\tau_{xy}$是指作用在垂直于 $x$ 轴的面上，方向与 $y$ 轴平行的剪应力。如果某截面的外法线沿着坐标轴的正方向，这个截面就称为正面；反之，若外法线沿着坐标轴的负方向，这个截面就称为负面。正面上的应力分量以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负；负面上的应力分量以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图 1-1 所示的应力分量全部都是正的。

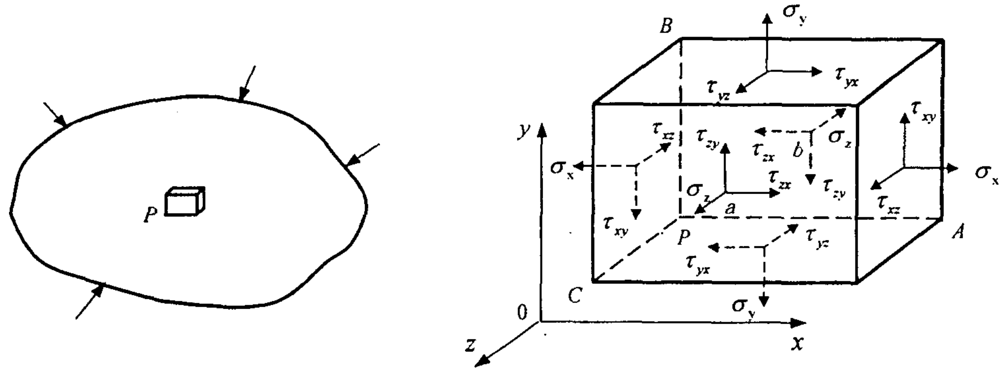



图 1-1　弹性体内某点 $P$ 的应力

在图 1-1 所示的 9 个应力分量中，6 个剪应力之间具有一定的互等关系。如以连接微体前后两截面中心的直线 $ab$ 为矩轴(见图 1-1)，可写出力矩的平衡方程为

$$2\tau_{xy}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}x}{2}-2\tau_{yx}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}y}{2}=0$$

由此得到

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}$$

同样可列出其余两个相似的方程，简化得出

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\qquad \tau_{zx}=\tau_{xz}$$

这就是所谓的剪应力互等定律，即作用在两垂直面上与两面交线垂直的剪应力，大小相等，正负号相同。因此，剪应力记号的两个角码可以对调。于是，9 个应力分量中只有 6 个是独立的，即 3 个正应力 $\sigma_x$、$\sigma_y$、$\sigma_z$ 和 3 个剪应力 $\tau_{xy}$、$\tau_{yz}$、$\tau_{zx}$。和材料力学的分析相似，利用静力平衡，过点 $P$ 所作的任意斜截面上的应力，都可用上述 6 个应力分量来确定。所以，这 6 个应力分量确定了 $P$ 点的应力状态。应力分析的目的，就是确定物体在外力作用下各点的 6 个应力分量，进而求得主应力，以作为强度设计的依据。

物体在外力作用下将产生变形，由于变形后物体的形状可以用其各部分的长度和角度来表示，因此物体受外力后的变形，也可归结为长度和角度的改变。如求物体内某点的变形，可在 $P$ 点沿坐标轴 $x$、$y$、$z$ 正方向取 3 个微小线段 $PA$、$PB$、$PC$，如图 1-1 所示。物体变形后，$PA$、$PB$、$PC$ 的长度以及它们之间的夹角一般都将改变，各线段的每单位长度的伸长或缩短称为正应变，用字母 $\varepsilon$ 表示；各线段之间的角度变化(以弧度为单位)称为剪应变，用字母 $\gamma$ 表示。在正应变 $\varepsilon$ 上加一个坐标角码表示伸缩的方向，如 $\varepsilon_x$ 表示沿 $x$ 方向的线段 $PA$ 的正应变；在剪应变 $\gamma$ 上加两个坐标角码，以表示沿这两个坐标方向

的线段的角度变化,如 $\gamma_{yz}$表示沿 $y$ 与 $z$ 两方向的线段即$PB$ 与$PC$之间的角度变化。正应变以伸长为正，缩短为负，剪应变以直角变小时为正，变大时为负。这些规定和正应力、剪应力的符号规定是一致的。

物体内任一点的位移，可用它在$x$、$y$、$z$ 三轴上的投影$u$、$v$、$w$ 来表示。沿坐标轴正方向为正，反之为负。这三个投影称为该点的位移分量。

一般而论，弹性体内任意一点处的外力、应力、应变和位移是随着该点位置的变化而变化的，因而都是位置坐标的函数。

弹性力学所研究的绝大多数问题都属于静不定问题，亦即只有静力平衡方程是解不出应力的。因此,必须综合应用平衡(应力、外力之间的关系)、几何(应变、位移之间的关系)和物理(应力、应变之间的关系)三个方面的方程才能得出问题的解答。

## 第二节　弹性力学的平面问题

严格地讲,任何弹性体都是空间物体,它所承受的外力一般都是空间力系。因此,任何一个实际的弹性力学问题都是空间问题。但是，如果所研究的弹性体具有某种特殊的形状,且承受的是某种特殊的外力,则可把空间问题作为平面问题处理。这样,可使分析和计算大大简化，而所得结果仍能满足工程上的精度要求。

弹性力学平面问题不但在工程实际中具有重要意义，而且通过平面问题可看到解决具体问题的方法，从而进一步掌握弹性力学的基本概念。

平面问题分平面应力和平面应变两种情况，以下将逐一讨论它们的几何特征、受力特点、基本方程和求解方法。

### 一、平面应力和平面应变

设有很薄的等厚度薄板,见图 1-2，其边缘上受有平行于板面且不沿厚度变化的面力作用,同时,体力也平行于板面且不沿厚度变化。设薄板的厚度为$t$,取坐标如图1-2所示,则在板面上应有

$$(\sigma_z)_{z=\pm t/2} = 0, \quad (\tau_{zx})_{z=\pm t/2} = 0, \quad (\tau_{zy})_{z=\pm t/2} = 0$$

