第一章　光的电磁理论

19世纪60年代，麦克斯韦总结了前人在电磁学方面的研究成果，把光学现象和电磁现象联系起来，指出光也是一种电磁波，由此产生了光的电磁理论。现代光学尽管产生了许多新的领域，并且许多光学现象需要用量子理论来解释，但是光的电磁理论仍然是掌握现代光学的一个重要基础。本章将简要叙述光的电磁理论，它是全书的基础。

§1－1　电磁场基本方程

一、麦克斯韦方程组

光波是一种电磁波，它必然服从电磁场的基本规律，而这些普遍规律是由麦克斯韦总结出来的，因此，我们把电磁场的基本方程式称为韦克斯韦方程组。麦克斯韦方程组把电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的空间和时间变化互相联系起来，它的微分形式为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1-1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1-2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1-3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1-4}$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 是电场强度，$\boldsymbol{D}$ 是电位移矢量，$\boldsymbol{B}$ 是磁感应强度，$\boldsymbol{H}$ 是磁场强度，$\boldsymbol{J}$ 是电流密度，ρ 是电荷密度，∇ 为哈密顿算符，它在直角坐标系下的表达式为

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com

式(1-1)是全电流定律，它表明传导电流和位移电流即变化的电场都能产生磁场；式(1-2)是电磁感应定律，它表明变化的磁场产生电场 式(1-3)是磁通连续性原理，它表明不存在自由磁荷；式(1-4)是高斯定理，它表明电荷引起电场。若能求出场中空间每点 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 随时间的变化关系，则光波的性质也就可以知道了。

需要说明的是，麦克斯韦方程组的微分形式只在介质的物理性质连续的区域内成立，在不连续的分界面上，要用边界条件来表达电磁场变化的规律。在电磁场理论中，场矢量 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 在不连续的分界面上所满足的边界条件为

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0 \quad \text{或} \quad B_{1n}=B_{2n} \tag{1-5}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_s \quad \text{或} \quad D_{1n}-D_{2n}=\rho_s \tag{1-6}$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0 \quad \text{或} \quad E_{1t}=E_{2t} \tag{1-7}$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_S \quad \text{或} \quad H_{1t}-H_{2t}=\boldsymbol{J}_S \tag{1-8}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是界面上的单位法线，由介质 2 指向介质 1，ρ_s 和 $\boldsymbol{J}_S$ 分别代表分界面上的面电荷密度和面电流密度。

二、物质方程

麦克斯韦方程组中五个基本量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{J}$ 在各向同性介质中有如下关系

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E} \tag{1-9}$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E} \tag{1-10}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}=\mu_0\mu_r\boldsymbol{H} \tag{1-11}$$

其中 σ 是介质的电导率；ε 是介质的介电常数，ε_r 是相对介电常数；ε_0 是真空中的介电常数；μ 是介质的磁导率，μ_r 是相对磁导率；μ_0 是真空中的磁导率。方程式(1-9)～式(1-11)反映了在电磁场作用 下的介质的特性，称为物质方程。

σ、ε、μ 反映了介质的性质，是和介质本身性质有关的常数。

例如对于导体，$\sigma \neq 0$，而对于绝缘体 $\sigma = 0$ 对于非铁磁物质，$\mu_r \approx 1$，$\mu \approx \mu_0$ 对于各向同性介质，ε_r 是一标量，而在各向异性介质中，ε_r 是一张量。本书的前二章讨论各向同性介质中的光学现象，并假定介质是透明的、均匀的。

三、电磁场的能量定律

前面我们给出的 E、D、B、H 四个基本量在光学中都是无法直接测量的量，它们只有辅助的意义。在光学中能够测量的量是光强，光强就是电磁场的能量通量，从麦克斯韦方程组和物质方程组出发可推导出电磁场的能量定律，它的微分形式为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{S} = 0 \tag{1-12}$$

其中

$$\omega = \omega_e + \omega_m = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \frac{1}{2}\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B} \tag{1-13}$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{1-14}$$

ω 为总的电磁能密度，S 为玻印亭矢量，它代表单位时间内通过垂直于 E 和 H 方向上单位面积的能量，即能流密度或能量通量。为了更清楚地说明能量定律的物理意义，利用散度定理将能量定律的微分形式化成积分形式为

$$\oint (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\partial W}{\partial t} \tag{1-15}$$

