新世纪高职机电类教学改革规划教材

工 程 应 用 数 学

（上册）

主摇编摇万金保
副主编摇舒摇虹摇王文智
参摇编摇刘中瑞摇贺摇萍摇康晓红
摇摇摇摇周旭光摇董铸荣摇夏毓鹏

机 械 工 业 出 版 社

摇摇本套书是教育部“圆员世纪高职高专教育机械基础课程教学内容体系改革与实践”和广东省高教厅“高职高专教育机电类专业教学内容体系改革与实践”研究项目的试点教材之一，是通过教学实践探索及在国内外高职高专教育教学内容体系研究基础上完成的。

本套书以高等数学和理论力学为主线，适当介绍了线性代数、矢量代数、微分方程、振动理论及流体力学等相关内容。本书形成了以培养综合工程技术应用能力为目标的理论教学内容体系，适应了当前教学改革的需要。本套书分为上、下两册，共猿篇。本书为上册，包括：第员篇数学与力学基础，内容有矩阵与线性方程组、矢量代数、静力学、函数与极限等；第圆篇微积分与运动学，内容有导数与微分、质点运动学、刚体运动学、一元函数积分等。

本套书参考学时数为员源园学时。其中，上册为怨园学时，下册为缘园学时。

本书可作为高职高专及成人高校机电类专业数学和工程力学相关内容的教学用书，也可作为有关工程技术人员参考用书。

摇图书在版编目（悦陨孕）数据

摇工程应用数学 郾上册 辕方金保主编 郾—北京：机械工业出版社，圆园园园
摇新世纪高职机电类教学改革规划教材
摇陨杂月晕摇苑原员员员原园园园园园原园
摇Ⅰ郾工 郾圆郾摇Ⅱ郾方 郾圆郾摇Ⅲ郾工程数学原高等学校：技术学校原教材
摇Ⅳ郾栽月员员

摇中国版本图书馆 悦陨孕 数据核字（圆园园园）第 园园园园园园号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 圆圆号摇邮政编码 员园园园猿苑）
责任编辑：贡克勤摇宋学敏摇版式设计：冉晓华摇责任校对：张摇媛
封面设计：张摇静摇责任印制：李摇妍
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
圆园园园年苑月第员版第员次印刷
员园园皂皂伊员园园皂皂 员 辕 员远 · 员远 印张 · 猿园园千字
定价：圆园郾园园元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（园员园）远愿猿圆远圆怨源、远愿猿圆园远源怨
封面无防伪标均为盗版

前摇摇言

摇摇本书是作者在承担教育部“圆员世纪高职高专教育机械基础课程教学内容体系改革与实践”和广东省高教厅“高职高专教育机电类专业教学内容体系改革与实践”项目研究基础上，结合多年从事教学、科研开发与生产实践的经验编写的。

高职高专专业设置岗位针对性强，要求有较强的实践能力和解决生产、建设、管理、服务一线问题的综合能力。这种特点使得高等职业技术教育的理论课时大为减少，导致目前高职院校的学生不是基础理论学得太少，就是基础理论学的“夹生”，甚至成为公式、定理的记忆机器，难以在解决实际问题中发挥作用。如何在基本理论“适度、够用”的原则下，重构课程内容体系，是高职教育面临的重大课题。

《机械基础》课程涉及内容较广，且无明确的界定。但是在实践中，涉及机械基础的理论、概念、方法却是广泛的。为了满足高职教育特点、适合机电类不同专业的需要，本项目的“机械基础课程教学内容体系”已超越了传统的《机械基础》课程的基本内容体系，由本教材和《实用机械设计基础》、《机械应用基础》教材来实现。《工程应用数学》主要以高等数学和理论力学为基本内容，同时还包括了线性代数、矢量代数、常微分方程、振动理论及流体力学等内容，形成了相关理论内容的关联应用体系，以增加学生的学习兴趣和理论内容的灵活掌握。《实用机械设计基础》以机械设计、材料力学为基本内容，包括机械系统涉及的材料、液压与电动机驱动、动力平衡等，形成了对机械系统进行分析、构建与应用的综合应用体系，以增强学生对机械系统的分析与构建的实践应用能力。《机械应用基础》则以机械基础为基本内容，包括常用机械（构）的原理、结构、使用、维护中所涉及的机构、零件、材料、公差配合、驱动、平衡及效率等内容，形成对机械系统进行使用与维护的综合应用体系，以增强学生对机械系统认识、使用与维护的实际综合应用能力。