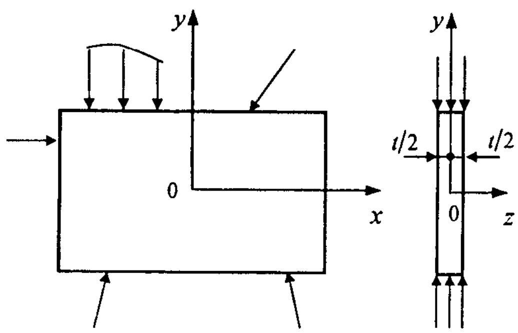



图 1-2　平面应力问题示例

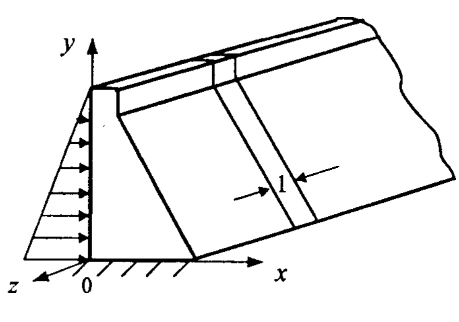



图 1-3　平面应变问题示例

由于板很薄,外力又不沿厚度变化,所以可认为在整个薄板的所有点都有

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0$$

这样，6 个应力分量只剩下平行于 $xy$ 面的 3 个应力分量，即 $\sigma_x$、$\sigma_y$ 和 $\sigma_{xy}$，而且它们只是坐标 $x$、$y$ 的函数，而与 $z$ 无关。这类问题即为平面应力问题。

与此相反，设有很长的等截面柱形体，如重力水坝，受有平行于横截面（$xy$ 面）且不沿长度（$z$ 向）变化的外力作用，如图 1-3 所示。若假想这个柱形体为无限长，则其任一横截面都可以看做是对称面，因而柱形体内任一点都只有 $x$、$y$ 方向的位移 $u$ 和 $v$，且只是坐标 $x$、$y$ 的函数，而与 $z$ 无关。像这样一类问题，由于 $w=0$，亦即 $z$ 向无伸缩，$\varepsilon_z=0$，因而被称为平面位移问题或平面应变问题。又由对称条件可知，对于这类问题也有 $\tau_{zy}=0$，$\tau_{zx}=0$，但 $\sigma_z$ 一般不等于零。这样 6 个应力分量只剩下 4 个，即 $\sigma_x$、$\sigma_y$、$\sigma_z$ 和 $\sigma_{xy}$，且它们也仅是坐标 $x$、$y$ 的函数。

有许多实际问题，如高压管道、重力坝等，虽不是无限长，但实践证明，对于远离两端的部位，按平面应变问题进行分析，得出的结果具有足够的精度，能满足工程要求。

## 二、平面问题的基本方程

### 1. 平衡方程

对于平面应力问题，从图 1-2 所示的薄板上截取出一个微小的正六面体，沿 $x$、$y$、$z$ 方向的长度分别为 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 和 1，如图 1-4 所示。由于应力是位置坐标 $x$、$y$ 的函数，因此作用于 $x$ 轴正负面或 $y$ 轴正负面上的应力分量是不同的，有微小差量。如设作用于 $x$ 轴负面上的应力为 $\sigma_x$、$\tau_{xy}$，由于 $x$ 坐标的改变，则正面上的应力为 $\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x$、$\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x$；同样，作用于 $y$ 轴正负面上的应力分别为 $\sigma_y$、$\tau_{yx}$ 和 $\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\mathrm{d}y$、$\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y$。因为该六面体是微小的，所以各面上所受的应力可认为是均布的。如考虑体力，体力也可认为是均布的。体力沿 $x$、$y$ 轴的分量为 $X$、$Y$。

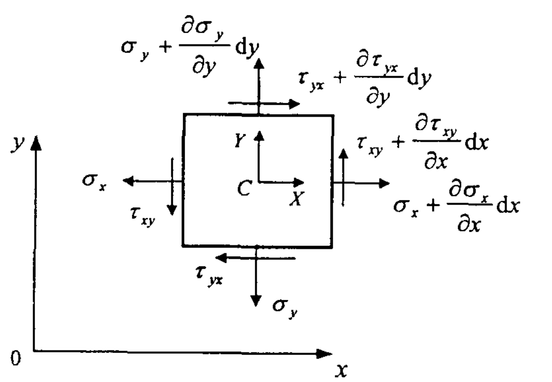


图 1-4　平面问题微体受力图

对于平面应变问题，由于沿长度方向所有横截面的情况都相同，所以只需考虑单位长度上的柱形体就够了，如图 1-3 所示。然后再在单位长度柱形体上沿坐标 $x$、$y$ 方向截取出一微小正六面体。该微体在 $x$、$y$ 方向的受力情况和平面应力问题是完全相同的，不同的是在 $z$ 方向还作用有自成平衡的正应力 $\sigma_z$，因为它不沿长度变化。所以平面应变问题的微体受力图也如图 1-4 所示。

根据力的平衡条件，图 1-4 所示的微体可列出两个独立的静力平衡方程。

如沿 $x$ 方向取力的平衡 $\sum F_x=0$，可得

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y-\sigma_x\mathrm{d}y+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x-\tau_{yx}\mathrm{d}x+X\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

约简后两边同除以 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，得

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0$$

同理,沿 $y$ 方向取力的平衡 $\sum F_y=0$,则得

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0$$

此外还有一个力矩平衡方程，如将微体上所有的力对中心 $C$ 点取力矩 $\sum M_C=0$，可以得到 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$。再次证明了剪应力互等定律。

于是平面问题中的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0\end{aligned}\right\}\tag{1-1}$$

