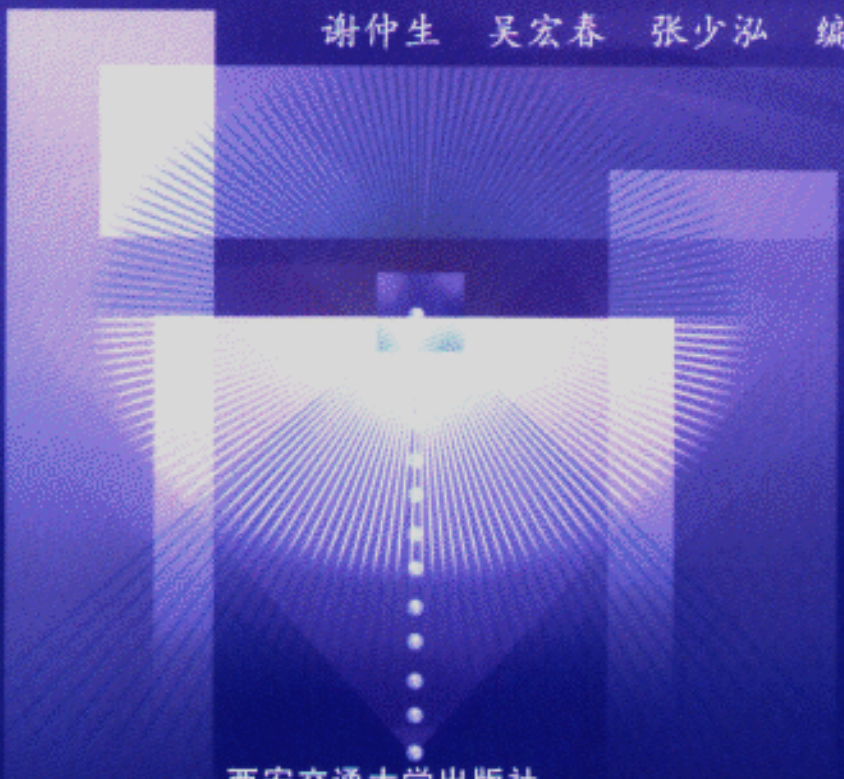
普通高等教育“十五”国家级规划教材

核反应堆物理分析

（修订本）

谢仲生　主编
谢仲生　吴宏春　张少泓　编著



西安交通大学出版社
原子能出版社

需要全本请访问 www.ertongbook.com

普通高等教育“十五”国家级规划教材

核反应堆物理分析

（修订本）

谢仲生　主编

谢仲生　吴宏春　张少泓　编著

西安交通大学出版社

原 子 能 出 版 社

内容简介

本书介绍核反应堆物理的基础理论、物理过程和分析计算方法。内容包括:与堆物理有关的核物理知识,中子在介质中的慢化和扩散,临界理论,非均匀堆的计算、燃耗、反应性控制、反应堆动力学和堆芯燃料管理。

本书是高等学校核能科学与工程专业的教材,也可供核科学与技术有关专业的工程技术人员及研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

核反应堆物理分析(修订本)/谢仲生主编.—西安:西安交通大学出版社,2004.7
ISBN 7-5605-1810-9

Ⅰ.核… Ⅱ.谢… Ⅲ.反应堆物理学 Ⅳ.TL32
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 127203 号

书　　名	核反应堆物理分析(修订本)
主　　编	谢仲生
出版发行	西安交通大学出版社 原 子 能 出 版 社
地　　址	西安市兴庆南路 25 号(邮编:710049)
电　　话	(029)82668357　82667874(发行部) (029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷	西安东江印务有限公司
字　　数	369 千字
开　　本	727mm×960mm　1/16
印　　张	20
版　　次	2004 年 7 月第 1 版　2004 年 7 月第 1 次印刷
印　　数	1～1 000
书　　号	ISBN 7-5605-1810-9/TL·6
定　　价	26.00 元

版权所有　侵权必究

前　言

《核反应堆物理分析》(原子能出版社,1980 年)自出版以来,已经历了两次修订再版,并被确定为全国高等教育教材,为许多高等院校所采用,对我国核反应堆工程及核电人才的培养起到了积极的作用。该教材于 1987 年获得了原核工业部优秀教材特等奖,1997 年获核工业总公司科学技术进步三等奖。

