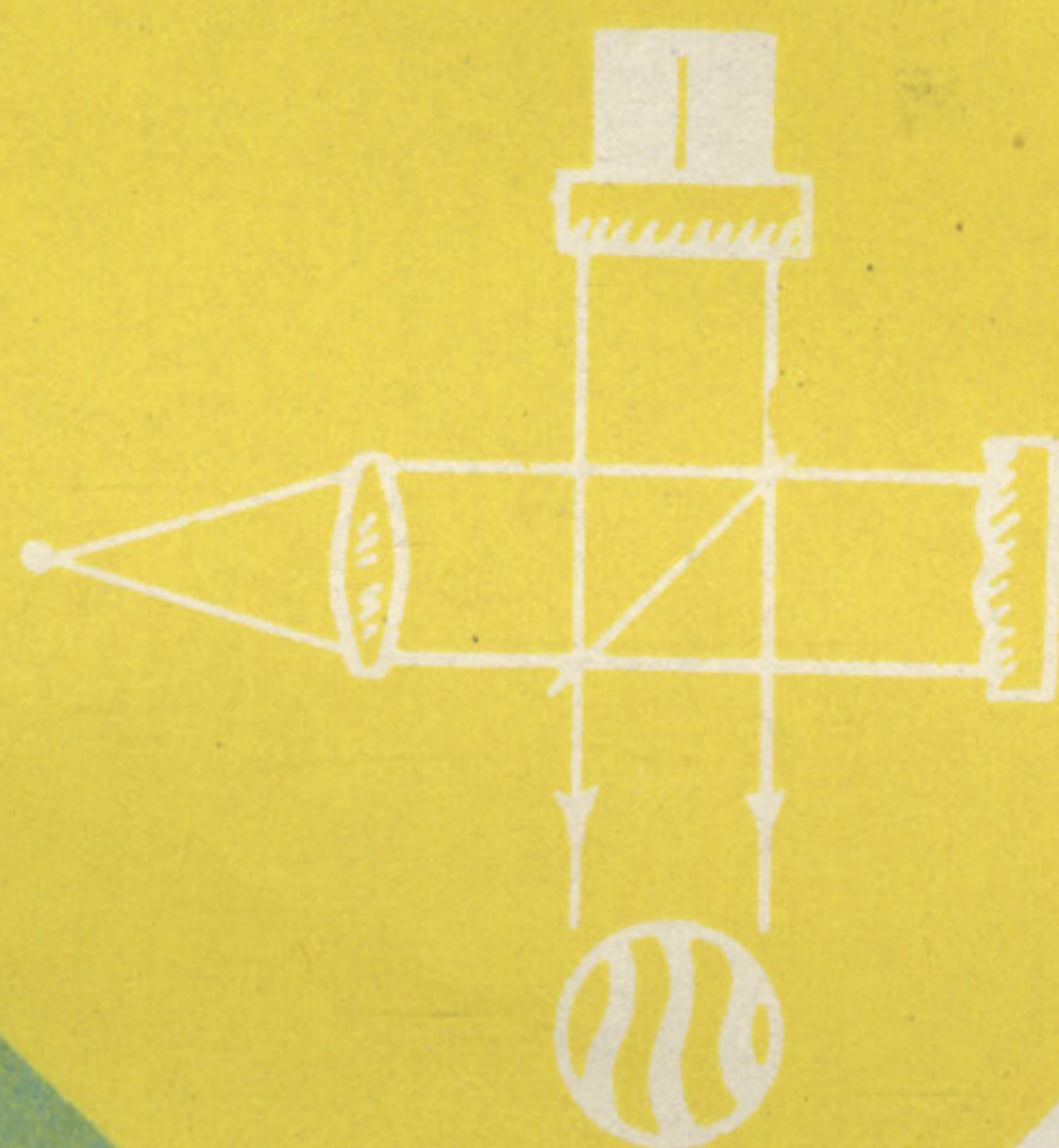


光学测量 与象质鉴定

苏大图 沈海龙 陈进榜 曹根瑞 编著



北京工业学院出版社

光学测量与象质鉴定

苏大图 沈海龙

编 著

陈进榜 曹根瑞

北京工业学院出版社

分而引起的误差。

有时被测对象本身变化也要造成误差。

按照误差的性质，误差可分为系统误差、随机误差(或称偶然误差)和粗大误差三类。

系统误差 在同一条件下多次测量同一量时，绝对值和符号保持不变；测量条件改变时，按某确定规律变化的误差。例如，在光学测量中仪器制造误差(如度盘刻度误差，它是有规律变化的)，校准或调整误差(如平行光管的分划板不在其物镜焦平面上，造成被测光学量的误差值是固定的)，实验条件误差(如温度高于或低于标准值)和标准件的测量误差等。