以上在建立平衡方程时，采用了物体变形前的尺寸，这是因为这里讨论的是小变形问题，亦即物体受力后各点的位移都远远小于其原来的尺寸，且应变和转角都远小于1。这样，用变形前的尺寸来代替变形后的尺寸不会引起显著的误差，但方程却得到简化，在以后建立任何微分方程时，都将同样处理。

式(1-1)中两个微分方程包含有 $\sigma_x$、$\sigma_y$ 和 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ 三个未知量,所以是静不定问题,必须考虑变形关系,才能求解。

**2. 几何方程**

现在来推导平面问题中应变分量和位移分量间的关系式。过弹性体(图 1-2所示薄板或图 1-3 所示的单位长度柱形体）内的任意点 $P$,沿 $x$ 轴、$y$ 轴取微小长度的线段 $PA=\mathrm{d}x$、$PB=\mathrm{d}y$ ,如图 1-5 所示。假定弹性体变形后 $P$、$A$、$B$ 分别移动到 $P'$、$A'$、$B'$。设 $P$ 点移至 $P'$ 点的位移分量为 $u$、$v$。由于 $A$ 点横坐标比 $P$ 点有一增量 $\mathrm{d}x$,所以 $A$ 点移至 $A'$ 点的位移分量为 $u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$、$v+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$;同样,因 $B$ 点的纵坐标比 $P$ 点有一增量 $\mathrm{d}y$,所以 $B$ 点移至 $B'$ 点的位移分量为 $u+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$、$v+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$。

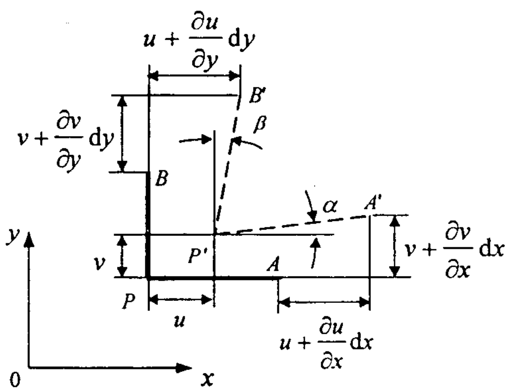



图1-5　点 $P$ 在 $x$-$y$ 平面中的位移

由于线段 $PA$ 和 $PB$ 变形后的转角 $\alpha$、$\beta$ 都很小,所以线段 $PA$ 的正应变 $\varepsilon_x$ 为

$$\varepsilon_x=\frac{P'A'-PA}{PA}\approx\frac{\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right)-u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

线段 $PB$ 的正应变 $\varepsilon_y$ 为

$$\varepsilon_y=\frac{P'B'-PB}{PB}\approx\frac{\left(v+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)-v}{\mathrm{d}y}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

又在小变形情况下，变形后的应变是远小于1 的,所以线段 $PA$ 的转角 $\alpha$ 为

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\right) - v}{(1 + \varepsilon_x)\mathrm{d}x} \approx \frac{\partial v}{\partial x}$$

线段 $PB$ 的转角 $\beta$ 为

$$\beta \approx \tan \beta = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right) - u}{(1 + \varepsilon_y)\mathrm{d}y} \approx \frac{\partial u}{\partial y}$$

故线段 $PA$ 与 $PB$ 之间的直角的变化,即剪应变 $\gamma_{xy}$为

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

于是,平面问题中的几何方程为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1-2}$$

**3. 物理方程**

在完全弹性的各向同性体内，应力分量和应变分量之间的关系，根据广义虎克定律可写成为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1 + \mu)}{E}\tau_{xy} \\
\gamma_{yz} &= \frac{2(1 + \mu)}{E}\tau_{yz} \\
\gamma_{zx} &= \frac{2(1 + \mu)}{E}\tau_{zx}
\end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

式中 $E$ 为材料的弹性模量；$\mu$ 为泊松比。

对于平面应力问题，$\sigma_z=0$、$\tau_{yz}=0$、$\tau_{zx}=0$。故式(1-3)中的第一、二、四式为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1 + \mu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

此即平面应力问题的物理方程。此外，(1-3)中的第三式成为

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

可以用来求薄板厚度的改变。又由式（1-3)中的第五、六式可见，$\gamma_{yz}=0$，$\gamma_{zx}=0$。

对于平面应变问题，$\varepsilon_z=0$、$\tau_{yz}=0$、$\tau_{zx}=0$。式(1-3)中的第三式成为

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$$

将上式代入式(1-3)中的第一、二式，并注意到第四式仍适用，经整理即得平面应变问题的物理方程为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right) \\
\varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right) \\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

此外，由式(1-3)中的第五、六式也有 $\gamma_{yz}=0$ 和 $\gamma_{zx}=0$。

比较式(1-4) 和(1-5) 可见两种平面问题的物理方程在形式上是相似的，仅系数不同。如果在平面应力问题的物理方程(1-4)中，将 $E$ 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$，$\mu$ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$，就得到平面应变问题的物理方程(1-5)。

以上导出的 2 个平衡方程(1-1)，3 个几何方程(1-2)和 3 个物理方程(1-4) 或(1-5)，是弹性力学平面问题的 8 个基本方程。这 8 个基本方程恰好含有 8 个未知函数：3 个应力分量($\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$)，3 个应变分量($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$)和 2 个位移分量($u,v$)。基本方程的数目和未知函数的数目相等，因此在适当的边界条件下是能得到解答的。

### 三、平面问题的边界条件

弹性力学问题的边界条件有位移边界条件、应力边界条件和混合边界条件三种。

**1. 位移边界条件**

若弹性体在边界上的位移分量 $u$、$v$ 是边界坐标的已知函数，则作为基本方程解的位移分量 $u$、$v$，在相应的边界上必须等于给定的位移，即要求

$$u = \bar{u}, \qquad v = \bar{v} \tag{1-6}$$

式(1-6)就是平面问题的位移边界条件。

**2. 应力边界条件**

若弹性体在边界上的面力分量 $\bar{X}$、$\bar{Y}$ 是边界坐标的已知函数，则作为基本方程解的应力分量 $\sigma_x$、$\sigma_y$、$\tau_{xy}$，在边界上应与给定的面力之间满足平衡关系。因此应力边界条件可由边界上的微体平衡条件得出。