近年来,核科学技术,特别是计算机和计算科学的迅速发展,显著地促进了核反应堆物理理论与计算方法的发展。特别是近 20 年来,随着核能事业的发展,许多有效的、高精度的计算方法和计算软件已经在工程设计中获得了广泛的应用。原教材中的部分内容,如传统的四因子理论和计算方法已难以适应现代核设计的要求。因而,许多工程技术人员和高等学校的教师们从他们工程实践和近年来的教学实际经验出发,都深感原来的《核反应堆物理分析》教材已适应不了当前核能发展和教学的需要,希望能对该书在原来的基础上作较大的修改,并补充反映近年来反应堆物理理论、核燃料管理计算以及设计方法方面最新发展的内容。这就是本书编写的由来。2002 年教育部经专家评审,批准将本书列入了国家“十五”重点教材建设规划的选题。

本书是在原教材《核反应堆物理分析》(谢仲生主编,原子能出版社,1994年第3版)及其改编本《核反应堆物理理论与计算方法》(谢仲生、张少泓编著,西安交通大学出版社,2000年)两本书的基础上修订编写而成。着重介绍核反应堆物理的基础理论和计算方法。在编写中努力贯彻理论联系实际和少而精的原则,并尽可能地反映近20年来新发展的反应堆物理计算方法。在内容选择和安排上,力求做到由浅入深、深入浅出,尽量避免艰深的理论和繁杂的数学推导,对于各种计算方法和程序,着重阐述它们的基本原理、算法思想及其共性的分析方法;力求做到物理概念清晰、结合工程实际,便于读者理解和掌握方法的实质与应用。

全书共分10章。前3章讨论中子在介质中运动的基本规律(慢化和扩散);第4,5,6章讨论反应堆临界理论和分群扩散理论;第7,8,9章则属于反应堆物理动态问题,包括燃耗与中毒,反应性控制和反应堆动力学;第10章介绍压水堆的堆芯核燃料管理。书中带*号的章节属于参考性内容,可根据具体情况选用,也可作为学生课外阅读的参考资料。由于各高校培养目标和教学时数不同,使用本书时,可根据具体情况对部分章节内容作适当的删减或补充。本书讲授学时(不含带*号章节)建议为60～70学时。

阅读本书的读者应具有高等数学、原子核物理、数学物理方法和数学分析等方面知识。

本书由西安交通大学谢仲生教授主编并承担第3,6,7,8,9和第10章的编写,吴宏春教授参加第1,2章的编写,上海交通大学张少泓副教授参加第4,5章的编写。上海核工程研究设计院司胜义高级工程师参加第10章4.2节中PEARLS程序系统一节的编写。本书由中国核动力研究设计院章宗耀研究员和中国原子能科学研究院罗璋琳教授审校。本书的出版还得到西安交通大学出版社李志丹编辑和原子能出版社张辉编辑的帮助。作者在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限,工程实践经验不足,书中难免会有疏漏和不当之处,恳切地希望读者批评指正。

编者

2003年10月于西安交通大学

需要全本请访问 www.ertongbook.com



目　　录

第1章　核反应堆的核物理基础

1.1　中子与原子核的相互作用 …… (2)
1.1.1　中子 …… (2)
1.1.2　中子与原子核相互作用的机理 …… (2)
1.1.3　中子的散射 …… (4)
1.1.4　中子的吸收 …… (6)
1.2　中子截面和核反应率 …… (7)
1.2.1　微观截面 …… (7)
1.2.2　宏观截面、平均自由程 …… (8)
1.2.3　核反应率、中子通量密度和平均截面 …… (11)
1.2.4　截面随中子能量的变化 …… (14)
1.2.5　核数据库 …… (18)
1.3　共振吸收 …… (21)
1.3.1　共振截面——单能级布赖特-维格纳公式 …… (21)
1.3.2　多普勒效应 …… (22)

1.4 核裂变过程 …… (24)
1.4.1 裂变能量的释放、反应堆功率和中子通量密度的关系 …… (24)
1.4.2 裂变产物与裂变中子的发射 …… (26)
1.5 链式裂变反应 …… (29)
1.5.1 自续链式裂变反应和临界条件 …… (29)
1.5.2 热中子反应堆内的中子循环 …… (32)
参考文献 …… (34)
习题 …… (34)