系统误差可按对误差掌握程度分为已定系统误差(误差的大小和方向已知)和未定系统误差(误差的大小和方向未知)。

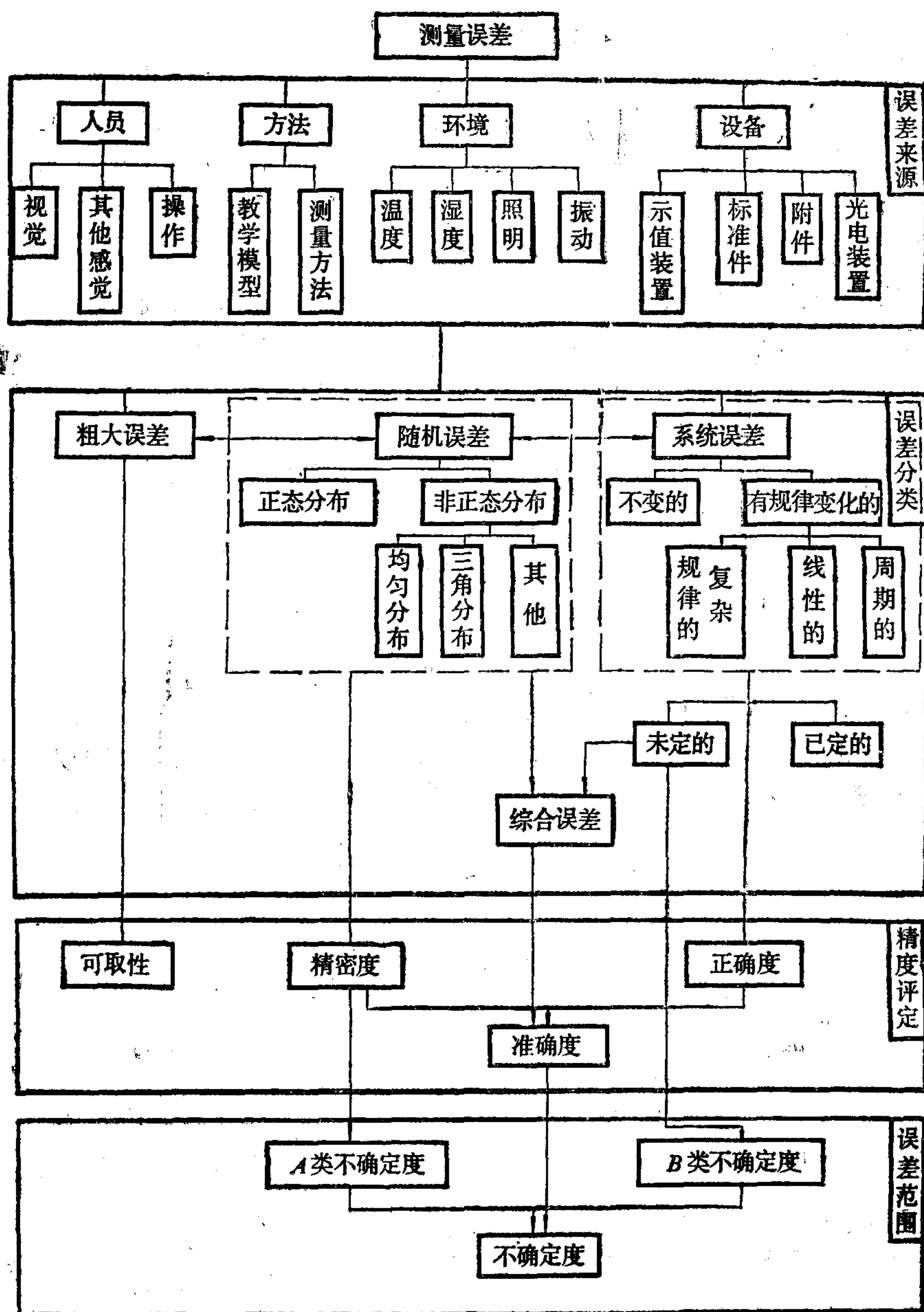


图 1-1 误差来源、分类、范围和精度评定

随机误差 在实际相同的测量条件下，多次测量同一量时，绝对值和符号以不可预定的方式变化着的误差。例如局部空气紊流、温度小量变化、电源的电压小量起伏等引起的测量误差属随机误差。此外对准误差和估读误差也属随机误差。

粗大误差 超出在规定条件下预期的误差。如读错或记错数、计算错误、仪器调整错误和实验条件突变等所引起的误差。含有粗大误差的测量值都应剔除。

3. 精度与不确定度

反映测量结果与真值接近程度的量，称为精度。精度高则误差小。精度又分为：

精密度 反映随机误差大小的程度。

正确度 反映系统误差大小的程度。

准确度(精确度) 反映系统误差与随机误差综合大小的程度。亦即表示测量结果与真值的接近程度。

在实验和测量中，还常用到表示误差的一个重要概念——不确定度。

测量的不确定度是对被测量的真值所处的量值范围的一个评定。它包含了两类不同的分量：*A*类——可以将一组测得值通过统计方法计算得到的那些分量，用统计方差 S_i^2 (或实验标准偏差 S_i) 表征；*B*类——可以用经验或在其他已知信息基础上进行评定的那些分量，以估计方差 U_i^2 表征。两类不确定度通常用下式求出合成不确定度 σ

$$\sigma = \sqrt{S_i^2 + U_i^2}$$

需要时，可对合成不确定度乘一个因子 k 而得到综合不确定度 $k\sigma$ 。

精密度通常用 *A*类不确定度表示，对未定系统误差可用 *B*类不确定度估算，测量的准确度只能用测量的合成不确定度(或综合不确定度)来表征。

误差来源、分类和精度、不确定度等，可用图 1-1 概括地表示。

二、随机误差

在相同的测量条件下，对同一量进行多次重复测量，得到一系列测量值(常称测量列)，它们都含有不同的随机误差。随机误差的单次出现没有什么规律，但就误差的总体而言，却具有相互抵偿的统计规律性。相互抵偿是指这一系列随机误差 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ 的算术平均值随测量次数 n 的增大而趋于零。即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n}{n} = 0 \quad (1-1)$$

式中 $\delta_i = x_i - a_0$

其中 a_0 为真值； x_i 为各次测量值。

1. 随机误差的评价

因为单个误差值可大可小，为了表明该条件下的测量精密度，引入如下的误差：

均方根误差(又称标准偏差) 均方根误差是各误差平方的算术平均值再开方，即

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n}} \quad (1-2)$$

平均误差 平均误差是各误差绝对值的算术平均值，即

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^n |\delta_i|}{n} \quad (1-3)$$

或然误差 将误差取绝对值后，按大小排列，中间的误差称或然误差 ρ 。

σ 、 θ 、 ρ 都是在该条件下代表一次测量的误差数值，用来表明一次测量的误差的平均大小。一般说，设备愈好，外界条件愈稳定，技术水平愈高，它们就愈小。

σ 、 θ 、 ρ 都可作为测量列中单次测量不可靠性的评定标准，但由于 σ 随 n 的变化比较小，又能将危害大的大误差充分反映出来，而且还是表征误差分布的一个重要数字特征，所以在测量工作中最常用均方根误差。由于上述原因，故常称 σ 为“测量列中单次测量的标准偏差”。

极限误差 各误差实际不应超过的某个界限。极限误差由 $\pm t \times \sigma$ 所确定。 t 是一个系数，它由误差分布决定，误差分布不同 t 也不同。例如正态分布通常取 $t=3$ 。

2. 正态分布

若随机误差是由测量过程中多个互不相关的因素引起测量值微量变化而综合形成的，那末，这个测量的误差分布将服从正态分布。由于大多数随机误差均服从正态分布，所以正态分布是极其重要、极其有用的。

服从正态分布的随机误差具有如下特征：

单峰性 绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的概率大；

对称性 绝对值相等的正误差与负误差出现的概率相等；

有界性 在一定测量条件下，随机误差的绝对值不会超过一定限度；

抵偿性 随机误差的算术平均值随着测量次数的不断增加而趋于零，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i = 0$$