在边界上截取微小单元体，如图 1-6 所示。用 $N$ 表示边界面 $AB$ 的外法线方向，并令其方向余弦为

$$\cos(N,x) = l, \qquad \cos(N,y) = m$$

设边界面 $AB$ 的长度为 $ds$，则截面 $PA$ 和 $PB$ 的长度分别为 $mds$ 和 $lds$。垂直于图面的尺寸仍取为一个长度单位。由平衡条件 $\sum F_x=0$，得

$$\bar{X}ds - \sigma_x lds - \tau_{yx} mds = 0$$

两边同除以 $ds$，则得

$$l\sigma_x + m\tau_{yx} = \bar{X}$$

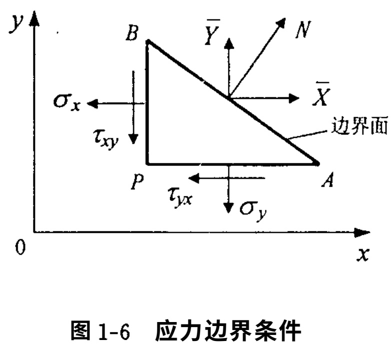



图 1-6　应力边界条件

同样,由平衡条件 $\sum F_y=0$,可得

$$m\sigma_y + l\tau_{xy} = Y$$

于是物体边界上各点的应力分量与面力分量之间的关系，亦即平面问题的应力边界条件为

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{yx} &= \overline{X} \\ m\sigma_y + l\tau_{xy} &= \overline{Y} \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

当边界垂直于某一坐标轴时，应力边界条件的形式将大为简化。在垂直于 $x$ 轴的边界上,$l=\pm 1$,$m=0$,应力边界条件简化为

$$\sigma_x = \pm X, \qquad \tau_{xy} = \pm Y$$

在垂直于 $y$ 轴的边界上,$l=0$,$m=\pm 1$,应力边界条件简化为

$$\tau_{yx} = \pm X, \qquad \sigma_y = \pm Y$$

可见，在这种特殊情况下，应力分量的边界值就等于对应的面力分量。

3. 混合边界条件

当物体的一部分边界具有已知位移，而另一部分边界具有已知面力时，则已知位移的边界可应用式(1-6),已知面力的边界可应用式(1-7)。

此外，还可能在同一部分边界上出现混合边界条件，即两个边界条件中的一个是位移边界条件，另一个则是应力边界条件。

## 四、圣维南原理

在求解弹性力学问题时，使应力分量、应变分量和位移分量完全满足基本方程并不困难,但要使边界条件也得到完全满足却往往是困难的。另外,在很多工程结构计算中,都会遇到这样的情况：在物体的一小部分边界上，仅仅知道物体所受的面力的合力，而其分布方式并不明确，因而无从考虑这部分边界上的应力边界条件。在这些情况下，圣维南原理有时可以提供很大的帮助。

圣维南原理可以这样来陈述：如果把物体的一小部分边界上的面力，换为分布不同但静力等效(主矢相同,主矩也相同)的面力,那么近处的应力将有显著的改变,而远处的应力所受的影响可以不计。

## 五、平面问题的解法

在弹性力学中，求解未知的应力分量、应变分量和位移分量，通常有位移解法和应力解法两种。

1. 位移解法

位移解法是以位移分量作为基本未知函数，综合运用平衡、几何和物理方程，得到只包含位移分量的微分方程。然后，由这些微分方程和边界条件求出位移分量，再由几何方程求出应变分量，由物理方程求出应力分量。

现在来导出按位移解法求解平面问题所需的微分方程和边界条件。

对于平面应力问题，可由物理方程(1-4)解出应力分量,得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)\\\sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)\\\gamma_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{1-8}$$

将几何方程(1-2)代入式(1-8)得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\\sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\\gamma_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}$$

再将式①代入平衡方程(1-1),简化后得

$$\left.\begin{aligned}\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}\right)+X=0\\\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right)+Y=0\end{aligned}\right\}\tag{1-9}$$

这就是按位移解法求解平面问题时所需的基本微分方程。

由微分方程(1-9)确定的位移解答在已知位移边界上应满足的条件仍为式(1-6)。当已知应力边界时，可将式①代入应力边界条件式(1-7),简化后得

$$\left.\begin{aligned}\frac{E}{1-\mu^2}\left[l\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+m\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]=\overline{X}\\\frac{E}{1-\mu^2}\left[m\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+l\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]=\overline{Y}\end{aligned}\right\}\tag{1-10}$$

此即用位移表示的应力边界条件，也就是按位移解法求解平面问题时所用的应力边界条件。

对于平面应变问题,只需在以上方程中将 $E$ 换为$\frac{E}{1-\mu^2}$,将 $\mu$ 换为$\frac{\mu}{1-\mu}$即可。

2. 应力解法

应力解法是以应力分量作为基本未知函数，综合运用平衡、几何和物理方程，得到只包含应力分量的微分方程。然后，由这些微分方程和应力边界条件求出应力分量，再由物理方程和几何方程依次求出应变分量和位移分量。

现在来导出按应力解法求解平面问题所需的微分方程。

为了消去位移分量，将几何方程(1-2)中的 $\varepsilon_x$ 对 $y$ 求二阶导数,$\varepsilon_y$ 对 $x$ 求二阶导数，然后相加得

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

由几何方程(1-2)中的第三式可见,这个等式右边括号中的表达式就等于 $\gamma_{xy}$,于是有

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\tag{1-11}$$

此关系式称为相容方程或变形协调方程。亦即，只有当 $\varepsilon_x$、$\varepsilon_y$、$\gamma_{xy}$满足这个方程时，变形才能协调。否则，若 $\varepsilon_x$、$\varepsilon_y$、$\gamma_{xy}$不满足这个方程，那么由几何方程(1-2)中的任何两个方程得到的位移分量，将与第三个方程不相容。这表明变形以后的物体不再是连续的，某些部分发生了互相脱离或互相侵入的情况。