第2章 中子慢化和慢化能谱

2.1 中子的弹性散射过程 …… (37)
2.1.1 弹性散射时能量的变化 …… (37)
2.1.2 散射后中子能量的分布 …… (39)
2.1.3 平均对数能降 …… (41)
2.1.4 平均散射角余弦 …… (42)
2.1.5 慢化剂的选择 …… (43)
2.1.6 中子的平均寿命 …… (44)
2.2 无限均匀介质内中子的慢化能谱 …… (45)
2.3 均匀介质中的共振吸收 …… (49)
2.3.1 均匀介质内有效共振积分及逃脱共振俘获概率 …… (49)
2.3.2* 有效共振积分的近似计算 …… (51)
2.4 热中子能谱和热中子平均截面 …… (54)
2.4.1 热中子能谱 …… (54)
2.4.2 热中子的平均截面 …… (57)
参考文献 …… (58)
习题 …… (58)

第3章 中子扩散理论

3.1 单能中子扩散方程 …… (62)
3.1.1 斐克定律 …… (62)
3.1.2 单能中子扩散方程的建立 …… (67)
3.1.3 扩散方程的边界条件 …… (69)
3.1.4 斐克定律和扩散理论的适用范围 …… (71)
3.2 非增殖介质内中子扩散方程的解 …… (72)

3.3* 反照率 …… (77)
3.4 扩散长度、慢化长度和徙动长度 …… (78)
参考文献 …… (83)
习题 …… (83)

第4章 均匀反应堆的临界理论

4.1 均匀裸堆的单群理论 …… (88)
4.1.1 均匀裸堆的单群扩散方程的解 …… (89)
4.1.2 热中子反应堆的临界条件 …… (91)
4.1.3 几种几何形状裸堆的几何曲率和中子通量密度分布 …… (94)
4.1.4 反应堆曲率和临界计算任务 …… (98)
4.1.5 单群理论的修正 …… (99)
4.2 有反射层反应堆的单群扩散理论 …… (101)
4.2.1 反射层的作用 …… (101)
4.2.2 一侧带有反射层的反应堆 …… (101)
4.2.3 反射层节省 …… (107)
4.3 中子通量密度分布不均匀系数和功率分布展平的概念 …… (109)
参考文献 …… (111)
习题 …… (111)

第5章 分群扩散理论

5.1 与能量相关的中子扩散方程和分群扩散理论 …… (115)
5.1.1 与能量相关的中子扩散方程 …… (115)
5.1.2 分群扩散理论及多群中子扩散方程 …… (117)
5.1.3 群常数的计算 …… (119)
5.2 双群扩散理论 …… (121)
5.2.1 双群方程 …… (122)
5.2.2 双群方程的解 …… (123)
5.2.3 双群临界方程及中子通量密度分布 …… (127)
5.3 多群扩散方程的数值解法 …… (129)
5.3.1 源迭代法 …… (130)
5.3.2 二维扩散方程的数值解法 …… (131)
参考文献 …… (137)
习题 …… (138)

第6章　栅格的非均匀效应与均匀化群常数的计算

6.1　栅格的非均匀效应 …… (139)
6.2　栅格的均匀化处理 …… (141)
6.2.1　栅格的均匀化 …… (141)
6.2.2　堆芯的均匀化截面的计算 …… (143)
6.3　栅元均匀化群常数的计算 …… (146)
6.3.1　积分输运理论的基本方程 …… (147)
6.3.2　碰撞概率方程的解及少群常数的计算 …… (149)
6.4　燃料组件内均匀化通量密度分布及少群常数的计算 …… (150)
6.5　共振区群常数的计算 …… (152)
6.5.1　非均匀栅元有效共振积分的计算 …… (153)
6.5.2　等价原理 …… (155)
6.5.3* 互屏(丹可夫)效应 …… (157)
6.5.4　温度对共振吸收的影响 …… (158)
6.5.5　共振区群常数的计算 …… (160)
6.5.6* 有效共振积分的半经验公式 …… (161)
6.6　栅格几何参数的选择 …… (161)
参考文献 …… (164)
习题 …… (164)

