
工程应用及原理

第 1 章 模拟和数字控制

1.1 原理



图 1-1 系统结构框图

综合应用各类校正器的目的主要有：

- 提高速度；
- 减小由干扰引起的振幅；
- 消除位置误差；
- 使原本不稳定的过程稳定。

1.2 几种主要校正器

1.2.1 比例校正器

比例校正器取决于一个简单的常量 K ，表达式为：

$$C(p) = K$$

$$U(p) = K(p)$$

选择一个静态增益为 T_0 、时间常数为 t 的一阶过程：

$$T(p) = \frac{T_0}{1 + tp}$$

其闭环传递函数如下所示：

$$\text{CLTF} = \frac{S(p)}{S_c(p)} = \frac{T(p)C(p)}{1 + T(p)C(p)} = \frac{KT_0}{1 + tp + KT_0}$$

或

$$\text{CLTF} = \frac{T'_0}{1 + t'p}$$

其中

$$\begin{cases} T_0' = \frac{KT_0}{1+KT_0} \\ t' = \frac{t}{1+KT_0} \end{cases}$$

闭环系统阶次没有改变，其时间常数与 K 成反比。

如果 $KT_0 \gg 1$ ，那么位置误差和过程控制量将趋向于零，控制量很快达到饱和点，限制了校正器单独应用的可能性。

1.2.2 积分校正器

积分校正器表达式为：

$$C(p) = \frac{1}{T p}$$

与比例校正器不同，这种校正器能够消除位置误差而控制量不饱和。仍以前面的一阶过程为例，闭环传递函数如下所示：

$$\text{CLTF} = \frac{T_0}{T p(1+tp) + T_0} = \frac{1}{1 + \frac{T}{T_0} p + \frac{Tt}{T_0} p^2}$$

其闭环系统的阶次比过程阶次增加了一阶，没有位置误差。该闭环系统等价于一个具有如下自然振荡频率和阻尼比的二阶系统：

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{\frac{T_0}{Tt}} \\ x &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_i}{T_0 t}} \end{aligned}$$

默认 T_i 和过程主要时间常数 t 为同一个数量级。

1.2.3 微分校正器

微分校正器表达式为：

$$C(p) = T_d p$$

由于微分作用考虑了误差 $e(t)$ 的变化方向和速度，故这种校正器经常和比例校正器一起使用，表达式为：

$$C(p) = K(1 + T_d p)$$

仍以同样的一阶过程为例，其闭环传递函数为：

$$\begin{aligned} \text{CLTF} &= \frac{T_0 K(1 + T_d p)}{T_0 K(1 + T_d p) + 1 + tp} \\ \text{CLTF} &= \frac{T_0 K}{1 + T_0 K} \times \frac{1 + T_d p}{1 + \left(\frac{t + T_0 K T_d}{1 + T_0 K} \right) p} \end{aligned}$$

即

$$\text{CLTF} = T_0' \left(\frac{1 + T_d p}{1 + t' p} \right)$$

其中

$$\begin{cases} T_0' = \frac{T_0 K}{1 + T_0 K} \\ t' = \frac{t + T_0 K T_d}{1 + T_0 K} \end{cases}$$