为了消去应变分量，将物理方程代入式(1-11)，使相容方程中只包含应力分量，然后与平衡方程联立，就能解出应力分量了。

对于平面应力问题，将物理方程(1-4)代入式(1-11)，可得只包含应力分量的相容方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \mu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \mu\sigma_x) = 2(1+\mu)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad ②$$

利用平衡方程，上式可简化为更为简单的形式。为此，将平衡方程(1-1)的第一式对 $x$ 求导，第二式对 $y$ 求导，然后相加，并注意到 $\tau_{yx}=\tau_{xy}$，可得

$$2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \qquad ③$$

将式③代入式②，经整理即得用应力分量表示的相容方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\mu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \qquad (1\text{-}12)$$

这样，按应力解法求解平面应力问题时，应力分量 $\sigma_x$、$\sigma_y$、$\tau_{xy}$应当满足平衡方程(1-1)和以应力表示的相容方程(1-12)，当然也应当满足应力边界条件式(1-7)。

对于平面应变问题，只要在式(1-12)中将 $\mu$ 换为$\frac{\mu}{1-\mu}$就可以了。

六、常体力情况与应力函数

当所研究的问题中体力为常量时，如重力和平行移动时的惯性力，在这种情况下，以应力表示的相容方程(1-12)可简化成以下形式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \qquad (1\text{-}13)$$

或

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

式中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$，称作拉普拉斯算子。

这样，平衡方程(1-1)和相容方程(1-13)就组成了用应力法求解常体力问题时的基本方程，再加上应力边界条件(1-7)就可以用来求解平面问题。需要注意的是，这些方程中均不包含弹性常数。因此，若两个弹性体的边界形状相同，所受外力相同，那么无论这两个弹性体的材料是否相同，无论它们是平面应力问题还是平面应变问题，应力分量 $\sigma_x$、$\sigma_y$、$\tau_{xy}$的分布是相同的($\sigma_z$ 以及应变分量和位移分量不一定相同)。这一结论为用实验方法测定平面问题的应力提供了极大的方便，不仅可以用便于测量的材料代替不便于测量的材料制造模型，而且也可以用薄板模型代替长柱形模型。

下面讨论如何引入一个应力函数，使之能自动满足平衡方程。这样，求解三个未知应力分量的问题就可以简化为寻求一个应力函数的问题。

现考察平衡方程(1-1)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0\\\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0\end{aligned}\right\}$$

这是一个非齐次微分方程组，其解包括两部分，即任一个特解和相应的齐次方程的通解。

特解很容易找到，例如可以取下列形式

$$\sigma_x=-Xx,\qquad \sigma_y=-Yy,\qquad \tau_{xy}=0 \tag{④}$$

显然，式④是满足平衡方程(1-1)的。

为了求得齐次方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}=0\\\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}$$

的通解,将其改写为

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(-\tau_{yx}),\qquad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(-\tau_{xy})$$

根据微分方程理论,这就一定存在函数 $A(x,y)$和$B(x,y)$ ,使得

$$\sigma_x=\frac{\partial A}{\partial y},\qquad -\tau_{yx}=\frac{\partial A}{\partial x} \tag{⑤}$$

$$\sigma_y=\frac{\partial B}{\partial x},\qquad -\tau_{xy}=\frac{\partial B}{\partial y} \tag{⑥}$$

注意到 $\tau_{yx}=\tau_{xy}$ ,比较式⑤和式⑥中的第二式,可得

$$\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{\partial B}{\partial y}$$

同样,也一定存在某个函数 $\varphi(x,y)$ ,使得

$$A=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad B=\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{⑦}$$

将式⑦代回式⑤和⑥ ,即得齐次方程的通解为

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\qquad \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\qquad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \tag{⑧}$$

将通解式⑧和特解式④叠加，即得平衡方程(1-1)的全解

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-Xx,\qquad \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-Yy,\qquad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \tag{1-14}$$

这表明应力分量 $\sigma_x$、$\sigma_y$、$\tau_{xy}$取决于一个共同的未知函数 $\varphi(x,y)$ ,且不论 $\varphi$是什么样的函数,由式(1-14) 表示的应力分量总能满足平衡方程(1-1)。这个函数$\varphi$就称做平面问题的应力函数。此外还可以看出，在任何一个应力函数中增添或删除一个线性函数，对应力的分布没有影响。

为了使应力分量 $\sigma_x$、$\sigma_y$、$\tau_{xy}$同时也能满足变形协调条件，将式(1-14 )代入相容方程(1-13),可得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-Xx+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-Yy\right)=0$$

由于 $X$、$Y$ 为常量，式中后一括弧中的 $Xx$、$Yy$ 并不起作用，可以删去。于是上式变为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)=0 \tag{1-15}$$

或展开为

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0$$

也可简写为

$$\nabla^2\nabla^2\varphi=0 \text{ 或 } \nabla^4\varphi=0$$

这就是用应力函数表示的相容方程，它是一个双调和方程，因此满足这个方程的函数 $\varphi$ 称为双调和函数。

如果体力可以不计，即 $X=Y=0$，式(1-14)简化为

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\qquad \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\qquad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \tag{1-16}$$

综上可见，当体力为常量时，按应力法解平面问题归结为在边界条件下寻求满足双调和方程的双调和函数。因此，只要从相容方程(1-15)及相应的边界条件解出应力函数 $\varphi$，即可由式(1-14)或(1-16)求出应力分量。但是，在求解具体问题时，寻求满足式(1-15)的应力函数 $\varphi$ 并不难，而要它严格地满足边界条件却是很困难的。因此，在具体求解问题时，一般多采用逆解法或半逆解法。