第7章　反应性随时间的变化

7.1　核燃料中重同位素成分随时间的变化 …… (165)
7.1.1　重同位素燃耗链及裂变产物链 …… (165)
7.1.2　核燃料中重同位素的燃耗方程 …… (167)
7.1.3　燃耗方程的求解 …… (169)
7.2　裂变产物^{135}Xe和^{149}Sm的中毒 …… (173)
7.2.1　^{135}Xe中毒 …… (173)
7.2.2　^{149}Sm中毒 …… (185)
7.3　反应性随时间的变化与燃耗深度 …… (187)
7.3.1　反应性随时间的变化与堆芯寿期 …… (187)
7.3.2　燃耗深度 …… (190)
7.4　核燃料的转换与增殖 …… (191)
参考文献 …… (196)

习题 …… (197)

第8章 温度效应与反应性控制

8.1 反应性系数 …… (200)
8.1.1 反应性温度系数及其对核反应堆稳定性的影响 …… (200)
8.1.2 燃料温度系数 …… (202)
8.1.3 慢化剂温度系数 …… (203)
8.1.4 其它反应性系数 …… (204)
8.1.5 温度系数的计算 …… (206)
8.2 反应性控制的任务和方式 …… (207)
8.2.1 反应性控制中所用的几个物理量 …… (207)
8.2.2 反应性控制的任务 …… (208)
8.2.3 反应性控制的方式 …… (209)
8.3 控制棒控制 …… (210)
8.3.1 控制棒的作用和一般考虑 …… (210)
8.3.2 控制棒价值的计算 …… (211)
8.3.3 控制棒插入深度对控制棒价值的影响 …… (212)
8.3.4 控制棒间的干涉效应 …… (215)
8.3.5 控制棒插入不同深度对堆芯功率分布的影响 …… (216)
8.4 可燃毒物控制 …… (217)
8.4.1 可燃毒物的作用 …… (217)
8.4.2 可燃毒物的布置及其对反应性的影响 …… (219)
8.4.3 可燃毒物的计算 …… (222)
8.5 化学补偿控制 …… (222)
参考文献 …… (226)
习题 …… (226)

第9章 核反应堆动力学

9.1 缓发中子的作用 …… (228)
9.2 点堆中子动力学方程 …… (230)
9.3 阶跃扰动时点堆模型动态方程的解 …… (234)
9.4 反应堆周期 …… (238)
9.4.1 反应堆周期 …… (238)
9.4.2 不同反应性引入时反应堆的响应特性 …… (240)

9.5* 点堆动力学方程的近似解法 …… (242)
9.5.1 单组缓发中子近似 …… (242)
9.5.2 常数缓发中子源近似 …… (245)
9.5.3 瞬跳近似 …… (245)
9.6 点堆动力学方程的数值解法 …… (246)
参考文献 …… (250)
习题 …… (251)

第10章* 压水堆堆芯燃料管理

10.1 核燃料管理的主要任务 …… (252)
10.1.1 核燃料管理中的基本物理量 …… (252)
10.1.2 核燃料管理的主要任务 …… (253)
10.2 多循环燃料管理 …… (255)
10.2.1 平衡循环及各参数之间的关系 …… (255)
10.2.2 初始循环与过渡循环 …… (261)
10.3 单循环燃料管理 …… (263)
10.3.1 堆芯换料方案 …… (263)
10.3.2 堆芯燃料管理计算 …… (267)
10.4 堆芯换料设计的优化 …… (270)
10.4.1 堆芯换料设计优化模型 …… (270)
10.4.2 堆芯换料设计优化方法简介 …… (272)
参考文献 …… (284)

附录

附录1 国际单位制(SI) …… (286)
附录2 基本常数 …… (288)
附录3 元素与一些分子的截面和核参数 …… (289)
附录4 非 $1/v$ 因子 …… (295)
附录5 δ 函数 …… (296)
附录6 $\mathrm{E}n(x)$ 函数 …… (296)
附录7 误差函数 $\mathrm{erf}(x)$ …… (297)
附录8 贝塞尔函数 …… (297)