其中

$$W = \int_\tau \omega \mathrm{d}\tau \tag{1-16}$$

为体积 τ 内电磁场的总能量，$\mathrm{d}s$ 是包围体积 τ 的整个表面上的面元矢量，积分表达式说明体积 τ 中单位时间内总电磁能量的减少等于从 τ 的整个表面 s 流出去的电磁能量，因此它实际上是能量守恒定律在电磁场中的具体表达式。

在光学中玻印亭矢量 S 是一个十分重要的物理量，它的大小

表示光的强度，它的方向代表光的能量传播方向，即光线方向。E、H、S 构成右手螺旋系，三者两两正交。

四、波动方程

麦克斯韦方程组给出了场量 E、D、B、H 之间的相互关系，波动方程则进一步给出了每一场量随时间和空间的变化规律。

为简单起见，假设介质是均匀的、透明的，且介质中无自由电荷，则 $\rho = 0, \boldsymbol{J} = 0$，在此条件下利用麦克斯韦方程组和各向同性介质中的物质方程可得场量 E、H 的标准微分波动方程的形式为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1-17}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{1-18}$$

波动方程告诉我们：电磁场是以波的形式在空间传播，其速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n} \tag{1-19}$$

其中 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ 为真空中的光速，$n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ 称为介质的绝对折射率，该式称为麦克斯韦公式，它将描述介质光学性质的常数 n 和描述介质电磁学性质的常数 ε_r、μ_r 联系在一起了。对于非铁磁物质，$\mu_r \approx 1$，$n \approx \sqrt{\varepsilon_r}$，一般的透明介质就是这种情况。

§1-2 平面电磁波

波动方程(1-17)和(1-18)是两个偏微分方程，它们的解可以有多种形式，平面波、球面波和柱面波都可满足方程，在求解方程时，要根据 E 和 H 满足的边界条件和初始条件，决定解的具体形式。这里，以平面波为例，求解波动方程，并讨论平面波在各向

同性均匀透明介质中传播的一些特性。

一、波动方程的平面波解

波面为一平面的波叫平面波。波面是指任一时刻振动状态相同的点所构成的面，也称同相面。平面波是波动方程最基本的解，因为任何一种复杂的波可以分解成不同频率的平面波的迭加。假设平面波沿 z 方向传播，那么场矢量只与 z 和 t 有关，而与 x、y 无关。波动方程可化为

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1-20}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{1-21}$$

该方程的解为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{f}_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + \boldsymbol{f}_2\left(t + \frac{z}{v}\right) \tag{1-22}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{g}_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + \boldsymbol{g}_2\left(t + \frac{z}{v}\right) \tag{1-23}$$

其中 $\boldsymbol{f}_1$、$\boldsymbol{f}_2$ 和 $\boldsymbol{g}_1$、$\boldsymbol{g}_2$ 为四个任意函数。$\boldsymbol{f}_1$、$\boldsymbol{g}_1$ 表示以速度 v 沿 z 正方向传播的波，$\boldsymbol{f}_2$、$\boldsymbol{g}_2$ 表示以同一速度沿 z 负方向传播的波。

式(1-22)和式(1-23)是用矢量表示的平面波解的形式，称为矢量波，用标量表示的波则称为标量波。针对不同的问题应用不同的表示形式，例如：在讨论光的偏振现象时，要讲究光波的振动方向，因而光波要用矢量波表示。在讨论光的干涉、衍射现象时，一般不必讲究振动方向，而只要知道振动的大小，因而光波可用标量波表示。

二、简谐平面波

一列波，如果在空间每一点的振动都是时间 t 的简谐函数，即随时间作简谐变化，这样的波就叫做简谐波。对于沿 s 方向传播

需要全本请访问 www.ertongbook.com

的简谐平面波，其数学表达式为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\cos[\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \delta_0] \tag{1-24}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}\cos[\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \delta_0] \tag{1-25}$$

写成标量形式为

$$E = A\cos[\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \delta_0] \tag{1-26}$$

$$H = B\cos[\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \delta_0] \tag{1-27}$$