## 七、逆解法和半逆解法

所谓逆解法，就是先假设各种形式的满足相容方程（1-15）的应力函数 $\varphi$，由式(1-14)或(1-16)求出应力分量。然后根据应力边界条件来考察在各种形状的弹性体上，这些应力分量对应于怎样的面力，从而可知所设定的应力函数可以解决什么问题。

例如设应力函数 $\varphi$ 为二次多项式

$$\varphi(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$$

显然，无论式中系数 $a$、$b$、$c$ 取何值，都能满足相容方程(1-15)。为明了起见，现分别考察式中每一项所能解决的问题。

对于 $\varphi(x,y)=ax^2$，如不计体力，由式(1-16)可得对应的应力分量为

$$\sigma_x=0,\qquad \sigma_y=2a,\qquad \tau_{xy}=\tau_{yx}=0$$

这表明 $\varphi(x,y)=ax^2$ 代表了矩形板在 $y$ 方向受均匀拉伸或压缩的情况(图 1-7(a))。

对于 $\varphi(x,y)=bxy$，应力分量为

$$\sigma_x=0,\qquad \sigma_y=0,\qquad \tau_{xy}=\tau_{yx}=-b$$

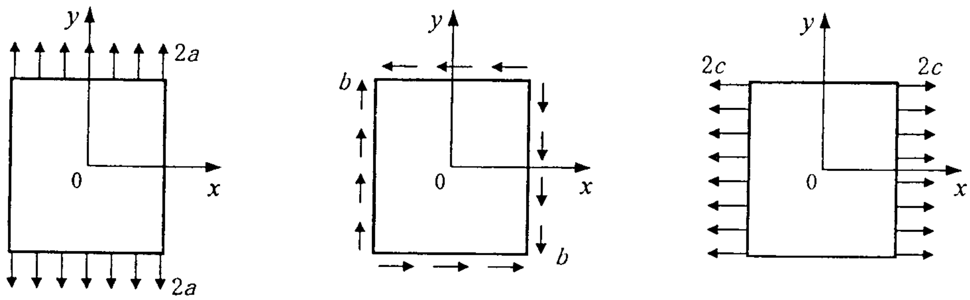
可见，$\varphi(x,y)=bxy$ 代表了矩形板受纯剪切的情况(图 1-7(b))。

对于 $\varphi(x,y)=cy^2$，应力分量为

$$\sigma_x=2c,\qquad \sigma_y=0,\qquad \tau_{xy}=\tau_{yx}=0$$

表明 $\varphi(x,y)=cy^2$ 代表了矩形板在 $x$ 方向受均匀拉伸或压缩的情况(图 1-7(c))。

所谓半逆解法，是针对所要求解的问题，根据弹性体的边界形状和受力情况，假设



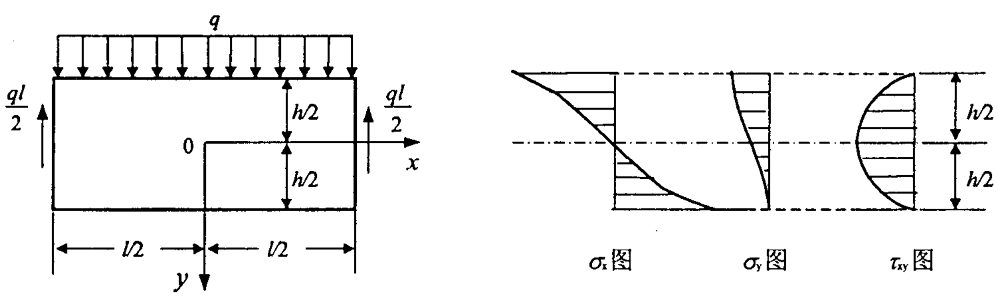

(a) $\varphi=ax^2$　　(b) $\varphi=bxy$　　(c) $\varphi=cy^2$

图1-7　二次式应力函数的应力分布

部分或全部应力分量为某种形式的函数，从而推出应力函数 $\varphi$,然后再考察这个应力函数是否满足相容方程，以及由这个应力函数得出的应力分量是否满足应力边界条件。如果相容方程和边界条件都能满足，自然就得出正确的解答；如果某一条件不能满足，就应另作假设,重新考虑。

下面通过一个具体实例，阐明选择应力函数的方法及半逆解法的步骤。

试考察图 1-8(a)所示的简支梁。梁的长度为 $l$,深度为 $h$,承受均布载荷 $q$,由两端的支反力 $\frac{ql}{2}$ 维持平衡。为了方便取厚度为单位 1,并建立坐标如图所示。




(a)　　(b)

图 1-8　两端简支均布载荷梁

根据该梁的几何形状和受力特点,在上、下边界上,应力分量 $\sigma_y$ 分别等于$-q$ 和 0,而 $q$ 是常量,因而可以假设 $\sigma_y$ 在梁中的分布不随 $x$ 而变,只是 $y$ 的函数,即 $\sigma_y=f(y)$。于是由式(1-16)中的第二式有

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=f(y)$$

对 $x$ 连续两次积分,得

$$\varphi=\frac{x^2}{2}f(y)+xf_1(y)+f_2(y) \tag{⑨}$$

其中 $f(y)$、$f_1(y)$和 $f_2(y)$是待定函数。

考虑到问题的对称性,由于 $yz$ 面是梁和荷载的对称面，所以应力分布应对称于 $yz$

面，$\sigma_x$ 和 $\sigma_y$ 应是 $x$ 的偶函数，$\tau_{xy}$应是 $x$ 的奇函数，因而 $\varphi$ 应是 $x$ 的偶函数。于是，由式⑨可见，$f_1(y)=0$。这样，式⑨就简化为

$$\varphi=\frac{x^2}{2}f(y)+f_2(y) \tag{⑩}$$

现在来考察式⑩所表示的应力函数是否满足相容方程。为此，求出式⑩的 4 阶导数

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}=0,\qquad \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}=\frac{\mathrm{d}^2 f(y)}{\mathrm{d}y^2},\qquad \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=\frac{x^2}{2}\frac{\mathrm{d}^4 f(y)}{\mathrm{d}y^4}+\frac{\mathrm{d}^4 f_2(y)}{\mathrm{d}y^4}$$