服从正态分布的随机误差，其概率密度函数①为

$$f(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \quad (1-4)$$

$f(\delta)$ 的曲线如图 1-2 所示②，称为正态分布曲线。

图 1-2 曲线下的面积表示概率③。例如误差位于 $[-\sigma, +\sigma]$ 区间内的概率为

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} f(\delta) d\delta = \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta = 0.6826$$

①概率密度函数是分布函数 $F(x)$ 的微商(如果它存在)

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(\delta)$$

分布函数 $F(x)$ 定义为：对任意值 x ，给出随机变量 δ 小于 x 的概率的函数。 $F(x) = P(\delta < x)$ ， $F(x) = \int_{-\infty}^x f(\delta) d\delta$ 。

②图中的曲线是取 $\sigma=1$ 时作出的。

③显然，曲线下的全部面积为 1， $\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta) d\delta = 1$ 。

这个面积在图 1-2 中是划阴影线的部份。

误差位于 $[-2\sigma, +2\sigma]$, $[-3\sigma, +3\sigma]$ 区间内的概率分别为 0.9544 和 0.9973。由于误差超出 $[-3\sigma, +3\sigma]$ 的概率仅为 $1 - 0.9973 = 0.27\%$ ，即 370 次重复测量中仅有一次会超出界限，实际测量一般不超过 20 次，故常以 $\pm 3\sigma$ 作为服从正态分布的测量的极限误差。

随机误差 δ 的数学期望，即 $n \rightarrow \infty$ 时 δ_i 的平均值为

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta f(\delta) d\delta = 0 \quad (1-5)$$

随机变量 ξ 的方差可以表示为

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2 f(\delta) d\delta = \sigma^2 \quad (1-6)$$

随机误差 δ 的平均误差为

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta| f(\delta) d\delta = 0.7979\sigma \approx 0.8\sigma \quad (1-7)$$

根据或然误差 ρ 的定义可知

$$\int_{-\rho}^{\rho} f(\delta) d\delta = \frac{1}{2} \quad (1-8)$$

故 ρ 与 σ 、 θ 的关系为

$$\rho = 0.6745\sigma = 0.8453\theta$$

前面讲过， σ 可作为测量列中单次测量不可靠性的评定标准。这个结论可通过图 1-3 得到进一步说明。图中给出了三条 σ 大小不同的正态分布曲线。可以看出， σ 越小，曲线越高耸而狭窄，随机误差的分布越密集，表明测量的精密度越高；相反， σ 越大，曲线越低矮而宽展，随机误差分布越稀疏，精密度就越低（图中三条曲线下面包围的面积皆为 1）。