《工程应用数学》将高等数学和理论力学有机地结合在一起，将高等数学、理论力学、机械设计相关内容进行合理编排，让学生在相对较少的学时内学到的更多、学得更好、用得更活是编者的心愿。

《工程应用数学》是“机械基础课程教学内容体系”改革的一部分。对高职高

专机电类专业的学生，主要以上册内容为主，下册内容可根据专业进行选取。《工程应用数学》教学内容的选取，应根据专业要求，结合后续的《实用机械设计基础》或《机械应用基础》教学内容综合考虑。以真正实现高职高专教育面向实际、面向岗位、面向应用的目的。

参加本书编写的有：刘中瑞（第 员圆怨章），贺萍（第 猿源章），舒虹（第 缘远章），万金保（第 苑愿章），康晓红（第 员园章），周旭光（第 员员章），王文智（第 员圆章），董铸荣（第 员猿章），夏毓鹏（第 员源章）。全书由万金保主编。

由于编者水平有限，缺点、错误及不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正，并提出宝贵的意见和建议。

编摇摇者

目录

第 员篇摇数学与力学基础

第 员章摇矩阵与线性方程组

矩阵是一种重要的数学工具，在经济工作和工程问题中有着广泛的应用。本章介绍矩阵的基本知识，包括矩阵的概念和运算，矩阵的初等变换，矩阵的逆矩阵，以及以矩阵为工具求解线性方程组。

员援员摇矩阵及其运算

员援员援员摇矩阵的概念

引例 员摇设工厂生产 粤，月，悦三种产品，需要甲、乙、丙、丁四种原材料，其用量如表 员援员所示。

表摇员援员摇摇　　　　(单位：仟克／件)

	甲材料	乙材料	丙材料	丁材料
粤产品	员	圆	猿	源
月产品	圆	猿	员	猿
悦产品	猿	圆	源	员

摇摇如果取出表中的数据并保持原来的相对位置，则可以得到一个排列成长方形的数表

(员摇圆摇猿摇源
圆摇猿摇员摇猿
猿摇圆摇源摇员)

摇摇引例 圆摇在 灶个未知数、皂个方程的线性方程组

{葬员员曾员 垣葬员圆曾圆 垣… 垣葬员灶曾灶 越遭员
葬圆员曾员 垣葬圆圆曾圆 垣… 垣葬圆灶曾灶 越遭圆
摇：摇摇：摇摇摇摇：摇摇：
葬皂员曾员 垣葬皂圆曾圆 垣… 垣葬皂灶曾灶 越遭皂　　(员援员)

中，如果把未知数 曾员，曾圆，… ，曾灶前的系数

葬蚤躁(蚤越员，圆，…，皂；摇躁越员，圆，…，灶

和常数项

$$b_i(i=1,2,\cdots,m)$$

按原有的顺序写出，也得到一个 m 行 $n+1$ 列的长方形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

由上面的两个引例可见，对于这一类的问题可以用不同的长方形数表来表示，数学上把这样的长方形数表称为矩阵。由此看来，矩阵就是数字表格的抽象形式。

定义 1.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的长方形数表称为一个 $m\times n$ 矩阵。通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 等表示矩阵，记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 中的横排称为矩阵的行，纵排称为矩阵的列。数 a_{ij} 称为矩阵 A 中第 i 行第 j 列的元素。a_{ij} 的下标 i 称为行标，下标 j 称为列标，分别表示元素 a_{ij} 在矩阵 A 中所处的行列位置。