其中 A 和 B 分别为电振动和磁振动的振幅，余弦项的宗量（$\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \delta_0$）称为相位，它决定着简谐平面波在传播方向上各点引起的振动的状态。ω 是角频率，δ_0 是初相位，$\boldsymbol{r}$ 是所讨论点的位置矢量，$\boldsymbol{k}$ 是波矢，其大小(通常称为波数)为

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

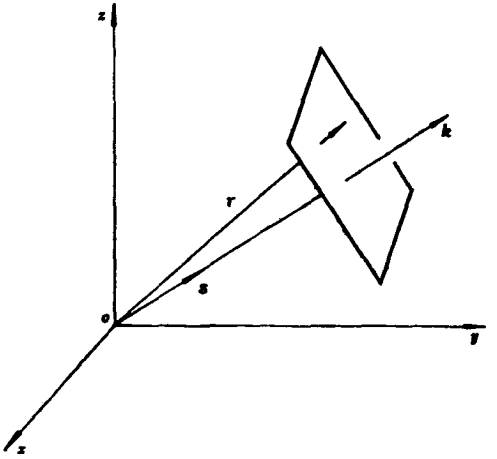


图 1－1　波矢和位置矢量

如图 1－1 所示。$\boldsymbol{k}$ 的方向是波的传播方向，是波面或等相面的传播方向，与等相面垂直，是等相面的法线方向。$\boldsymbol{k}$ 的矢量表示式为

$$\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{s} \tag{1-28}$$

角频率 ω 和简谐平面波振动频率 ν 的关系为

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{1}{T} \tag{1-29}$$

T 为周期。周期 T 与速度 v 的乘积称为波长(λ),即

$$\lambda = vT \tag{1-30}$$

由于简谐平面波的传播速度随介质而异，而频率与介质无关，因此在不同的介质中，波长有不同的数值。真空中的波长为

$$\lambda_0 = cT$$

λ 与 λ_0 的关系为

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \tag{1-31}$$

n 是简谐平面波在其中传播的介质的折射率。相应地有

$$k = nk_0 \tag{1-32}$$

k_0 为真空中的波矢。

对于光来说，它同时包含电矢量和磁矢量，从波的传播来看，虽然电矢量和磁矢量处于同等的地位，但从光与物质的相互作用来看，两者并不相同。例如光波的电磁场对物质中带电粒子的作用，磁场的作用远比电场为弱。实验也证明照相底板感光的是电场而不是磁场，对视网膜起作用的也是电场而不是磁场，所以通常把电矢量 $\boldsymbol{E}$ 称为光矢量，把 $\boldsymbol{E}$ 的振动称为光振动。在讨论光的振动性质时,只考虑电矢量 $\boldsymbol{E}$ 即可。

三、简谐平面波的复数形式

为了运算方便，常常把简谐平面波的函数形式写成复数形式。可将式(1-26)写为

$$E = \mathrm{Re}[A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \delta_0)}] = \mathrm{Re}[A(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}] \tag{1-33}$$

其中

$$A(r) = Ae^{-i(k\cdot r-\delta_0)} \tag{1-34}$$

是表示除去时间简谐变化的因子 $e^{i\omega t}$ 的部分,称为复振幅,它仅仅是所考查点的位置 r 的函数，$i=\sqrt{-1}$. Re[ ] 表示取括号中复数的实数部分。为了简化书写，一般略去 Re 而将式(1-33)写为

$$E = A(r)e^{i\omega t} \tag{1-35}$$

这种替代完全是形式上的，我们始终应理解成取 $A(r)e^{i\omega t}$ 的实数部分。

需要说明的是，采用复数形式进行线性运算时，可直接用复数形式代入进行运算，将最后结果取实部；但对于非线性运算，必须先取实部，然后进行运算，而将最后结果再取实部。简谐波既可用余弦函数式表示，也可用正弦函数式表示。如果用正弦函数表示，则在相应的复数表示法中，应理解成取虚部。

四、简谐平面电磁波的性质

下面我们利用麦克斯韦方程组来分析一下简谐平面电磁波的基本性质。

1. 光波是横波

分别取式(1-24)和式(1-25)复数形式的散度有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\cdot\nabla e^{i(\omega t-k\cdot r+\delta_0)} = -ik\cdot\boldsymbol{E}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}\cdot\nabla e^{i(\omega t-k\cdot r+\delta_0)} = -ik\cdot\boldsymbol{H}$$