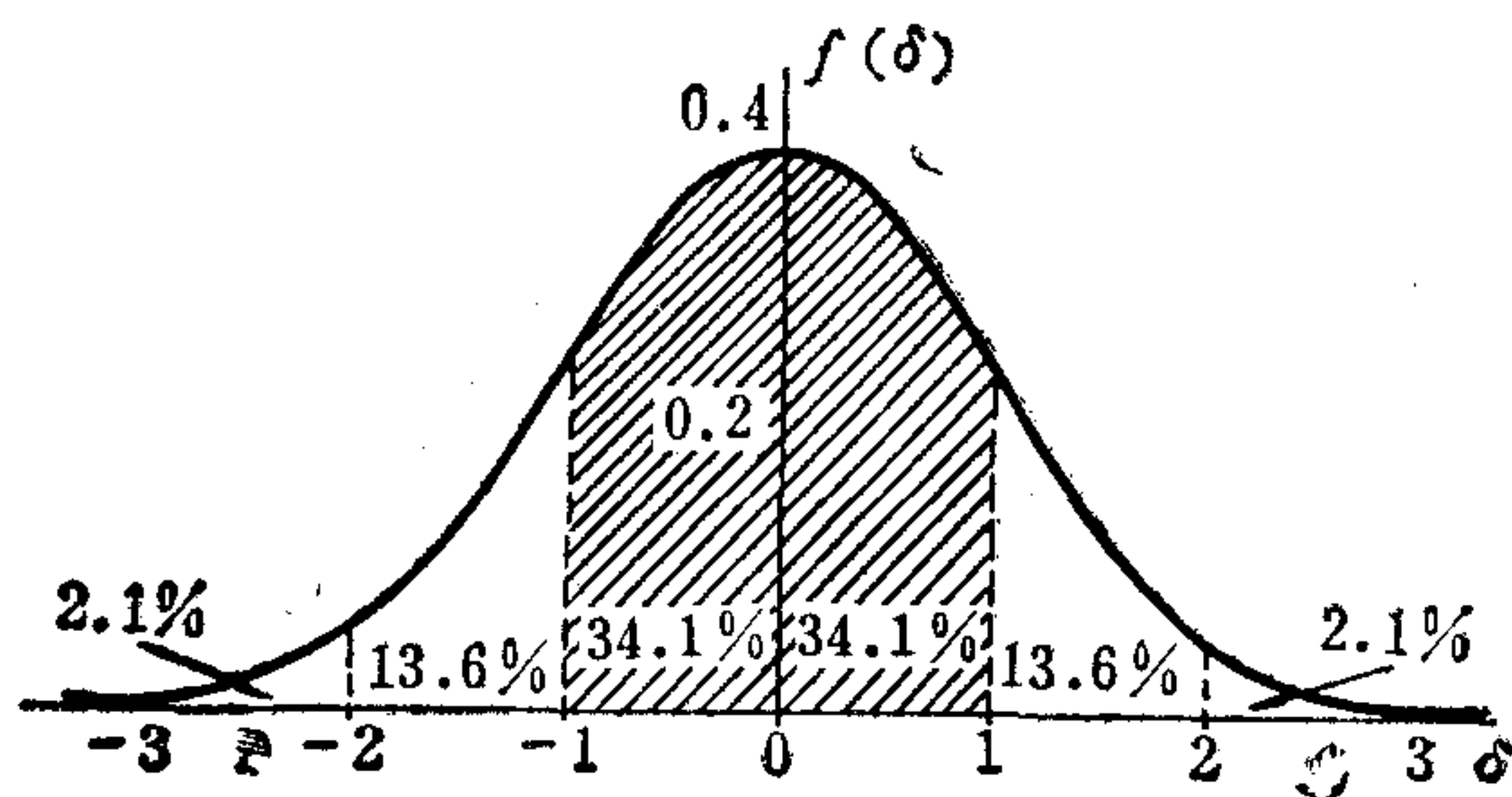


图 1-2 正态分布曲线

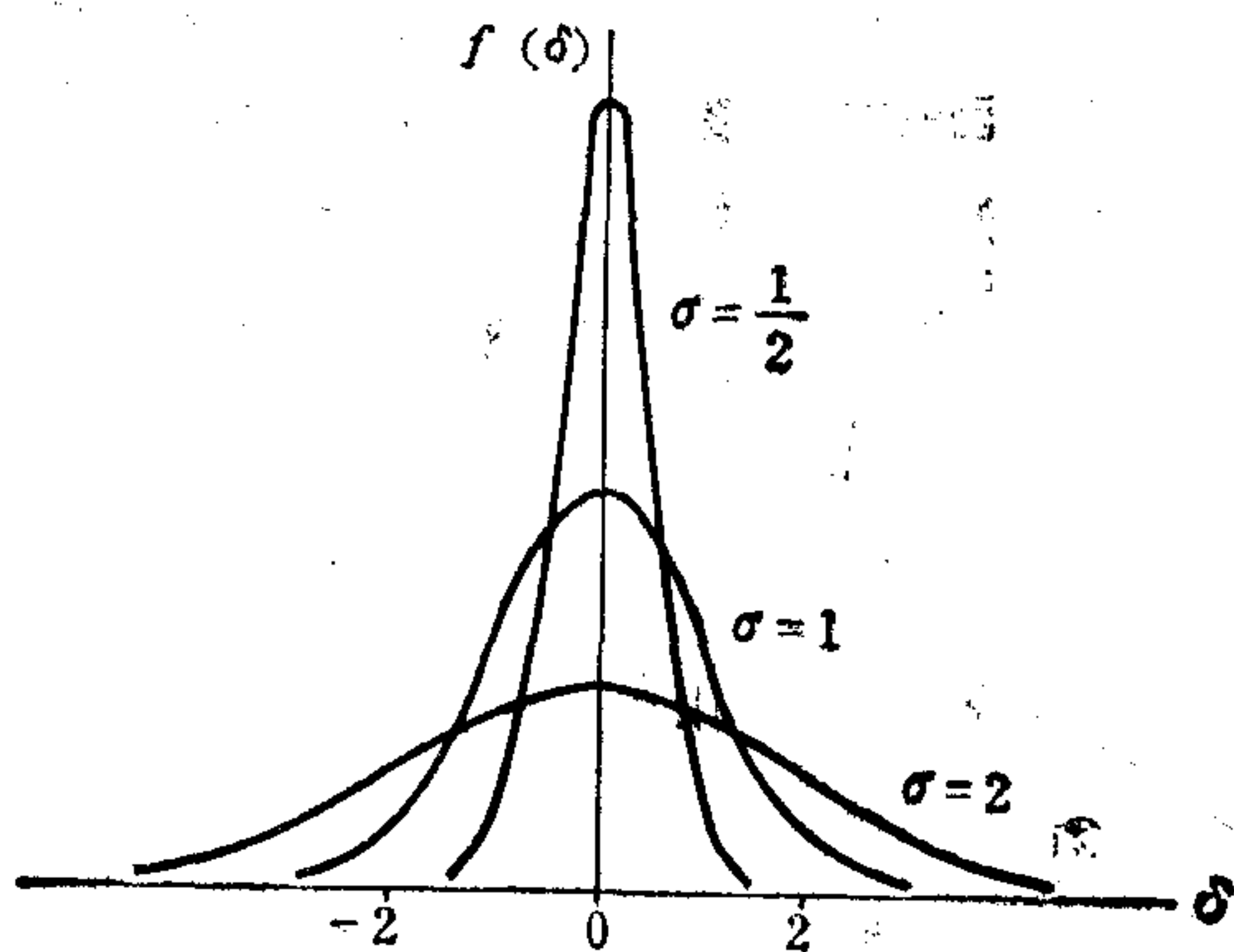


图 1-3 不同 σ 的正态分布曲线

3. 算术平均值

对某一量进行一系列等精度测量指在完成一系列测量时，仪器性能、测量方法、操作技术和外界条件都可认为没什么改变的（测量），测得值为

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

取算术平均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (1-9)$$

由于每个测得值是等精度的，因此它们的可靠程度应该是一样的，而算术平均值就具有

这一简单特性。其次，如果这一测量无系统误差，则式(1-1)中的 δ_i 是随机误差，由式(1-1)求和得

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = \sum_{i=1}^n x_i - na_0$$

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i$$

由随机误差的抵偿性可知：当 $n \rightarrow \infty$ 时，有 $\sum_{i=1}^n \delta_i / n \rightarrow 0$ ，所以

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow a_0$$

虽然实际上测量次数是有限的，但我们还是把算术平均值近似地作为真值。

根据最小二乘原理，最能代表这测量列的值（称为最佳值）是各测得值对这个值的偏差的平方和为最小。设 x_0 是这个最佳值，则有

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 = \min$$

为极小时， $f'(x_0) = 0$ ，可得

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

由此可见，在同一测量条件下，测量列的最佳值是算术平均值。

测量列中测得值 x_i 与该列的算术平均值之差 v_i 称残余误差，亦简称残差。

残差有以下两个性质：

残差的代数和等于零，即

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n v_i = 0 \quad (1-10)$$

残差的平方和为最小

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \min \quad (1-11)$$

这是指以算术平均值作为结果，具有最小的残差平方和；而用其他方式得到的结果，其残差

平方和都比由 $\sum_{i=1}^n v_i^2$ 算出的大。

4. 算术平均值的标准偏差

由于存在随机误差， $\bar{x}$ 也是一个随机变量，它是以 a_0 为均值的正态分布。 $\bar{x}$ 的标准偏差可由下述方法求出。

设有 m 个测量列，每列皆进行 n 次等精度测量，各测量列中单次测量的标准偏差应相等，即

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_m = \sigma$$

各测量列的真误差

$$\delta \bar{x}_i = \bar{x}_i - a_0 \quad i=1, 2, \dots, m$$

由此算术平均值的标准偏差为

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\delta \bar{x}_1^2 + \delta \bar{x}_2^2 + \dots + \delta \bar{x}_m^2}{m}} \quad (1-12)$$

因为 $\delta \bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{ij}$, 故当 n 适当大时, $\sum_{j,k=1}^n \delta_{ij} \delta_{ik}$ 趋于零(其中 $j \neq k$), 近似得

$$\delta \bar{x}_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \delta_{ij}^2}{n^2} \quad i=1, 2, \dots, m$$