索引

需要全本请访问 www.ertongbook.com

第7章 反应性随时间的变化

前面各章主要是分析稳态情况下的反应堆物理问题，有关的物理量不随时间变化。但是，运行中的核反应堆由于易裂变核素的裂变和新的易裂变核素的产生、裂变产物的积累、冷却剂温度的变化和控制棒的移动等原因，反应堆的许多物理量，例如反应性、燃料的同位素成分和中子通量密度等，将不断地随时间而变化。从本章开始将分析在动态条件下的反应堆物理问题和一些参量的变化，这时有关的物理量将要涉及到时间变量，这部分内容通常称为反应堆动态学。

动态分析中所涉及到的物理问题按其时间特性可分为两类：其一是研究核燃料同位素和裂变产物同位素成分随时间的变化以及它们对反应性和中子通量密度分布的影响等，这些量随时间的变化速率是很缓慢的（一般以小时或日为单位来度量）；其二是研究在反应堆的启动、停堆和功率调节过程中，中子通量密度和功率随时间的变化，这种变化是很迅速的（一般以秒为单位来度量），这一类问题通常称为中子动力学问题。

关于中子动力学问题将在第9章中详细地研究。本章主要研究前一类问题，其中包括：核燃料同位素成分的变化和燃耗；裂变产物同位素的生成与消耗；反应堆启动和停堆后^{135}Xe和^{149}Sm中毒随时间的变化；反应性随时间的变化；堆芯寿期、燃耗深度以及核燃料的转换与循环等问题。

7.1 核燃料中重同位素成分随时间的变化

7.1.1 重同位素燃耗链及裂变产物链

在反应堆的运行中，核燃料中易裂变同位素不断地燃耗。根据粗略的估计，一个电功率为1 000 MW的核电厂每天大约要消耗3 kg左右的^{235}U。另一方面可转换材料（如^{238}U或^{232}Th）俘获中子后又转换成易裂变同位素（如^{239}Pu或^{233}U）。同

时由于裂变将产生 300 多种裂变产物。因此，核燃料中各种重同位素的成分及其核密度将随反应堆的运行时间不断地变化。核燃料的燃耗链与所采用燃料循环类型有关。图 7－1给出目前热中子反应堆铀-钚燃料循环过程中的燃耗链图。

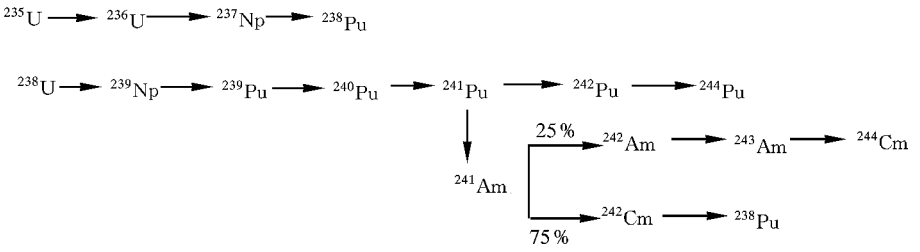


图 7－1　铀-钚燃料循环中重同位素燃耗链

应该指出，上图中所列出的燃耗链是经过简化了的，只是保留了工程计算中有重要意义的一些核素，略去了一些半衰期比较短或吸收截面比较小的中间元素的作用。例如图 7－1中从^{238}U 到^{240}Pu 的实际链是如图 7－2所示。这里我们略去了^{239}U，^{240}U 和^{240}Np 的作用。这是因为^{239}U 的吸收截面很小(22b)而且半衰期又很短，绝大部分的^{239}U 都通过 β^- 衰变成了^{239}Np，而生成的^{240}U 是极少数。同理，从^{239}Np 变成^{240}Np 也是极少数。因而^{240}Np 的核密度很小，它对^{240}Pu 的贡献更小，所以可以忽略不计。对其它的一些核素链也作了类似的简化，这就简化成了图 7－1中的链。^{242}Pu 本身的核密度已经比较低，而它的吸收截面又很小，所以在反应堆的燃耗计算中，对质量数大于 242 的重同位素一般都不予考虑，但在超钚元素的生产中则应予以仔细考虑。