由麦克斯韦方程组中式(1-3)和式(1-4)，在远离辐射源区($\rho=0$),有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \mu\nabla\cdot\boldsymbol{H} = 0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0$$

故

$$k\cdot\boldsymbol{H} = 0 \tag{1-36}$$

$$k\cdot\boldsymbol{E} = 0 \tag{1-37}$$

由此得出结论：$k\perp E$, $k\perp H$，电矢量和磁矢量的振动方向垂直于

波的传播方向。平面波是横波。

2. $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 互相垂直

分别取两式(1－24)和(1－25)复数形式的旋度有

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{A} \times \nabla e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \delta_0)} = -i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -\boldsymbol{B} \times \nabla e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \delta_0)} = -i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H}$$

由式(1－1)、(1－2)

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\mu(i\omega)\boldsymbol{H}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \varepsilon(i\omega)\boldsymbol{E}$$

从而有

$$\boldsymbol{H} = \frac{+1}{\mu\omega}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}) \qquad (1-38)$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{-1}{\varepsilon\omega}(\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H}) \qquad (1-39)$$

式(1－38)、(1－39)表明 $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{H}$。由 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$ 所满足的关系式可得如图 1－2 所示的矢量关系。

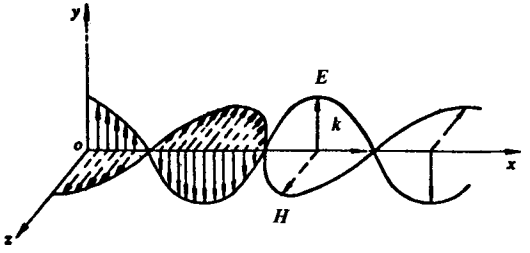


图 1－2　$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$ 之间的关系

3. $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 同相

由式(1－38)有

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega\mu\boldsymbol{H}$$

$$kE = \omega\mu H$$

$$\frac{E}{H} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\epsilon}} \tag{1-40}$$

式(1-40)表明 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的数值之比为一正实数，因此两矢量有同样的相位，传播时同步地变化。

4.光场能量密度和能流密度

我们知道电磁场的场能密度因而光场的场能密度为

$$\omega = \omega_e + \omega_m = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot D + \frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2$$

将式(1-40)代入，得

$$\omega = \epsilon E^2 = \mu H^2 \tag{1-41}$$

此式表明平面电磁波中电场能量和磁场能量相等。另一方面，玻印亭矢量为

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = EH\boldsymbol{s} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}E^2\boldsymbol{s} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}H^2\boldsymbol{s} \tag{1-42}$$

利用 $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ 和式(1-41)，得

$$\boldsymbol{S} = \frac{\epsilon E^2}{\sqrt{\epsilon\mu}}\boldsymbol{s} = v\omega\boldsymbol{s} \tag{1-43}$$

该式说明，玻印亭矢量的大小为 $v\omega$，方向 $\boldsymbol{s}$ 代表光的传播方向，或更严格地说，代表电磁能量即光能量和光线的传播方向。

对于光源来说，电场和磁场的变化极其迅速，其频率在 $10^{14}\sim10^{15}$Hz 的数量级，所以 $\boldsymbol{S}$ 的值也是迅速变化的。人眼和任何其它接收器都不可能接收到 $\boldsymbol{S}$ 的瞬时值，而只能接收 $\boldsymbol{S}$ 的时间平均值，即

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{S}\rangle &= \langle\omega v\rangle\boldsymbol{s} = \epsilon v\langle E^2\rangle\boldsymbol{s}\\ &= \boldsymbol{s}\epsilon v\frac{1}{T}\int_0^T A^2\cos^2(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \delta_0)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\epsilon v A^2\boldsymbol{s}\end{aligned}$$

其中〈〉表示对时间取平均值，在光学中通常把〈$\boldsymbol{S}$〉称为光强，用 I

表示,因此

$$I = \frac{1}{2}\epsilon v A^2 \tag{1-44}$$

如果只考虑相对光强,则 $I \propto A^2$.