由定义

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{ij}^2$$

则有

$$\delta \bar{x}_i^2 = \frac{1}{n} \sigma_i^2, \quad \sum_{i=1}^m \delta \bar{x}_i^2 = m \sigma^2 / n$$

代入式(1-12)得算术平均值的标准偏差为

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1-13)$$

由此可知, 增加测量次数可提高测量精度。但因 $\sigma_{\bar{x}}$ 与 n 的平方根成反比, 故当 $n > 10$ 以后, $\sigma_{\bar{x}}$ 已减小得非常缓慢。而且, n 愈大愈难做到测量条件不变, 因此一般取 $n \leq 10$ 较为适宜。

5. 用残差计算标准偏差

当被测量的真值为未知时, 必须用残差来计算标准偏差。由式(1-1)知

$$\delta_i = x_i - a_0$$

$$\delta_i = x_i - \bar{x} + \bar{x} - a_0 = v_i + \delta_x$$

上式平方后相加, 得

$$\sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 + n \delta_x^2$$

因为

$$\delta_x = \frac{1}{n} \sum \delta_i$$

$$\delta_x^2 = \frac{1}{n^2} (\sum \delta_i)^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum \delta_i^2 + \sum_{i \neq j} \delta_i \delta_j}{n} \approx \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum \delta_i^2}{n} = \frac{1}{n} \sigma^2$$

其中, 当 n 充分大时(实用中取 $4 \leq n \leq 10$), δ_i 的分布满足对称性, 故 $\sum_{i \neq j} \delta_i \delta_j = 0$, 那么

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sigma^2 \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^2 + \frac{1}{n} \sigma^2$$

式中用符号 s 代替 σ ，使近似式变为等式，则得

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}} \tag{1-14}$$

式(1-14)表示，在有限次测量中，标准偏差 σ 用残差求出的 s 来估计。称 s 是 σ 的最佳估计量。

同样，算术平均值的标准偏差用 $s_{\bar{x}}$ 估计

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{1-15}$$

6. 测量的不确定度

单次测量的不确定度和算术平均值的不确定度可以各自的标准偏差乘以置信因子 k ①表示。即

$$\delta_{limx} = \pm ks \tag{1-16}$$

$$\delta_{lim\bar{x}} = \pm ks_{\bar{x}} \tag{1-17}$$

通常取 $k=3$ 。这是建立在正态分布上，置信概率 $p=0.9973$ ， $n \rightarrow \infty$ 时的置信因子(若取 $p=0.95$ ，则 $k=1.96$)。测量次数少时，按正态分布得到的 k 值计算出 δ_{limx} 和 $\delta_{lim\bar{x}}$ ，以此作为实际精度的评价还是过高的，因为这时把 s_x^2 和 s^2 作为 σ_x^2 和 σ^2 的估计，就有不太小的概率把 σ_x^2 和 σ^2 估计过好了。例如当 $n=4$ 时， s^2 有 10% 的概率比 σ^2 小 4.13 倍。 $n=2 \sim 3$ 时，对结果进行这种精度估计就无意义了。因此，测量次数比较少时，计算不确定度 δ_{limx} 和 $\delta_{lim\bar{x}}$ 的置信因子要适当增大，这时采用由“ t 分布”(又称学生分布)得出不同置信概率 p 下的临界值 t_p 进行计算较合适，即计算式为

$$\delta_{limx} = \pm t_p s \tag{1-18}$$

$$\delta_{lim\bar{x}} = \pm t_p s_{\bar{x}} \tag{1-19}$$

式中的 t_p 由测量次数 n 和给定的置信概率 p 查 t 分布表得出。

表 1-1 列出 $n=3 \sim 10$ ， $p=0.682$ (适用于实验的不确定度)、 $p=0.95$ 和 0.99 的 t_p 值。

表 1-1 t 分布临界值表

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{0.682}$	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06
$t_{0.95}$	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.37	2.31	2.26
$t_{0.99}$	9.93	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25

7. 随机误差的其他分布

在光学测量中还常遇到随机误差分布规律较特殊的情况。其中较重要的有均匀分布和三

①置信因子(Confidence factor)——遵从一定概率分布的某项误差对于所给置信概率(按一定概率分布给出某未知参数一个估计区间，该区间能包含这个未知参数的概率，叫做置信概率)的误差限 e 与标准偏差 σ 之比，即 $k=e/\sigma$ 。也可称置信系数。

角分布。本节用到的 t 分布，请参阅肖明耀著的《误差理论与应用》等书籍，这里不作介绍。

均匀分布(又称等概率分布) 随机误差在区间 $[-\Delta, +\Delta]$ 各处出现概率相等，在区间外概率为零，如图 1-4 所示。例如用显微镜或望远镜对物体进行调焦时，调焦在物体景深范围内任一点，象都是清晰的，超出景深范围就不清晰了。所以调焦误差(显微镜实际调焦点到物面的轴向距离)服从均匀分布规律。此外，用眼睛瞄准产生的误差和度盘刻度误差所产生的角值误差等均为均匀分布误差。