在需要标明矩阵 A 行数 m 和列数 n 时，可写成 $A_{m\times n}$。矩阵 A 有时也记作 (a_{ij})，或者 $(a_{ij})_{m\times n}$。

所有元素均为 0 的矩阵称为零矩阵，用 $O_{m\times n}$ 或 O 表示。

只有一行元素的矩阵

$$(a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_n)$$

称为行矩阵。

只有一列元素的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

称为列矩阵。

为了叙述方便，将矩阵中元素全部为 0 的行称为零行；元素不全为 0 的行称为非零行。

如果从矩阵 A 的第二行起，每一行第一个非零元素的列标都大于上一行第一个非零元素的列标，并且矩阵 A 中零行（如果存在的话）下面不再有非零行，则称

矩阵 粤为阶梯形矩阵。以下为几个阶梯矩阵的例子：

$$\begin{pmatrix}\text{源摇园摇猿}\\ \text{园摇园摇员}\end{pmatrix}\text{摇摇}\begin{pmatrix}\text{园摇猿摇缘}\\ \text{园摇园摇猿}\\ \text{园摇园摇园}\end{pmatrix}\text{摇摇}\begin{pmatrix}\text{源摇园摇缘}\\ \text{园摇猿摇圆}\\ \text{园摇园摇猿}\end{pmatrix}$$

摇摇当矩阵 粤的行数 皂等于列数 灶时，称矩阵 粤为 灶(皂) 阶方阵。

特别地，规定一阶方阵就是一个数，即

$$\text{粤 越 (葬 越葬}$$

摇摇方阵 粤中从左上角到右下角由元素 $\text{葬}_{\text{员员}}$,$\text{葬}_{\text{圆圆}}$,…,$\text{葬}_{\text{灶灶}}$连成的直线称为方阵 粤的主对角线。

如果方阵 粤中主对角线左下方的元素均为 园则称 粤为上三角矩阵，即

$$\text{粤 越}\begin{pmatrix}\text{葬}_{\text{员员}} & \text{葬}_{\text{员圆}} & \cdots & \text{葬}_{\text{员灶}}\\ & \text{葬}_{\text{圆圆}} & \cdots & \text{葬}_{\text{圆灶}}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \text{葬}_{\text{灶灶}}\end{pmatrix}$$

摇摇类似地，形如

$$\begin{pmatrix}\text{葬}_{\text{员员}} & & & \\ \text{葬}_{\text{圆员}} & \text{葬}_{\text{圆圆}} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \text{葬}_{\text{灶员}} & \text{葬}_{\text{灶圆}} & \cdots & \text{葬}_{\text{灶灶}}\end{pmatrix}$$

的方阵称为下三角矩阵。

上、下三角矩阵统称为三角矩阵。

如果方阵 粤中除主对角线上的元素之外，其他的元素全为 园则称 粤为对角矩阵。即

$$\text{粤 越}\begin{pmatrix}\text{葬}_{\text{员员}} & & & \\ & \text{葬}_{\text{圆圆}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \text{葬}_{\text{灶灶}}\end{pmatrix}$$

容易看出，当且仅当方阵 粤既是上三角矩阵又是下三角矩阵时才为对角矩阵。

如果对角矩阵中的主对角线上的元素全为 员则称之为单位矩阵，记为 耘，即

$$\text{耘 越}\begin{pmatrix}\text{员} & & & \\ & \text{员} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \text{员}\end{pmatrix}$$

员援圆援圆摇矩阵的运算

员援圆援圆援员摇矩阵的相等

定义员援圆援圆摇设矩阵粤越(葬$_{蚤躁}$)$_{皂伊灶}$、月越(遭$_{蚤躁}$)$_{皂伊灶}$,则当且仅当葬$_{蚤躁}$越遭$_{蚤躁}$(蚤越员,圆,…,皂;躁越员,圆,…,灶)时有粤越月。