如果 $T_0 K \gg 1$ ，那么

$$\begin{cases} T_0' \approx 1 \\ t' \approx \frac{t}{T_0 K} + T_d \end{cases}$$

这类校正器可提高系统的稳定性和速度。

1.2.4 微分反馈校正器

这类校正器的缺点是误差微分放大了干扰信号的噪声。为避免这一缺陷，可以考虑测量输出的微分形式。系统结构框图如图 1-2 所示。

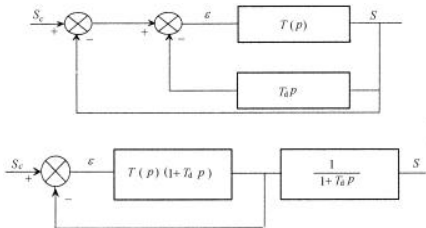


图 1-2 系统结构框图

该系统采用一个闭环的比例微分校正器和一个环外的延迟环节：

$$\frac{1}{1 + T_d p}$$

这个延迟环节的作用是使暂态响应变慢。这类校正器常用在转速计反馈中。

1.2.5 相位超前校正器

相位超前校正器表达式为：

$$C(p) = \frac{1 + a t p}{1 + t p}$$

其中

$$a > 1$$

这类校正器可以解释为一个比例微分校正器 $(1+a \tau p)$ 乘以一个时间常数为 τ 的惯性环节

$$\frac{1}{(1+\tau p)^2}$$

当频率

$$\omega_M = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$$

得到最大相位超前角

$$f_M = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$$

在高频范围内的最大振幅 $C_M = a$ 。

例子: $a=2$; $\tau=0.01$

advance.m file

```
% Phase lead corrector
w=1:1000;
a=2;
tau=0.01;
C=(1+a*tau*j*w)./(1+tau*j*w);
disp(['Max. angle = 'num2str(asin((a-1)/(a+1)))]);
disp(['frequency wm = 'num2str(1/(tau*sqrt(a)))]);

Max. Angle = 0.33983
Frequency wm = 70.7107

figure(1);
semilogx(w,abs(C));
title('Phase lead corrector module');
xlabel('Frequency in rad/s');
ylabel('Module'), figure(2);
semilogx(w,angle(C));
title('Phase lead corrector argument');
xlabel('Frequency in rad/s'),ylabel('Phase in rad');

[phimax,wmax]=max(angle(C));

disp(['Max. angle = 'num2str(phimax)]);
disp(['Frequency wm = 'num2str(wmax)]);

Max. angel=0.33983
Frequency wm=71
```

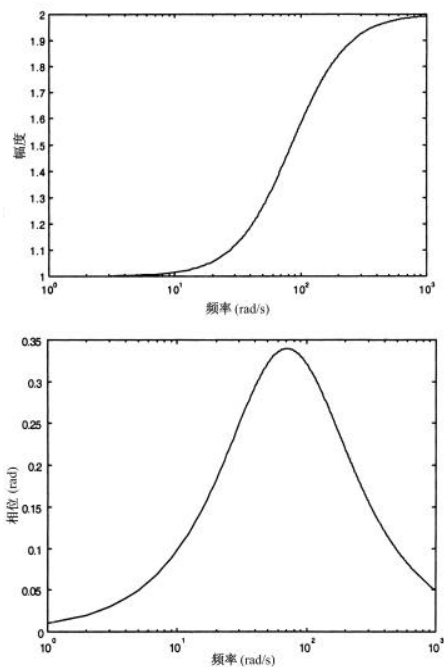


图 1-3 相位超前校正器的幅频特性和相频特性

这类校正器加宽系统的频带，因而提高了速度。把最大相位超前角调整到截止频率邻域，可以提高稳定性，产生的作用类似于微分。

1.2.6 相位滞后校正器

相位滞后校正器的表达式为：

$$C(p) = \frac{1 + tp}{1 + atp}$$

其中 $a > 1$ 。

这类校正器的波特图和相位超前校正器的波特图对称。

当频率

$$\omega_M = \frac{1}{t\sqrt{a}}$$

得到最大相位滞后角

$$f_M = -\arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$$

在高频范围内的最小振幅 $C_M = \frac{1}{a}$ 。

例子: $a=2$; $t=0.01$

delay.m file

```
% Phase lag corrector
w=1:1000;
a=2;
tau=0.01;
C=(1+tau*j*w)./(1+a*tau*j*w);
disp(['Max. delay =num2str(-asin((a-1)/(a+1)))']);
disp(['Frequency wm =num2str(1/(tau*sqrt(a)))']);

Max. Delay =-0.33984
Frequency wm = 70.7107

figure(1);
semilogx(w,abs(C));
title('Phase lag corrector modulus');
xlabel('Frequency in rad/s');
ylabel('Modulus');
figure(2);
semilogx(w,angle(C));
title('Phase lag corrector argument');
xlabel('Frequency in rad/s');
ylabel('Phase in rad');
[phimax,wmax]=min(angle(C));
disp(['Max. delay =num2str(phimax)']);
disp(['Frequency wm =num2str(wmax)']);

Max. angel=-0.33983
Frequency wm=71
```

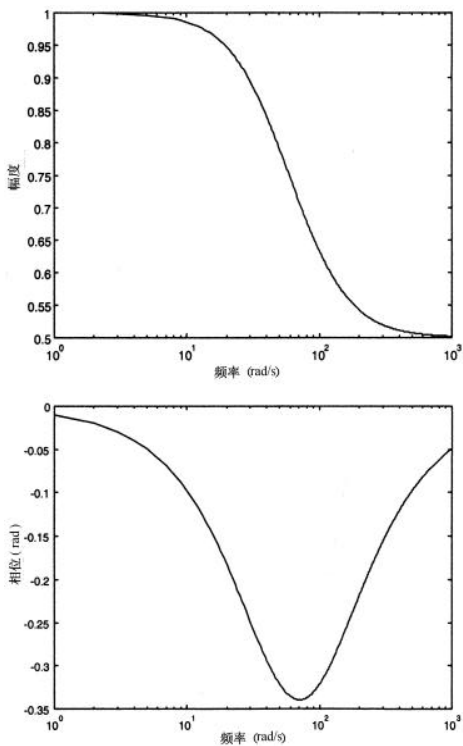


图 1-4 相位滞后校正器的幅频特性和相频特性

这类校正器的作用是减小高频振幅。在低频段要尽量消除由增加的相位延迟产生的干扰。这类校正器类似于积分校正器。

1.2.7 PID 控制器

PID 控制器是把比例、积分和微分作用结合起来，以利用其各自的优点的一类控制器，表达式为：

$$C(p) = K \left(1 + T_d p + \frac{1}{T_i p} \right) = \frac{K}{T_i p} (1 + T_i p + T_i T_d p^2)$$