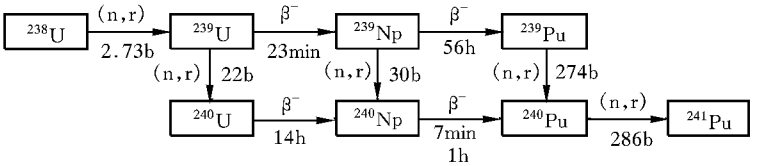


图 7－2　^{238}U—^{240}Pu 燃耗链

对于裂变产物链，情况更为复杂。我们把由裂变反应直接产生的裂变碎片以及随后这些碎片经过放射性衰变形成的各种同位素统称为**裂变产物**，它大约包括有 300 多种放射性及稳定同位素。因此，要分别计算它们的浓度变化及其对反应性的影响是一件极其复杂而且计算量巨大的工作。在工程中，计算时一般只需选其中**吸收截面大**或**裂变产额较大**的一些主要同位素，如^{135}Xe，^{149}Sm，^{103}Rh，^{155}Eu，…

等(它们的吸收截面都大于 10^4b),单独进行计算。把其它的裂变产物按其截面大小及浓度随时间的变化特性归并成两组"假想的集总裂变产物"(FP):一组是吸收截面相对大一点,其浓度随运行时间的增加而缓慢地趋于饱和的,称之为**慢饱和裂变产物**(SSFP);另一组是截面很小的**非饱和裂变产物**(NSFP)。对这两组假想的裂变产物的产额及截面作如下处理:令其裂变产额 $\gamma=\sum_i \gamma_i$,而假想吸收截面则可根据经验数据或用该组裂变产物的吸收截面对其裂变产额进行加权平均而近似求得。例如,对于 SSFP,

$$\sigma_a^{SSFP}=\frac{\sum_i r_i\sigma_a^i}{\sum_i r_i} \tag{7-1}$$

式中:σ_a^i 和 r_i 分别为第 i 种慢饱和裂变产物同位素的热中子吸收截面和裂变产额。求和系对并入 SSFP 组的所有裂变产物求和。

裂变产物考虑的个数与工程设计的目的与要求有关。图7-3列出组件计算程序 WIMS 和 CASMO-3 进行热中子堆一般燃料管理的燃耗计算中考虑的主要裂变产物链和核素种类。图中垂直箭头表示由裂变反应产生,它包括裂变直接产生和由短寿命先驱裂变产物衰变而来两部分。水平箭头表示由于俘获中子及可能继发的 β^- 衰变。在图中一共考虑了 14 个独立的线性链,其中包括 22 个单独的裂变产物和 2 种假想集总裂变产物。所考虑的 22 个单独裂变产物占总的裂变产物吸收的 90%以上。所有这些裂变产物产额和截面数据在程序的多群常数库中都可提供。

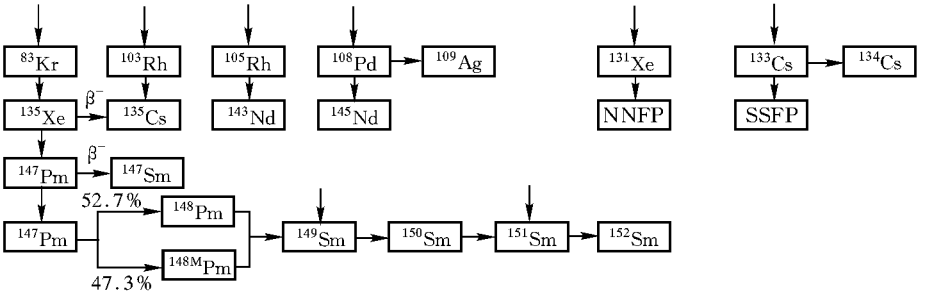


图 7-3　燃耗计算中主要裂变产物链

7.1.2　核燃料中重同位素的燃耗方程

要准确计算反应堆运行过程中燃料内成份的变化,首先必须建立这些同位素

的燃耗方程，在图 7－1 和图 7－3 的燃耗链和裂变产物链中，除 ^{241}Am 链和 Pm—Sm—Eu链外，其它大部份都是按单独裂变产物处理。^{241}Am 或 Pm—Sm—Eu链，计算时可以予以线性化处理以简化计算。如图 7－4所示，同位素 E 的产生可转化成由右边两个路径获得，计算时分别当作两个独立的链和核素处理，计算后再把结果相加，即

$$A \to B \to \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} \to E \quad \text{转化为} \Rightarrow \begin{matrix} A \to B \to C \to E \to \\ A \to B \to D \to E \to \end{matrix}$$