由定义员援圆援圆,$\begin{pmatrix} 园摇园 \\ 园摇园 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 园摇园摇园 \\ 园摇园摇园 \end{pmatrix}$虽然都是园矩阵,但它们并不是相等的矩阵。

【证略】

员援圆援圆援圆摇矩阵的加法和减法

定义员援圆援猿摇设矩阵粤越(葬$_{蚤躁}$)$_{皂伊灶}$、月越(遭$_{蚤躁}$)$_{皂伊灶}$,则矩阵粤与矩阵月的和定义为:悦越粤垣月越(葬$_{蚤躁}$垣遭$_{蚤躁}$)$_{皂伊灶}$。

例员援圆援员摇设粤越$\begin{pmatrix} 员摇猿摇圆 \\ 圆摇员摇猿 \end{pmatrix}$,月越$\begin{pmatrix} 员摇源摇员 \\ 源摇猿摇圆 \end{pmatrix}$,求粤垣月。

解摇　　粤垣月越$\begin{pmatrix} 员摇猿摇圆 \\ 圆摇员摇猿 \end{pmatrix}$垣$\begin{pmatrix} 员摇源摇员 \\ 源摇猿摇圆 \end{pmatrix}$

越$\begin{pmatrix} 员垣员 & 猿垣源 & 圆垣员 \\ 圆垣源 & 员垣猿 & 猿垣圆 \end{pmatrix}$

越$\begin{pmatrix} 圆摇苑摇猿 \\ 远摇源摇缘 \end{pmatrix}$

容易验证矩阵的加法满足以下的规律(设粤、月、悦都是皂伊灶矩阵):

员.矩阵的加法满足交换律、结合律,即

粤垣月越月垣粤

(粤垣月)垣悦越粤垣(月垣悦)

摇摇圆.对于任意的矩阵粤,总有粤垣园越粤。

猿.对于任意的矩阵粤,总存在惟一的矩阵月,使粤垣月越园

把使粤垣月越园成立的矩阵月称为矩阵粤的负矩阵,记作月越原粤。

利用负矩阵定义,两个矩阵的减法可写为:

粤原月越粤垣(原月)

摇摇应该注意:只有当矩阵粤与矩阵月的行数、列数都相同时,才能进行加法或减法的运算。

例员援圆援圆摇设粤越$\begin{pmatrix} 员摇猿 \\ 圆摇源 \end{pmatrix}$,月越$\begin{pmatrix} 源摇圆 \\ 猿摇员 \end{pmatrix}$,且粤垣载越月,求载。

解摇　　载越月原粤

越$\begin{pmatrix} 源摇圆 \\ 猿摇员 \end{pmatrix}$原$\begin{pmatrix} 员摇猿 \\ 圆摇源 \end{pmatrix}$

越$\begin{pmatrix} 源原员 & 圆原猿 \\ 猿原圆 & 员原源 \end{pmatrix}$

越 猿摇 原员
员摇 原猿

员援圆援猿摇常数与矩阵的乘法

定义 员援源摇常数 λ 与矩阵 粤越(葬)蚤躁 皂伊灶 的乘积记作 λ粤或 粤λ,定义为

λ粤 越粤λ 越λ (葬)蚤躁 皂伊灶 越 (λ葬)蚤躁 皂伊灶

摇摇例 员援猿摇设 粤越 (员摇圆摇猿 / 源摇缘摇远 / 苑摇愿摇怨),求 圆粤。

解摇 圆粤越圆 (员摇圆摇猿 / 源摇缘摇远 / 苑摇愿摇怨) 越 (圆 源 远 / 愿 员园 员圆 / 员源 员远 员愿)

容易验证数乘矩阵满足以下的算律(设 粤、月为 皂伊灶矩阵,λ、μ 为常数):