§1-3 球面波和柱面波

一、球面波

波面为球面的波称为球面波，理想点光源在真空中或各向同性介质中发出的波就是球面波。如图 1-3 所示,球面波的波阵面

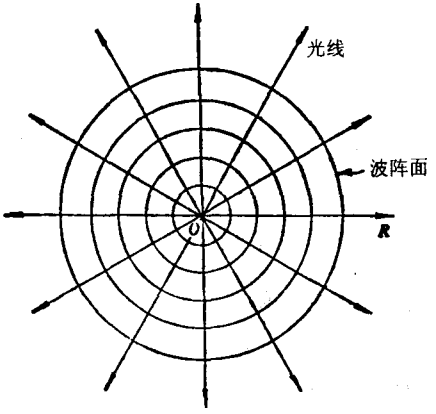


图 1-3 球面波示意图

上各点的相位相同，因此只要研究从 O 点出发的任一方向（例如 OR 方向）上各点的电磁场变化规律，就可以了解整个空间电磁场的情况。

采用球坐标系,假设 E 只是 r 的函数,与 θ、φ 无关即

需要全本请访问 www.ertongbook.com

$$E = E(r) \tag{1-45}$$

因此 $$\nabla^2 E = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rE) \tag{1-46}$$

波动方程(1－17)变为

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rE) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(rE) = 0 \tag{1-47}$$

这时直接利用平面波解可得

$$E(r) = \frac{f_1(r - vt)}{r} + \frac{f_2(r + vt)}{r} \tag{1-48}$$

这一结果说明，球面波振幅随距离 r 增加而成反比例地减少，式(1－48)中第一项代表由原点向外发散的球面波，第二项代表向原点会聚的球面波。

二、柱面波

柱面波是一个无限长的线光源发出的光波，它的波阵面具有柱面的形状。用同样的方法可得到柱面波的振幅与 $\sqrt{r}$ 成反比，波动方程柱面波解的形式为

$$E = \frac{f_1(r - vt)}{\sqrt{r}} + \frac{f_2(r + vt)}{\sqrt{r}} \tag{1-49}$$

实际上，严格的球面波和柱面波都是不能实现的，因为光源都有一定的大小；只是在距离 r 比光源的线度大小大得多的情况下，可以近似地把光波看成是球面波或柱面波。

§1－4 光波在介质界面上的反射和折射

本节将由边界条件为起点，讨论光波在两种均匀、透明、各向同性介质界面上反射、透射时所应遵循的一些规律。这是光学中的基本理论，也是光学分支学科——薄膜光学的理论基础。

一、反射定律和折射定律

如图 1－4 所示，$y=0$ 平面为分界面，坐标原点 O 在分界面内，$y>0$ 为介质 1，$y<0$ 为介质 2。

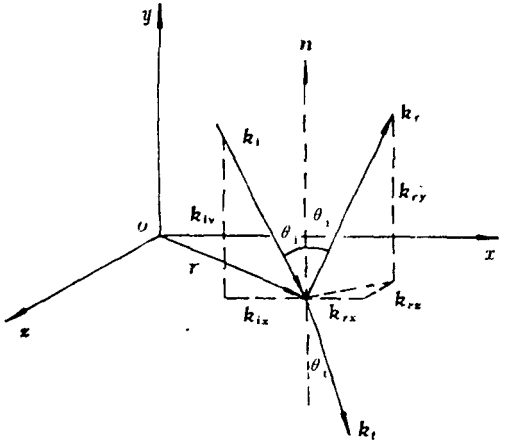


图 1－4　反射定律和折射定律的证明

设入射波为一简谐平面波，其电矢量为

$$\boldsymbol{E}^{(i)} = \boldsymbol{E}_0^{(i)} e^{i(\omega_i t - \boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r})} \tag{1-50}$$

则反射波和折射波也是简谐平面波

$$\boldsymbol{E}^{(r)} = \boldsymbol{E}_0^{(r)} e^{i(\omega_r t - \boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r})} \tag{1-51}$$

$$\boldsymbol{E}^{(t)} = \boldsymbol{E}_0^{(t)} e^{i(\omega_t t - \boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r})} \tag{1-52}$$