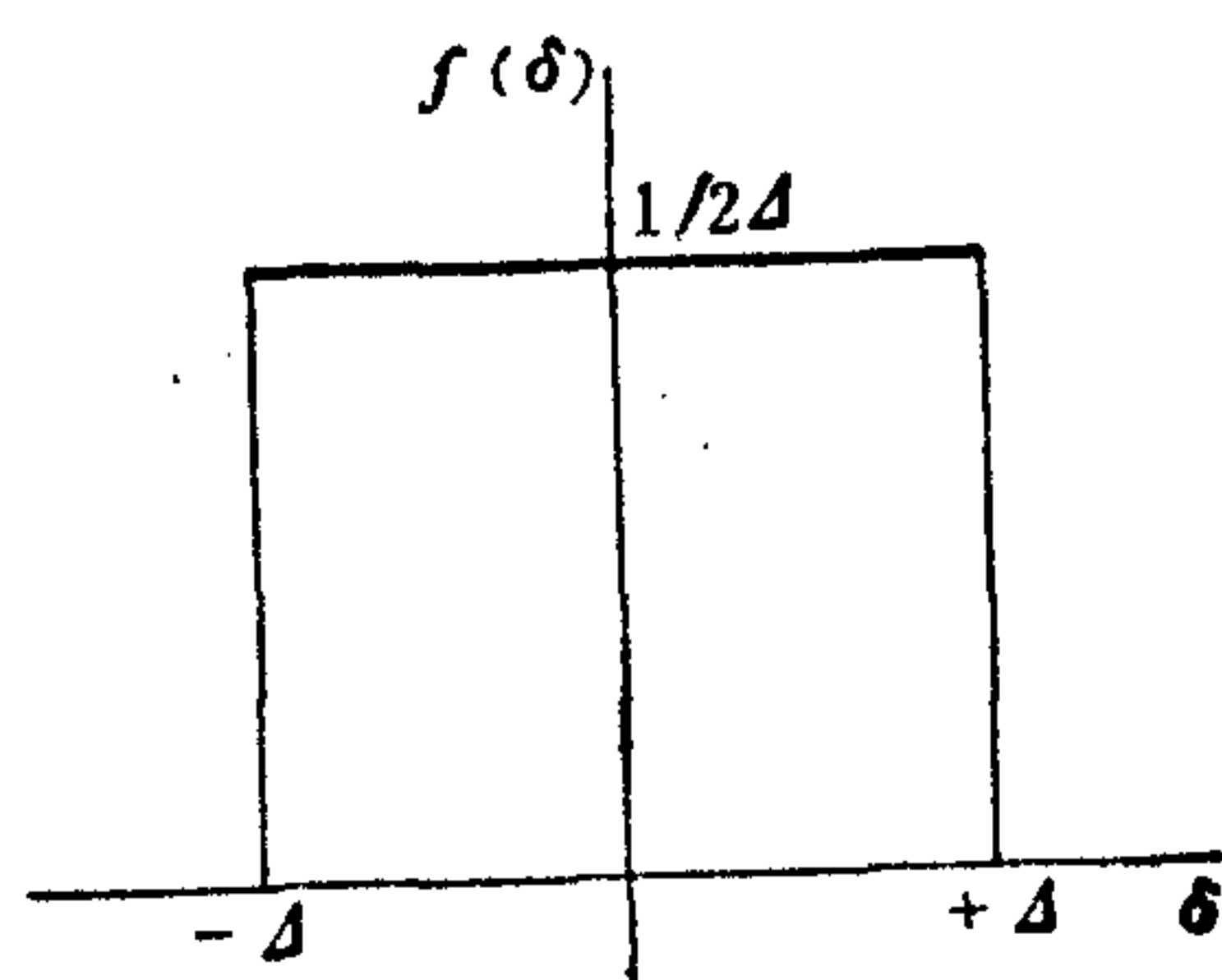


图1-4 均匀分布的分布密度

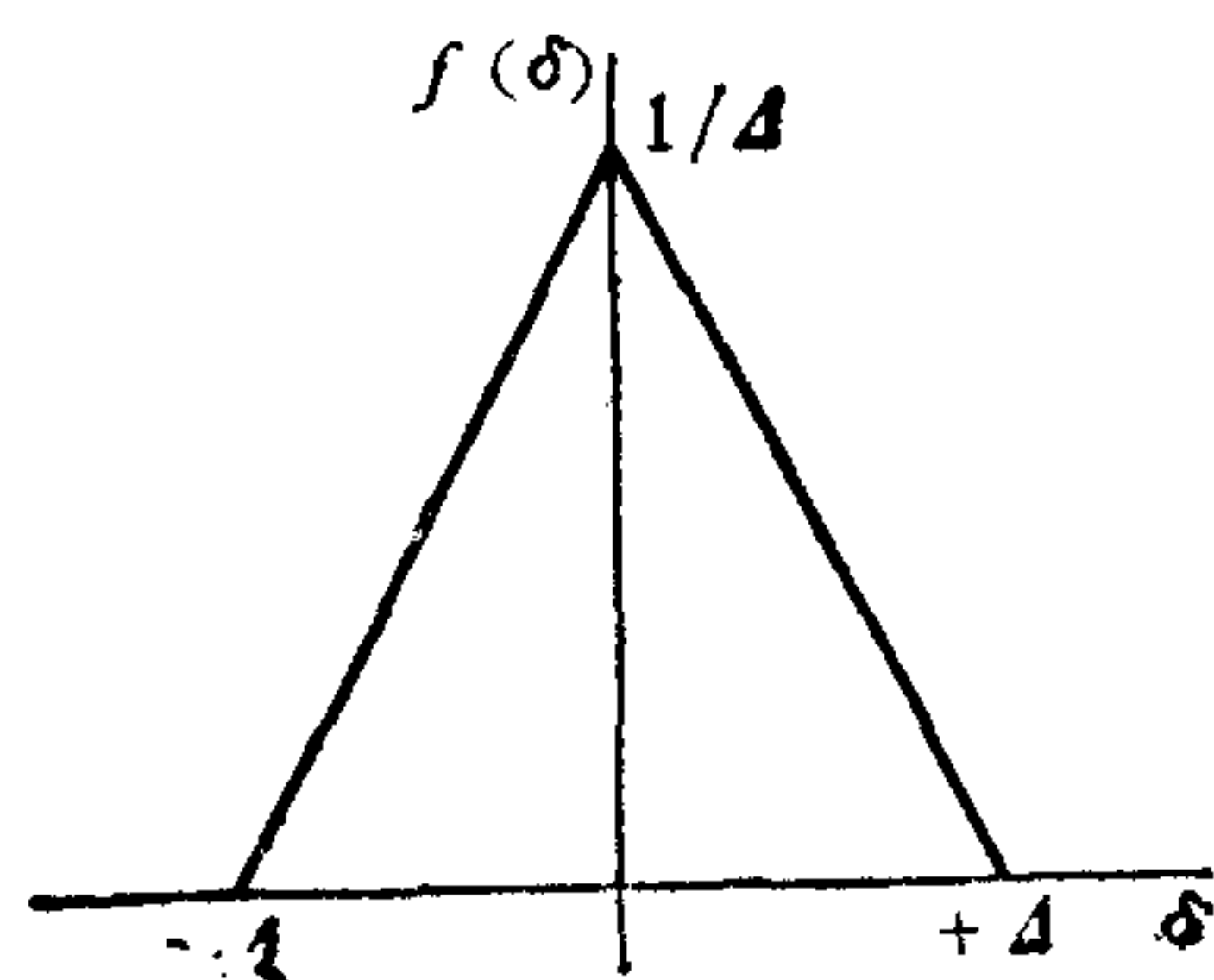


图1-5 三角分布的分布密度

均匀分布的分布密度 $f(\delta)$ 见图 1-4。

$$f(\delta) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta} & |\delta| \leq \Delta \\ 0 & |\delta| > \Delta \end{cases}$$