员) 员· 粤越粤;

圆) ($\lambda\mu$)粤越λ(μ粤);

猿) (λ 垣μ)粤越λ粤垣μ粤;

源) λ(粤垣月) 越λ粤垣λ月。

员援圆援源摇矩阵与矩阵的乘法

定义 员援缘摇设有 皂伊泽矩阵 粤越(葬)蚤躁 皂伊泽和 泽伊灶矩阵 月越(遭)蚤躁 泽伊灶,定义 粤与 月的乘积矩阵是

悦越粤月 越(糟)蚤躁 皂伊灶

其中

糟蚤躁 越葬蚤员遭员躁 垣葬蚤圆遭圆躁 垣… 垣葬蚤泽遭泽躁 越 $\sum_{噪越员}^{泽}$ 葬蚤噪遭噪躁(蚤越员,圆,…,皂;躁越员,圆,…,灶)

摇摇从定义 员援缘可见,乘积矩阵 粤月越悦的第 蚤行第 躁列的元素 糟蚤躁就是矩阵 粤的第 蚤行的元素与矩阵 月的第 躁列的对应元素的乘积之和。但是,必须注意,只有当左边的矩阵 粤的列数等于右边的矩阵 月的行数的时候,两个矩阵才能相乘,否则没有意义。

例 员援源摇设 粤越 (员摇圆摇猿 / 圆摇员摇园),月越 (源 员 / 原员 员 / 圆 园),试求 粤月和 月粤。

解摇 粤月越 (员 园 猿 / 圆 员 园) (源 员 / 原员 员 / 圆 园)

越 (员伊源垣圆伊(原员)垣猿伊圆 员伊员垣圆伊员垣猿伊园 / 圆伊源垣员伊(原员)垣园伊圆 圆伊员垣员伊员垣园伊园)

$$越\begin{pmatrix}员园 & 员\\ 苑 & 猿\end{pmatrix}$$

$$月粤越\begin{pmatrix}源 & 员\\ 原员 & 员\\ 圆 & 园\end{pmatrix}\begin{pmatrix}员摇园摇猿\\ 圆摇员摇园\end{pmatrix}$$

$$越\begin{pmatrix}源伊员垣员伊圆 & 源伊园垣员伊员 & 源伊猿垣员伊园\\ (原员)伊员垣员伊圆 & (原员)伊园垣员伊员 & (原员)伊猿垣员伊园\\ 圆伊员垣园伊圆 & 圆伊园垣园伊员 & 圆伊猿垣园伊园\end{pmatrix}$$

$$越\begin{pmatrix}远 & 员 & 员园\\ 员 & 员 & 原猿\\ 圆 & 园 & 远\end{pmatrix}$$

按定义 员鄄缘，元素个数相同的行矩阵与列矩阵的乘积是一个一阶矩阵，也就是一个数。即

$$(葬_员摇葬_圆摇\cdots摇葬_灶)\begin{pmatrix}遭_员\\ 遭_圆\\ \vdots\\ 遭_灶\end{pmatrix}越葬_员遭_员垣葬_圆遭_圆垣\cdots垣葬_灶遭_灶$$