图 7－4　链的线性化

经过这样线性化后，可以对图 7－1和7－3中的每个核写出其浓度的燃耗方程。为此我们对图中的核素依序给予一个编号，如表 7－1。

表 7－1　核素的编号表

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	…
核素	^{235}U	^{236}U	^{237}Np	^{238}Pu	^{238}U	^{238}Np	^{239}Pu	^{240}Pu	…

这样，对其中每个核素可以写出其燃耗方程如下，

$$\frac{\mathrm{d}N_i(\boldsymbol{r},t)}{\mathrm{d}t} = \beta_{i-1}N_{i-1}(\boldsymbol{r},t) - (\lambda_i + \sum_{g=1}^{G}\sigma_{\mathrm{a,g},i}\phi_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t))N_i(\boldsymbol{r},t) + F_i \qquad (7-2)$$

其中

$$\beta_{i-1} = \begin{cases} \lambda_{i-1}, \\ \text{或} \sum_{g=1}^{G}\sigma_{\gamma,\mathrm{g},i-1}\phi_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t) \end{cases} \qquad (7-3)$$

$$F_i = \sum_{g'=1}^{G}\sum_{i'}\gamma_{i,i'}\sigma_{\mathrm{f,g'},i'}\phi_{\mathrm{g'}}(\boldsymbol{r},t), N_{i'}(\boldsymbol{r},t) \qquad (7-4)$$

这里 λ 是衰变常数，$\gamma_{i,i'}$ 为 i'易裂变核裂变时对 i 核素的产额。式中右边第一项表示由于同位素 $i-1$ 的吸收中子或由于衰变而导致同位素 i 的产生率，第二项为同位素 i 由于吸收中子和衰变而引起的总消失率，第三项为由于裂变反应引起的产生率。

由于在反应堆内中子通量密度和核密度都是空间 $\boldsymbol{r}$ 和时间 t 的函数，因而方程式(7－2)是一个变系数的偏微分方程，计算比较困难。同时更复杂的是，不仅燃料的同位素成分$N_i(\boldsymbol{r},t)$与中子通量密度 $\phi(\boldsymbol{r},t)$有关，而且反过来中子通量密度的分布又取决于燃料成分的核子密度及其空间分布，因而严格地讲，方程(7－2)是一个非线性问题。中子通量密度与燃料成分二者之间的这种相关性给燃耗方程的求

解带来了更大的困难。

在实际计算中，通常采用一些近似方法来解决上述的困难。首先，把堆芯划分成若干个子区，称为燃耗区。例如，可以把一个组件作为一个燃耗区，也可以把处于一个同心圆上的一些组件作为一个燃耗区。显然在每个燃耗区内，中子通量密度和核子密度随空间位置变化不大，可以认为等于常数，或可以用它们在该区的平均值近似地代替。这样，在给定的燃耗区内中子通量密度和核子密度就不再是自变量 $\boldsymbol{r}$ 的函数；其次，把运行时间 t 也分成许多时间间隔，每一时间间隔(t_{n-1},t_n)称为燃耗时间步长。由于运行的反应堆内堆芯成分的变化并不很快，中子通量密度的空间分布形状随时间的变化也很缓慢，所以时间步长可以取到长达几个星期或更长，而在每个时间步长中，可以近似认为中子通量密度不随时间变化而等于常数。这样，就在每个燃耗步长内消去了中子通量密度函数 ϕ 对自变量 t 的依赖关系。

做了上述这些假设之后，对于**给定的燃耗区**，在**给定的燃耗步长内**，燃耗方程(7－2)便可简化成常系数的常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}N_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\sigma_i N_i(t)+\beta_{i-1}N_{i-1}+F_i \tag{7-5}$$

式中

$$\sigma_i=I_{\mathrm{a},i}+\lambda_i \tag{7-6}$$

$$I_{\mathrm{a},i}=\sum_{g=1}^{G}\sigma_{\mathrm{a,g},i}\phi_{\mathrm{g}} \tag{7-7}$$

$$\beta_{i-1}=\begin{cases}\lambda_{i-1},\\ \text{或 } I_{\gamma,i-1}\end{cases} \tag{7-8}$$