其中 ω_i、ω_r、ω_t 分别为入射波、反射波和折射波的角频率，它们的波矢分别为

$$k_i = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\omega_i}{v_1} \tag{1-53}$$

$$k_r = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\omega_r}{v_1} \tag{1-54}$$

$$k_t = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{\omega_t}{v_2} \tag{1-55}$$

根据边界条件(1-7)式，在分界面上，电矢量 E 的切向分量应该连续,因此

$$E_t^{(i)} + E_t^{(r)} = E_t^{(t)} \tag{1-56}$$

即

$$E_{0t}^{(i)} e^{i(\omega_i t - \boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r})} + E_{0t}^{(r)} e^{i(\omega_r t - \boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r})} = E_{0t}^{(t)} e^{i(\omega_t t - \boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r})} \tag{1-57}$$

上式可进一步改写为

$$A e^{i\omega_i t} + B e^{i\omega_r t} = C e^{i\omega_t t} \tag{1-58}$$

其中 A、B、C 只是位置 r 的函数，和时间 t 无关。当我们讨论分界面上某一固定点时，r 不变,为常数,因此 A、B、C 也为常数。此时，$Ae^{i\omega_i t}$, $Be^{i\omega_r t}$, $Ce^{i\omega_t t}$ 三个复数可以看成三个旋转矢量，它们的角速度分别为 ω_i, ω_r, ω_t。这三个矢量在某一时刻它们之间的关系如图 1-5 所示,即 C 为 A、B 之和。由于要求任何时刻，式（1-58)都成立,也就是说,当它们旋转到任何位置，C 始终是 A、B 之和，因此，唯一的可能是三个矢量的相对位置保持不变，即它们所构成的平行四边形的形状保持不变。这就要求三个矢量以同一角速度 ω 进行旋转。

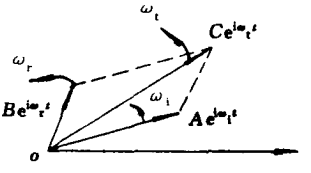


图 1-5　三个旋转矢量关系

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t = \omega \tag{1-59}$$

这说明,光波在反射、折射时,它的频率保持不变。

利用式(1-59)所得的结论，我们可以将式(1-57)简化为

$$E_{0t}^{(i)} e^{-i\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r}} + E_{0t}^{(r)} e^{-i\boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r}} = E_{0t}^{(t)} e^{-i\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r}} \tag{1-60}$$

其中 r 是位于 $y = 0$ 平面内的位置矢量,将 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}$ 代入上式有

$$(1-61)$$

由于边界条件不仅在任何时刻要得到满足，而且在分界面上任何点也都应该得到满足。先将式（1－61)中的 z 看成常数，x 作为变量,和式(1－57)分析完全类似，可得到与式(1－59)相类似的结论

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} \tag{1-62}$$

再将 x 看成常数，z 作为变量,得到

$$k_{iz} = k_{rz} = k_{tz} \tag{1-63}$$

假设入射面平行于 xoy 平面,因此,入射波矢 $\boldsymbol{k}_i$ 在 z 方向上的投影为零,即

$$k_{iz} = 0 \tag{1-64}$$

将式(1－64)代入(1－63)立即得到

$$k_{rz} = k_{tz} = 0 \tag{1-65}$$

这说明,反射波矢 $\boldsymbol{k}_r$ 和折射波矢 $\boldsymbol{k}_t$ 在 z 方向的分量为零,而波矢是代表光波传播方向的，这就说明了反射定律和折射定律的内容之一：反射光和折射光都在入射面内。