摇摇从例 员鄄源可以看出，粤月$\neq$月粤。需强调指出，一般来说矩阵的乘法不满足交换律。

矩阵乘法满足下列的规律（假设运算是可施行的）：

员（粤月）悦越粤（月悦）；

圆（粤垣月）悦越粤悦垣月悦；

摇悦（粤垣月）越悦粤垣悦月；

猿 λ（粤月）越（λ粤）月越粤（λ月）（λ 是一个常数）；

源 粤耘越粤，耘粤越粤（耘是单位矩阵）。

当 粤为 灶阶方阵的时候，定义方阵的幂为

$$粤^圆越粤粤，粤^猿越粤粤粤越(粤粤)粤，\cdots，粤^噪越\overbrace{粤粤\cdots粤}^{噪个}$$

由于矩阵的乘法不满足交换律，故一般地，（粤月）$^噪\neq$粤^{噪}月^噪。

再去考察引例 圆中的 灶个未知数、皂个方程的线性方程组式（员鄄员），如果令

$$粤越\begin{pmatrix}葬_{员员} & 葬_{员圆} & \cdots & 葬_{员灶}\\ 葬_{圆员} & 葬_{圆圆} & \cdots & 葬_{圆灶}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 葬_{皂员} & 葬_{皂圆} & \cdots & 葬_{皂灶}\end{pmatrix}，载越\begin{pmatrix}曾_员\\ 曾_圆\\ \vdots\\ 曾_灶\end{pmatrix}，月越\begin{pmatrix}遭_员\\ 遭_圆\\ \vdots\\ 遭_皂\end{pmatrix}$$

则式（员鄄员）可以表示为矩阵方程

$$粤栽 越月 \qquad （员郾圆圆）$$

显然，在形式上式（员郾圆圆）比式（员郾圆员）更简单。

员郾圆郾缘摇矩阵的转置

定义 员郾缘摇设有 皂伊灶矩阵 粤，如果 灶伊皂矩阵 月的第 躁行的元素恰好是矩阵 粤的第 躁列的对应元素（躁越员，圆，…，灶），则矩阵 月称为矩阵 粤的转置矩阵，记作 月越粤^{栽}。

例 员郾员猿摇粤越$\begin{pmatrix} 圆摇猿 \\ 员摇源 \\ 猿摇缘 \end{pmatrix}$，求 粤^{栽}。

解 粤^{栽}越$\begin{pmatrix} 圆摇员摇猿 \\ 猿摇源摇缘 \end{pmatrix}$

把矩阵的转置看成是一种运算，则矩阵的转置运算满足以下的规律（假设运算是可行的）：

员（粤^{栽}）^{栽}越粤；

圆（粤垣月）^{栽}越粤^{栽}垣月^{栽}；

猿（λ粤）^{栽}越λ粤^{栽}；

源（粤月）^{栽}越月^{栽}粤^{栽}。

设 粤为 灶阶方阵，如果满足 粤^{栽}越粤，即

$$葬_{蚤躁}越葬_{躁蚤}摇（蚤，躁越员，圆，…，灶）$$

则称 粤为对称矩阵。例如

$$粤越\begin{pmatrix} 员 & 猿 & 圆 & 缘 \\ 猿 & 圆 & 源 & 原员 \\ 圆 & 源 & 猿 & 原源 \\ 缘 & 原员 & 原源 & 源 \end{pmatrix}越粤^{栽}$$

由于 粤^{栽}越粤，所以 粤是对称矩阵。

设 月是 灶阶方阵，如果满足 月^{栽}越原月，即

$$葬_{蚤躁}越原葬_{躁蚤}摇（蚤，躁越员，圆，…，灶）$$

则称 月是反对称矩阵。例如

$$月越\begin{pmatrix} 园 & 猿 & 圆 & 缘 \\ 原猿 & 园 & 源 & 员 \\ 原圆 & 原源 & 园 & 原源 \\ 原缘 & 原员 & 源 & 园 \end{pmatrix}越原\begin{pmatrix} 园 & 原猿 & 原圆 & 原缘 \\ 猿 & 园 & 原源 & 原员 \\ 圆 & 源 & 园 & 源 \\ 缘 & 员 & 原源 & 园 \end{pmatrix}越原月^{栽}$$