它的数学期望

$$E = \int_{-\Delta}^{\Delta} \delta f(\delta) d\delta = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{\delta}{2\Delta} d\delta = 0$$

它的方差

$$\sigma^2 = \int_{-\Delta}^{\Delta} \delta^2 f(\delta) d\delta = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{\delta^2}{2\Delta} d\delta = \frac{\Delta^2}{3}$$

$$\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \quad (1-20)$$

式 (1-20) 说明，均匀分布的标准偏差为极限误差的 $1/\sqrt{3}$ 。

三角分布 若随机变量 ξ 与 η 都在 $[-\Delta/2, \Delta/2]$ 上均匀分布且独立，则 $\delta = \xi + \eta$ 服从三角分布。

其分布密度见图 1-5。

$$f(\delta) = \begin{cases} \frac{\Delta + \delta}{\Delta^2} & -\Delta \leq \delta < 0 \\ \frac{\Delta - \delta}{\Delta^2} & 0 \leq \delta < \Delta \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

它的数学期望 $E=0$

方差

$$\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{6} \quad (1-21)$$

在光学测量中，两条平行线经透镜成象，逐渐改变垂轴放大率，直到平行线象与象面上的两条平行线同时对准时，对准误差服从三角分布。

上述三种分布的比较，见表1-2。

表 1-2 三种分布的 t 和 σ²

分 布 名 称	t=Δ/σ	σ²
正 态	3 (p=0.9973)	Δ²/9
均 匀	√3	Δ²/3
三 角	√6	Δ²/6

三、 粗大误差的判断

粗大误差明显歪曲了测量结果，含粗差的坏值应该剔除不用。如果在测量过程中发现读错和计错数、或操作错、或外界条件突变而产生了坏值，则应随时发现随时剔除。但当整个测量完成后，在得到的测量列中往往会有个别数据和其余比较，相差较大，如果能分析出明确的物理或技术方面的原因，证实它是坏值，当然应该舍弃。然而这种分析常常是做不到的，于是会变成凭个人主观判断来决定数据的取舍。这就很可能把相近的数保留，而舍弃相差较大的数，造成虚假的精密度高的结果。当测量次数较少时，还会产生人为的系统误差。为了能作出合理的判断，推荐采用格拉布斯(Grubbs)判断准则。

常见的判断准则有五种，它们是：拉依达(Pauma)准则、肖维勒(Chauvenet)准则、格拉布斯准则、t检验准则和狄克逊(Dixon)准则。大量的试验，特别是我国几位学者对这些准则作的大量分析和试验证明，格拉布斯准则的效果最好。它比拉依达准则和肖维勒准则可靠，又比t检验准则宽，比狄克逊准则严，因而宽严适宜。

格拉布斯准则判定步骤如下：设对某物理量作等精度独立测量，测得值由小到大排列为x₁、x₂、…、x_n

1° 选定风险率α。α指判定是坏值，实际上不是坏值而犯了错误的概率。通常取α=5.0%或1.0%。

2° 计算判定值T。如果x₁或x_n是可怀疑的，则T=(x̄-x₁)/s 或 T=(x_n-x̄)/s。其中

$$\bar{x}=\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, s \text{ 用下式计算}$$

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

3° 由表1-3查出T(n, α)值。

表1-3 T(n, α)值

$\alpha \backslash n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5.0%	1.15	1.46	1.67	1.82	1.94	2.03	2.11	2.18	2.23	2.29	2.33	2.37	2.41
1.0%	1.15	1.49	1.75	1.94	2.10	2.22	2.32	2.41	2.48	2.55	2.61	2.66	2.70

4° 若 $T \geq T(n, \alpha)$, 则所怀疑值是坏值, 应予舍弃; 若 $T < T(n, \alpha)$, 则此值不能以风险率 α 舍去, 而认为是有效的。

四、系统误差的发现和消除

曾经有这样的例子, 一台新设计的测量仪器, 因缺乏严格的检定标准和手段, 只对仪器测量的重复性作了检定, 就断言仪器测量的准确度高。以后, 经过一段时期的使用实践, 对仪器产生测量误差的因素有了比较透彻的了解, 才发现原仪器还隐藏有显著的系统误差。经采用一定的测试技术措施, 基本消除它以后, 仪器的测量准确度才大为提高。因此, 在一个测量过程中, 如何发现并消除系统误差也是很重要的。但是, 处理系统误差不象随机误差那样, 全都用概率统计的方法, 而是采取以具体的测试技术措施为主、数据处理为辅的方法。这里, 只简单介绍几个较为普遍的方法。

1. 系统误差的发现

预检法 在同一测试条件下, 将被检仪器多次重复测得的均值, 与用更高一级的仪器或标准量具测得的均值相比较, 取其差值即为系统误差。通常将系统误差 Δ_0 与同一测试情况下获得的随机误差 σ (均方根误差) 作比较, 如果

$$\frac{|\Delta_0|}{\sigma} > 0.8 \sim 1.0 \quad (1-22)$$

则认为 Δ_0 是显著系统误差, 应加以消除或校正; 反之, 则可将 Δ_0 归入随机误差中一并处理。

数据处理法 由于变值系统误差将影响一系列测量数据的随机性, 因而可通过各种数据统计判断的方法来发现它。

图 1-6 是依测量次序排列的残差散点图。散点图的变化趋势取决于系统误差的变化规律, 散点图中的微小波动是由随机误差造成的。图 1-6 (a) 说明不存在规律性变化的系统误差, 但存在常值误差的可能性尚无法排除 (用统计判断法无法发现常值系统误差)。图 1-6 (b) 说明存在线性系统误差。图 1-6 (c) 说明存在周期性系统误差。图 1-6 (d) 说明存在复杂规律的系统误差。