代入式（1-15），可得各个待定函数应满足的方程为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^4 f(y)}{\mathrm{d}y^4}x^2+\frac{\mathrm{d}^4 f_2(y)}{\mathrm{d}y^4}+2\frac{\mathrm{d}^2 f(y)}{\mathrm{d}y^2}=0$$

这是关于 $x$ 的二次方程，但要求它对梁内的所有 $x$ 值都应该得以满足。因此，该二次方程的系数和自由项都必须等于零，即

$$\frac{\mathrm{d}^4 f(y)}{\mathrm{d}y^4}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}^4 f_2(y)}{\mathrm{d}y^4}+2\frac{\mathrm{d}^2 f(y)}{\mathrm{d}y^2}=0$$

将第一式连续积分得

$$f(y)=Ay^3+By^2+Cy+D \tag{⑪}$$

将式⑪代入第二式后连续积分可得

$$\frac{\mathrm{d}^4 f_2(y)}{\mathrm{d}y^4}=-2\frac{\mathrm{d}^2 f(y)}{\mathrm{d}y^2}=-12Ay-4B$$

$$f_2(y)=-\frac{1}{10}Ay^5-\frac{1}{6}By^4+Fy^3+Gy^2 \tag{⑫}$$

其中的一次项及常数项已被略去，因为它们不影响应力分布。将式⑪和⑫代入式⑩，得应力函数

$$\varphi=\frac{x^2}{2}(Ay^3+By^2+Cy+D)-\frac{1}{10}Ay^5-\frac{1}{6}By^4+Fy^3+Gy^2 \tag{⑬}$$

将式⑬代入式（1-16），得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=x^2(3Ay+B)-2Ay^3-2By^2+6Fy+2G\\ \sigma_y&=Ay^3+By^2+Cy+D\\ \tau_{xy}&=-x(3Ay^2+2By+C)\end{aligned}\right\} \tag{⑭}$$

这些应力分量是满足平衡方程和相容方程的。因此，如果能够适当选择常数 $A$、$B$、$C$、$D$、$F$、$G$，使所有的边界条件都被满足，则上式给出的应力分量就是正确的解答。

通常梁的长度远大于深度，其上、下两个边界占全部边界的绝大部分，因而是主要边界。在主要边界上，边界条件必须完全满足，而在次要边界（两端）上，如果边界条件不能完全满足，可以引用圣维南原理，使其近似满足，仍然可以得出有用的解答。

基于这个理由，先考虑上、下两边的边界条件

$$(\sigma_y)_{y=h/2}=0,\qquad (\sigma_y)_{y=-h/2}=-q,\qquad (\tau_{xy})_{y=\pm h/2}=0$$

将式⑭代入，并注意到 $x$ 是任意的，故有

$$\frac{h^3}{8}A+\frac{h^2}{4}B+\frac{h}{2}C+D=0$$

$$-\frac{h^3}{8}A+\frac{h^2}{4}B-\frac{h}{2}C+D=-q$$

$$\frac{3h^2}{4}A+hB+C=0$$

$$\frac{3h^2}{4}A-hB+C=0$$

由于上列 4 个方程是相互独立的，且只包含 4 个未知数，因而可联立解得

$$A=-\frac{2q}{h^3},\qquad B=0,\qquad C=\frac{3q}{2h},\qquad D=-\frac{q}{2} \tag{15}$$

将式⑮代入式⑭，得

$$\sigma_x=-\frac{6q}{h^3}x^2y+\frac{4q}{h^3}y^3+6Fy+2G \tag{16}$$

$$\sigma_y=-\frac{2q}{h^3}y^3+\frac{3q}{2h}y-\frac{q}{2} \tag{17}$$

$$\tau_{xy}=\frac{6q}{h^3}xy^2-\frac{3q}{2h}x \tag{18}$$

然后再考虑两端的边界条件。由于问题的对称性，只须考虑其中的一端，例如右端。在梁的右端，没有水平面力，这就要求无论 $y$ 取何值，都有$(\sigma_x)_{x=l/2}=0$。由式⑯可见，这是不可能满足的，除非 $q=0$。因而，只能要求$(\sigma_x)_{x=l/2}$在这部分边界上为自平衡力系，亦即要求

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_x)_{x=l/2}\mathrm{d}y=0$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_x)_{x=l/2}y\mathrm{d}y=0$$

将式⑯代入得

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(-\frac{3ql^2}{2h^3}y+\frac{4q}{h^3}y^3+6Fy+2G\right)\mathrm{d}y=0$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}}\left(-\frac{3ql^2}{2h^3}y+\frac{4q}{h^3}y^3+6Fy+2G\right)y\mathrm{d}y=0$$

利用被积函数的奇偶性，积分以上两式，不难得出

$$G=0,\qquad F=\frac{ql^2}{4h^3}-\frac{q}{5h} \tag{19}$$

将式⑲代入式⑯，得

$$\sigma_x=-\frac{6q}{h^3}x^2y+\frac{4q}{h^3}y^3+3\left(\frac{ql^2}{2h^3}-\frac{q}{5h}\right)y \tag{20}$$

另外，在梁的右端，剪应力的合力应等于向上的支反力$\frac{ql}{2}$，这就要求

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\tau_{xy})_{x=l/2}\mathrm{d}y=-\frac{ql}{2}$$

将式⑱代入，上式成为

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\frac{3ql}{h^3}y^2-\frac{3ql}{4h}\right)\mathrm{d}y=-\frac{ql}{2}$$