由于 月^{栽}越原月，所以 月是反对称矩阵。

员园援猿摇矩阵的初等变换与逆矩阵

员园援猿援员摇矩阵的初等变换

定义 员园援猿摇对矩阵 粤进行下列变换：

员 互换矩阵 粤任意两行的对应元素（对调 蚤，躁两行，记作 则蚤→则躁）。

圆 用一个非零常数乘掩矩阵 粤的某一行中的所有元素（第 蚤行乘 噪记作 则蚤伊噪）。

猿 用一个数乘矩阵 粤中的某一行的所有元素后，再加到 粤的另一行对应的元素上去（第 躁行的 噪倍加到第 蚤行上，记作 则蚤垣噪则躁）。

这三种变换称为矩阵 粤的初等行变换。

把定义 员园援猿中的“行”换成“列”（所用记号“则”换成“糟”），即得矩阵 粤的初等列变换的定义。矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换。

定义 员园援源摇如果矩阵 粤经过有限次初等变换变成矩阵 月，则称矩阵 粤与矩阵 月是等价的，记为 粤~ 月。

等价是矩阵间的一种关系，它具有以下的性质：

员 反身性 每一个矩阵与它自己等价，即 粤~ 粤。

圆 对称性 如果矩阵 粤与 月等价，则矩阵 月与 粤等价，即，若 粤~ 月，则 月~ 粤。

猿 传递性 若 粤~ 月，且 月~ 悦，则 粤~ 悦。

例 员园援缘摇设 $粤越\begin{pmatrix} 员 & 原圆 & 原员 & 园 & 圆 \\ 原圆 & 源 & 圆 & 远 & 原远 \\ 圆 & 原员 & 园 & 圆 & 猿 \\ 猿 & 猿 & 猿 & 猿 & 源 \end{pmatrix}$，对矩阵 粤施行初等变换。

解 $粤 \overset{\substack{则圆垣圆则员 \\ 则猿原圆则员 \\ 则源原猿则员}}{\sim} \begin{pmatrix} 员 & 原圆 & 原员 & 园 & 圆 \\ 园 & 园 & 园 & 远 & 原圆 \\ 园 & 猿 & 圆 & 圆 & 原员 \\ 园 & 怨 & 远 & 猿 & 原圆 \end{pmatrix}$

$\overset{\substack{则圆→则猿 \\ 则猿→则源}}{\sim} \begin{pmatrix} 员 & 原圆 & 原员 & 园 & 圆 \\ 园 & 猿 & 圆 & 圆 & 原员 \\ 园 & 怨 & 远 & 猿 & 原圆 \\ 园 & 园 & 园 & 远 & 原圆 \end{pmatrix}$

$\overset{则猿原猿则圆}{\sim} \begin{pmatrix} 员 & 原圆 & 原员 & 园 & 圆 \\ 园 & 猿 & 圆 & 圆 & 原员 \\ 园 & 园 & 园 & 原猿 & 员 \\ 园 & 园 & 园 & 远 & 原圆 \end{pmatrix}$

$$\sim\begin{pmatrix} 员 & 原圆 & 原员 & 园 & 圆 \\ 园 & 猿 & 圆 & 圆 & 原员 \\ 园 & 园 & 园 & 原猿 & 员 \\ 园 & 园 & 园 & 园 & 园 \end{pmatrix} 越悦 \qquad (员援[illegible])$$

$$\sim\begin{pmatrix} 员 & 原圆 & 园 & 原员 & 圆 \\ 园 & 猿 & 圆 & 圆 & 原员 \\ 园 & 园 & 原猿 & 园 & 员 \\ 园 & 园 & 园 & 园 & 园 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 员 & 园 & 园 & 园 & 园 \\ 园 & 猿 & 圆 & 圆 & 原员 \\ 园 & 园 & 原猿 & 园 & 员 \\ 园 & 园 & 园 & 园 & 园 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 员 & 园 & 园 & 园 & 园 \\ 园 & 猿 & 园 & 园 & 园 \\ 园 & 园 & 原猿 & 园 & 员 \\ 园 & 园 & 园 & 园 & 园 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 员 & 园 & 园 & 园 & 园 \\ 园 & 猿 & 园 & 园 & 园 \\ 园 & 园 & 原猿 & 园 & 园 \\ 园 & 园 & 园 & 园 & 园 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 员 & 园 & 园 & 园 & 园 \\ 园 & 员 & 园 & 园 & 园 \\ 园 & 园 & 员 & 园 & 园 \\ 园 & 园 & 园 & 园 & 园 \end{pmatrix} 越阅 \qquad (员援[illegible])$$