由图 1－5 可知

$$k_{ix} = k_i \sin\theta_i \tag{1-66}$$

$$k_{rx} = k_r \sin\theta_r \tag{1-67}$$

$$k_{tx} = k_t \sin\theta_t \tag{1-68}$$

另一方面，将式(1－59)代入式(1－53)一式(1－55),得

$$k_i = k_r \tag{1-69}$$

$$k_t = \frac{v_1}{v_2} k_i = \frac{n_2}{n_1} k_i \tag{1-70}$$

将式(1－66)、式(1－67)代入等式 $k_{rx} = k_{ix}$,并利用 $k_i = k_r$,得

$$\sin\theta_r = \sin\theta_i$$

$$\theta_r = \theta_i$$

由此证明了反射定律的内容之二，反射角等于入射角。

若将式(1－66)、式(1－68)代入等式 $k_{1x}=k_{ix}$，并利用式(1－70),可得

$$n_1\sin\theta_i=n_2\sin\theta_t$$

由此证明了折射定律的内容之二。

由上可知，几何光学中很早从实践中发现的反射定律和折射定律，其实是电磁场在介质界面上必须遵循边界条件的必然结果。

二、菲涅耳公式

前面讨论的反射定律和折射定律，只解决了反射光和折射光的传播方向问题，但未说明反射波、折射波与入射波之间的振幅和相位关系。菲涅耳公式就给出了它们之间的振幅和相位关系。

在讨论反射和折射时，需要考虑 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 两矢量的取向。由于任一偏振态的光均可分解为两个相互垂直的分量，一般是把它分解成在入射面内的分量（平行分量或称 p 分量）和垂直于入射面的分量（垂直分量或称 s 分量）。而平面电磁波在反射和折射时这两个分量是相互独立的一平行分量在反射、折射时只产生平行分量，垂直分量在反射、折射时只产生垂直分量。因此，我们可以分别讨论这两个分量。

先讨论电场强度 E 垂直于入射面的情况，即讨论 $E_\perp$ 分量和相应的 $H_{/\!/}$ 分量。坐标选取如图 1－6 所示。

设入射波的电矢量 $E_\perp$ 是沿 z 轴的正方向,则 $H_{/\!/}$ 的方向可按右手法则确定：$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 为光波传播方向。因此可确定 $H_{/\!/}$ 方向如图 1－6。设分界面上一点 A 为所讨论的点，我们的目的就是要求分界面上任一点 A 处入射波、反射波和折射波的 $\boldsymbol{E}$ 矢量之间的关系以及 $\boldsymbol{H}$ 矢量之间的关系。为清楚起见，在图上这三个波在 A 点的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 未画在 A 点上，而是分开画。

对于两透明介质的分界面，由式(1－7)和式(1－8),有下列边

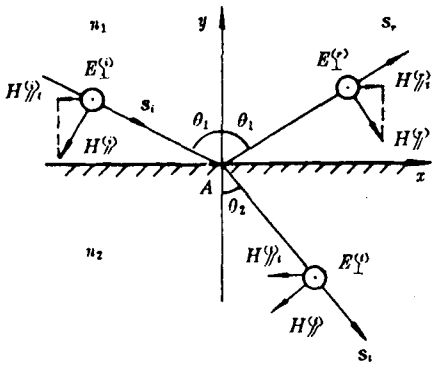


图 1－6　$E_\perp$、$H_{/\!/}$ 方向

界条件

$$E_\perp^{(i)} + E_\perp^{(r)} = E_\perp^{(t)} \tag{1-71}$$

$$(H_{/\!/}^{(i)} - H_{/\!/}^{(r)})\cos\theta_1 = H_{/\!/}^{(t)}\cos\theta_2 \tag{1-72}$$

根据式(1－40)有

$$\frac{E_\perp}{H_{/\!/}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{1-73}$$

对于非铁磁物质，$\mu_r \approx 1$，$\mu \approx \mu_0$，$\varepsilon_r = n^2$，则式(1－72)可写成

$$(E_\perp^{(i)} - E_\perp^{(r)})n_1\cos\theta_1 = E_\perp^{(t)}n_2\cos\theta_2 \tag{1-74}$$

把 E 的表示式(1－50)～(1－52)代入式(1－71)和(1－74)联立求解，即可得

$$E_{0\perp}^{(r)} = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}E_{0\perp}^{(i)} \tag{1-75}$$

$$E_{0\perp}^{(t)} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}E_{0\perp}^{(i)} \tag{1-76}$$

这就是反射光、折射光的垂直分量和入射光垂直分量之间的关系。

再讨论电场强度 E 平行入射面的情况，即讨论 $E_{/\!/}$ 分量和相应的 $H_\perp$ 分量。同理可求出

需要全本请访问 www.ertongbook.com