积分后可见这一条件是满足的。

将⑳、⑰、⑱三式合在一起，并略加整理，得应力分量的最后解答为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{6q}{h^3}\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right)y+\frac{q}{h}\left(4\frac{y^2}{h^2}-\frac{3}{5}\right)y\\\sigma_y&=-\frac{q}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right)\left(1-\frac{2y}{h}\right)^2\\\tau_{xy}&=-\frac{6q}{h^3}x\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)\end{aligned}\right\}\qquad ㉑$$

各应力分量沿深度方向的变化大致如图 1-8(b)所示。

而在材料力学中，这一问题的解答为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{6q}{h^3}\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right)y\\\tau_{xy}&=-\frac{6q}{h^3}x\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)\end{aligned}\right\}\qquad ㉒$$

比较式㉑与式㉒可见，剪应力 $\tau_{xy}$与材料力学的结果完全一样；横向应力 $\sigma_y$ 乃为梁内纵向线维间的挤压应力，其最大值为 $q$，发生在梁顶，而在材料力学中假设为零 弯曲应力 $\sigma_x$ 中的第一项是主要项，与材料力学的结果相同，第二项则是弹性力学提出的修正项。对于通常的浅梁，修正项很小，可以不计。对于较深的梁，修正项则须予以注意。读者可以自行证明 当梁的深度为跨度的一半时，修正项才仅仅是主要项的 1/15。

## 第三节　弹性力学平面问题的极坐标解答

上节中讨论的所有解答都是在直角坐标下导出的。但有些弹性体，如圆形、楔形、扇形等形状的物体，采用极坐标较为方便。本节将讨论用极坐标解答平面问题。

### 一、极坐标中的基本方程

**1. 平衡方程**

在极坐标中，平面内任一点$P$ 的位置用径向坐标$r$ 和周向(或环向)坐标$\theta$ 来表示。为表明极坐标中的应力分量，从所考察的薄板或长柱形体中沿坐标方向取出微体，如图1-9所示。沿 $r$方向的正应力称为径向正应力，用 $\sigma_r$ 表示 沿 $\theta$ 方向的正应力称为周向或环向正应力，用 $\sigma_\theta$表示；剪应力用 $\tau_{r\theta}$及 $\tau_{\theta r}$表示，根据剪应力互等定理，$\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}$。各应力分量的正负号规定和直角坐标中一样，只是 $r$ 方向代替了 $x$方

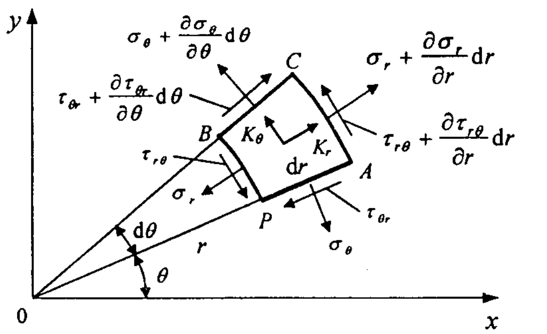



图 1-9　极坐标中微体受力图

向，$\theta$ 方向代替了 $y$ 方向。图中所示的应力分量都是正的。微元体沿坐标方向的体力分量分别用 $K_r$ 及 $K_\theta$ 来表示。

与直角坐标相似，由于应力随坐标 $r$ 和 $\theta$ 变化，设 $PB$ 面上的应力为 $\sigma_r$、$\tau_{r\theta}$，则 $AC$ 面上的应力为 $\sigma_r+\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}\mathrm{d}r$、$\tau_{r\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}\mathrm{d}r$；同理，$PA$ 和 $BC$ 面上的应力分别为 $\sigma_\theta$、$\tau_{r\theta}$ 和 $\sigma_\theta+\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta$、$\tau_{\theta r}+\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta$。

为方便起见，取微体厚度为单位长度。将微体所受各力投影到过其中心的径向轴上，列出径向平衡方程为

$$\left(\sigma_r+\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}\mathrm{d}r\right)(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta-\sigma_r r\mathrm{d}\theta+\left(\tau_{\theta r}+\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}r\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}-$$
$$\tau_{\theta r}\mathrm{d}r\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}-\left(\sigma_\theta+\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}r\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}-\sigma_\theta\mathrm{d}r\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}+K_r r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=0$$

由于 $\mathrm{d}\theta$ 是微小的，故 $\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\approx\frac{\mathrm{d}\theta}{2}$，$\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\approx1$。代入上式，然后各项同除以 $r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$，并略去高阶微量，得

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+K_r=0$$

将微体所受各力投影到过其中心的周向轴上，列出周向平衡方程为

$$\left(\sigma_\theta+\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}r\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}-\sigma_\theta\mathrm{d}r\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}+\left(\tau_{r\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}\mathrm{d}r\right)(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta-$$
$$\tau_{r\theta}r\mathrm{d}\theta+\left(\tau_{\theta r}+\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}r\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}+\tau_{\theta r}\mathrm{d}r\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}+K_\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=0$$

将 $\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\approx\frac{\mathrm{d}\theta}{2}$，$\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\approx1$ 代入上式，并注意到 $\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}$，然后各项同除以 $r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$，略去高阶微量，得

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}+K_\theta=0$$

于是，极坐标中的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+K_r=0\\&\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}+K_\theta=0\end{aligned}\right\}\tag{1-17}$$

**2. 几何方程**

在极坐标中，用 $u$ 和 $v$ 分别表示径向位移和周向位移，用 $\varepsilon_r$、$\varepsilon_\theta$ 和 $\tau_{r\theta}$ 分别表示径向正应变、周向正应变和径向与周向线段之间的直角变化即剪应变。

现在来推导极坐标中的几何方程。在推导过程中，由于变形很小，可不计高阶微量，且可用叠加原理。

首先，假设只有径向位移没有周向位移，如图1-10(a)所示。由于径向位移 $u$，径向线段 $PA$ 移到 $P'A'$，周向线段 $PB$ 移到 $P'B'$。$P$、$A$、$B$ 三点的位移分别为 $u$、$u+\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}r$ 和 $u+\frac{\partial u}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta$。