矩阵 粤经过有限次的初等变换变成了矩阵 阅援 矩阵 阅是一种结构非常简单的矩阵，它的左上角是一个 猿阶的单位矩阵，其他元素全是 园援

对于任意一个 皂伊灶矩阵 粤，类似于例 员援缘的作法，经过有限次初等行变换，可以把矩阵 粤变换成阶梯矩阵（如式（员援[illegible]）中的矩阵 悦）。若进一步对阶梯进行初等列变换，可以把它变换成左上角是一个 则阶的单位矩阵（则≤皂蚤灶{皂，灶}），而其他元素全为 园的 皂伊灶矩阵（如式（员援[illegible]）中的矩阵 阅），把矩阵 阅称为是矩阵 粤的标准形，则称为矩阵 粤的秩，记作 则越砸(粤)。

定理 员援[illegible]摇如果矩阵 粤与矩阵 月等价，则必有

员）粤与 月有相同的标准形；

圆）粤与 月的秩相等，即 砸(粤)越砸(月)。

【证略】

特别地，设矩阵 粤是 灶阶方阵，如果 粤与 灶阶单位矩阵 耘等价（即 粤的标准形就是 灶阶单位矩阵 耘），则称 粤为非奇异矩阵（砸（粤） 越灶），否则称 粤为奇异矩阵。

在例 员援怨中，经过有限次的初等行变换，矩阵 粤变换成矩阵 允（式（员援猿）），矩阵允就是一个阶梯形矩阵。

定理 员援猿摇阶梯形矩阵的秩等于该矩阵中非零行的行数。

【证略】

由此看出，在求一个矩阵的秩的时候，只需经过有限次的初等行变换，将其变换成一个阶梯形矩阵，算出该阶梯形矩阵的非零行的行数就可以了。

在例 员援怨中，砸（粤） 越砸（允） 越猿。

员援圆援缘摇逆矩阵

定义 员援愿摇设 粤是 灶阶方阵，如果存在 灶阶方阵 月，使得

粤月 越月粤 越耘

则称矩阵 粤是可逆的，矩阵 月是矩阵 粤的逆矩阵，记 月越粤原员。

可以证明，灶阶方阵 粤如果有逆矩阵，则逆矩阵是惟一的。可逆矩阵具有下列的性质（运算有意义的话）：

员（粤原员）原员越粤；

圆（噪粤）原员越员/噪 粤原员摇（噪为非零常数）；

猿（粤月）原员越月原员粤原员；

源（粤栽）原员越（粤原员）栽。

定理 员援源摇方阵 粤可逆的充分必要条件是 粤为非奇异矩阵。

【证略】

下面，介绍用初等变换来判断方阵 粤是否可逆和求 粤原员的方法。

将 灶阶矩阵 粤与 灶阶单位矩阵 耘并列，构造成一个 灶伊圆灶矩阵（粤渣耘），对矩阵（粤渣耘）施行初等行变换（相当于对 粤和 耘同时施行相同的初等行变换），当把左边的矩阵 粤变换成单位矩阵 耘时，右边的单位矩阵 耘随之就变换成 粤原员了，即

（粤渣耘） 初等行变换 ~ （耘渣粤原员）

如果经过若干次初等行变换后，发现在左边的方阵中有某一行（列）的元素全变成零了，则可以断定 粤不可逆，此时 粤原员不存在。

例 员援员园摇用初等变换的方法判别矩阵 粤越（圆 圆 猿 / 员 原员 园 / 原员 圆 员）和 月