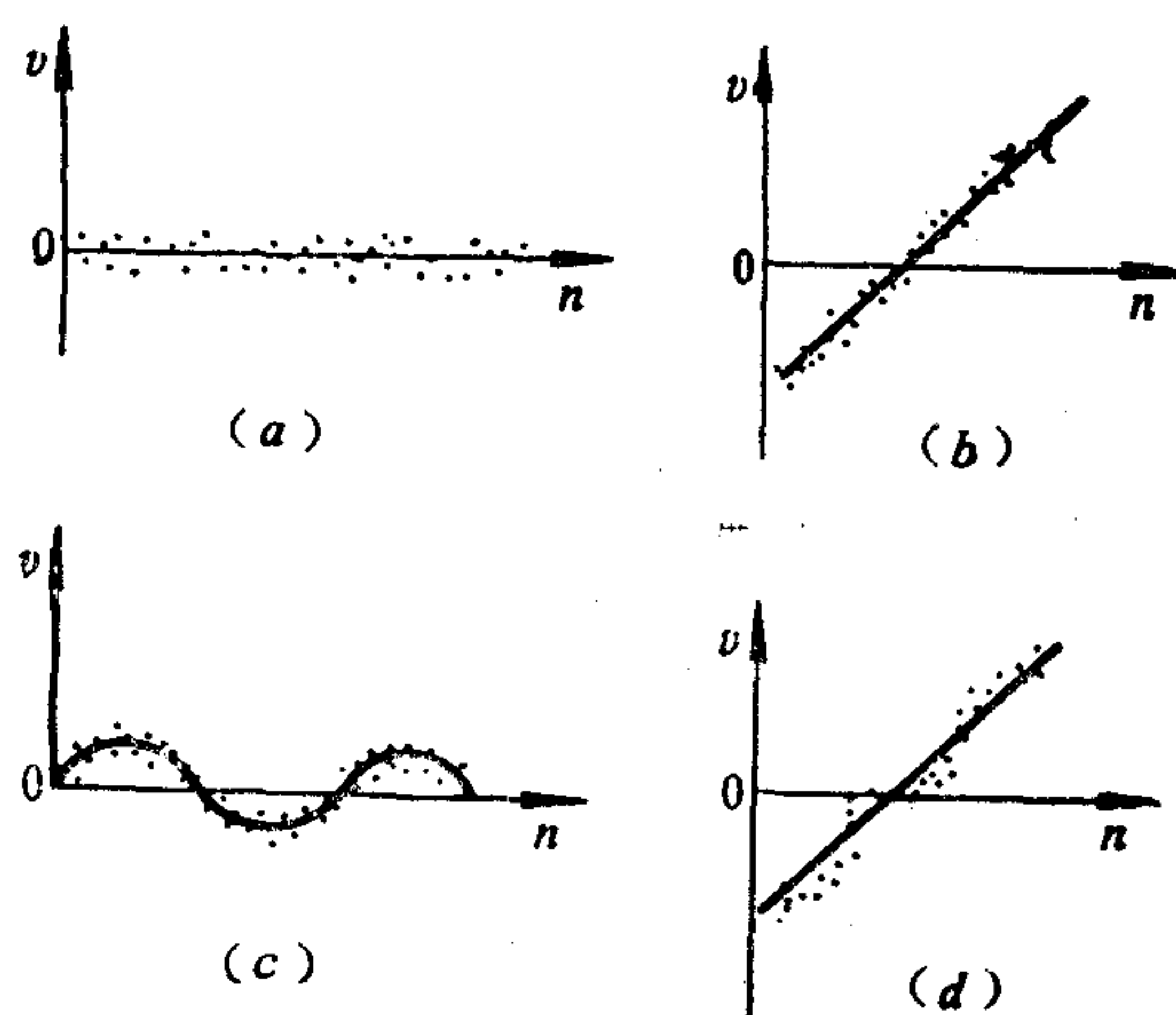


图1-6 残差散点图

用以上散点图的观察法检验系统误差, 简捷直观, 但欠缺明确的检验界限。另有一些数据统计判断的方法, 可参见沙定国编著的《实验数据处理》等书籍。

2. 系统误差的消除

在测量过程中, 如发现有显著的系统误差, 必须采取措施消除。消除的方法大致有如下几种途径:

在测量结果中加入修正值 例如测量玻璃折射率时, 测量值随环境温度而变化, 可以实验统计得一条依复杂规律变化的曲线 $n=n(t)$, 再根据测量时的环境温度, 修正为标准温度的折射率值。

选择适当的测量方法 某些测量方法可使系统误差互相抵消,而不致带入测量结果之中。例如度盘的刻划误差有正有负有大有小,是一种未定的系统误差。为减小测量误差,可多次改变度盘位置测量读数后取均值。又如采用差分干涉法消除干涉仪固有的波象差等。

消除产生系统误差的因素 例如测微器螺杆的螺纹有间隙造成空行程,可以采用单行程测量的办法消去空回带入的误差因素。

五、间接测量误差的传递

在光学测量中,许多光学量都通过间接测量方法来获得结果。就是说,某一个量 V ,它不能直接测出,需要通过测量另外两个(或两个以上)独立量 x 和 y 后,用公式计算出来。

如果量 x 和 y 的某一次测量的真误差(与真值之差)为 Δx 和 Δy ,因 Δx 、 Δy 与 x 、 y 相比很小,所以相应量 V 的真误差 ΔV 可近似由下式求得

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y$$

当以 σ_x 、 σ_y 表示 x 、 y 的标准偏差时,相应 V 的标准偏差 σ_v 应该用下面推导出的公式计算。由于 Δx 、 Δy 是两个独立的随机变量,且 $\partial V/\partial x$ 、 $\partial V/\partial y$ 在误差范围内是常量,由概率论可知:两随机变量和的方差等于它们各自的方差之和,即

$$D(\Delta V) = D\left(\frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y\right) = D\left(\frac{\partial V}{\partial x} \Delta x\right) + D\left(\frac{\partial V}{\partial y} \Delta y\right)$$

其中

$$D\left(\frac{\partial V}{\partial x} \Delta x\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 D(\Delta x), \quad D\left(\frac{\partial V}{\partial y} \Delta y\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 D(\Delta y)$$

又 $D(\Delta V) = \sigma_v^2$, $D(\Delta x) = \sigma_x^2$, $D(\Delta y) = \sigma_y^2$, 故得

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2} \quad (1-23)$$

推而广之,当量 V 是多个独立的直接测得量 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 的函数 $V = V(x_1, x_2 \cdots x_n)$ 时, V 的标准偏差 σ_v 按下式计算:

$$\sigma_v = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2} \quad (1-24)$$

例 测量一望远物镜的焦距。当测得无限远的物体在物镜焦面上成象的大小 $2y'$ 及其对应的视场角 2ω (见图1-7)后,应用公式

$$f' = \frac{y'}{\operatorname{tg} \omega}$$

算出物镜的焦距。

设测得象高 $2y' = 10\text{mm}$, 其标准偏差 $\sigma_{y'} = 0.01\text{mm}$; 视场角 $2\omega = 3^\circ$, $\sigma_\omega = 0.00005\text{rad}$ 。物镜的焦距为

$$f' = \frac{5}{\operatorname{tg} 1^\circ 30'} = 190.94\text{mm}$$