同时，注意到方程(7－2)为一耦合方程组，有时为了解析求解的方便，可以进一步加以线性化。为此把(7－4)中 $N_{i'}(t)$ 以该步长内的平均核子数 $\overline{N}_{i'}$ 来代替

$$\overline{N}_{i'}=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_n+\Delta t}N_{i'}(t)\,\mathrm{d}t \tag{7-9}$$

Δt 为燃耗步长。经过这样线性化后，方程(7－2)和(7－5)的产生项 F_i 便等于常数。在燃耗步长 Δt 内，σ_i，β_i 和 F_i 都与时间无关。而且对非裂变产物即图 7－1中燃耗链核素，$F_i=0$。

7.1.3　燃耗方程的求解

在上述线性化近似下，方程(7－5)为一常系数的一阶微分方程，它可很方便地用常规数值方法或解析方法求解。

1. 解析方法

设在燃耗时间步长 $\Delta t=t_{n+1}-t_n$ 内，令 $\tau=t-t_n$，t_n 为该燃耗步长的起始时刻。对常微分方程组，自 $i=1$ 开始依次求解。对 $i=1$ 方程可以直接写出其解的形式为

$$N_1(\tau)=C_{11}\mathrm{e}^{-\sigma_1\tau}+D_1$$

其中

$$D_1=\frac{F_1}{\sigma_1}$$

C_{11} 为由初始条件确定的常数。对 $i=2$ 的方程，$N_2(\tau)$ 的解将由方程的齐次部分的通解 $\mathrm{e}^{-\sigma_2\tau}$ 和特解部分($\mathrm{e}^{-\sigma_1\tau}+D_2$)两部分组成。

$$N_2(\tau)=C_{21}\mathrm{e}^{-\sigma_1\tau}+C_{22}\mathrm{e}^{-\sigma_2\tau}+D_2$$

C_{21}，C_{22} 和 D_2 为待定常数。这样，顺推下去，可以写出(7-5)式的解的通式如下：

$$N_i(\tau)=\sum_{j=1}^{i}C_{ij}\mathrm{e}^{-\sigma_j\tau}+D_i \tag{7-10}$$

为了确定系数 C_{ij}，可将(7-10)式代入方程(7-5)式，得到

$$-\sum_{j=1}^{i}C_{ij}\sigma_j\mathrm{e}^{-\sigma_j\tau}=\beta_{i-1}\Big[\sum_{j=1}^{i-1}C_{i-1,j}\mathrm{e}^{-\sigma_j\tau}+D_{i-1}\Big]-\sigma_i\Big[\sum_{j=1}^{i}C_{ij}\mathrm{e}^{-\sigma_j\tau}+D_i\Big]+F_i$$

根据方程两端对应阶次项的系数相等原则，可得

$$-C_{ij}\sigma_j=\beta_{i-1}C_{i-1,j}-\sigma_iC_{ij} \tag{7-11}$$

$$-\sigma_iD_i+\beta_{i-1}D_{i-1}+F_i=0 \tag{7-12}$$

因而

$$C_{ij}=\frac{\beta_{i-1}C_{i-1,j}}{\sigma_i-\sigma_j},\quad j<i \tag{7-13}$$

$$D_i=\frac{1}{\sigma_i}(F_i+\beta_{i-1}D_{i-1}) \tag{7-14}$$

对于 $i=j$，(7-11)式为恒等式，因此 C_{ii} 必须用初始条件来确定它。令 $t=t_n$(即 $\tau=0$)时刻同位素 i 的核密度为 $N_i(0)$，从(7-10)式得

$$N_i(0)=\sum_{j=1}^{i}C_{ij}+D_i$$

因而

$$C_{11}=N_1(0)-\frac{F_1}{\sigma_1} \tag{7-15}$$

$$C_{ii}=N_i(0)-\sum_{j=1}^{i-1}C_{ij}-D_i \tag{7-16}$$

这样，我们便求出了线性化后燃耗方程组(7-5)在 $0<\tau<\Delta t$ 区间的解析解

需要全本请访问 www.ertongbook.com