方程中含有:

- 一个零极点;
- 一阶微分作用 $T_i p$;
- 二阶微分作用 $T_i T_d p^2$ 。

记

$$t = \sqrt{T_i T_d}$$

得到

$$C(p) = \frac{K}{T_i p} (1 + 2xtp + t^2 p^2)$$

其中

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_i}{T_d}}$$

例子: $x = 0.5; T_i = T_d; K = 10$

pid.m file

```
% PID corrector

w=1:10000;
Ti=0.01;
Td=0.01;
K=10;
C=K*(1+Td*j*w+1./(Ti*j*w));

figure(1);
loglog(w,abs(C));
title('PID corrector modulus');
xlabel('Frequency in rad/s');
ylabel('Modulus');

figure(2);
semilogx(w,angle(C));
title('PID corrector argument');
xlabel('Frequency in rad/s');
ylabel('Phase in rad');
```

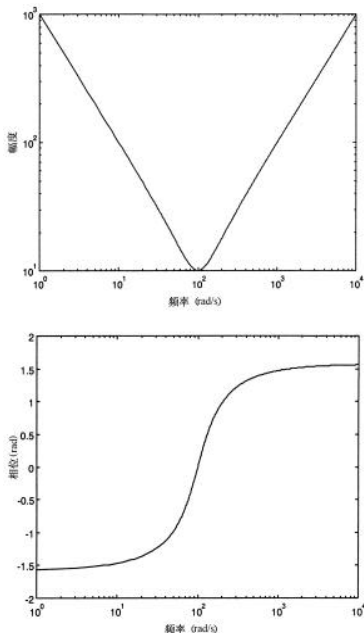


图 1-5 PID 控制器的幅频特性和相频特性

由图 1-5 可以看出，在高频段相位超前，在低频段相位滞后，所以能够增加伺服系统的增益 K 和自然振荡频率 ω_n 。对于 PID 校正，首先使得时间常数 t 满足：

$$\frac{1}{t} < \omega_r$$

其中 ω_r = 过程共振频率。然后计算符合条件的 \mathbf{x} 。另一种快速的方法是取 $T_i = t/10$ 和 $T_d = 0.25 T_i$ ，其中 t 为过程时间常数。上述 PID 具有放大高频信号（高波段噪声）的缺点，通常用得更多的是添加了滤波器的版本：

$$C(p) = K \left(1 + T_d p + \frac{1}{1 + T_i p} \right) \times \frac{1}{1 + \frac{T_d}{N} p}$$

一般选择 $N=10$ 。

```
pid_filter.m file
% PID filtering corrector
w=1:10000;
```

```

Ti=0.01;
Td=0.01;
K=10;
N=10;
C=K*(1+Td*j*w+1./(Ti*j*w)).*(1./(1+Td*j*w/N));

figure(1);
loglog(w,abs(C));
title('Modulus of the PID filtered corrector');
xlabel('Frequency in rad/s');
ylabel('Modulus');

figure(2);
semilogx(w,angle(C));
title('Argument of the PID filtered corrector');
xlabel('Frequency in rad/s');
ylabel('Phase in rad');

```

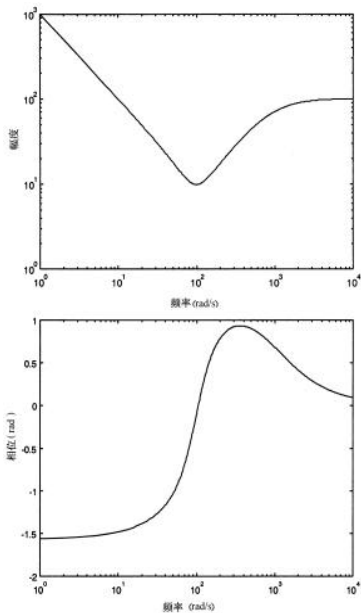


图 1-6 PID 滤波校正器的幅频特性和相频特性

1.2.8 前馈校正

前馈可直接引入一个时间函数，函数位置不同于比例微分校正器是在误差 e 之前，而是在输入之前。

◆ 前馈-随动系统（见图 1-7）

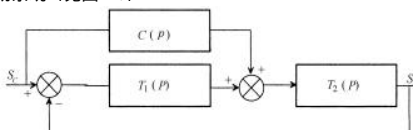


图 1-7 前馈-随动系统结构框图

$$\frac{S(p)}{S_c(p)} = \frac{T_2(p)[C(p) + T_1(p)]}{1 + T_1(p)T_2(p)}$$

如果选

$$C(p) = \frac{1}{T_2(p)}$$

那么

$$\frac{S(p)}{S_c(p)} = 1$$

要采用该方法，校正器通常需要分子的阶数比分母高一阶，这在实际中是不可能的，所以，只能试着采用近似的方法。

◆ 前馈-校正系统（见图 1-8）

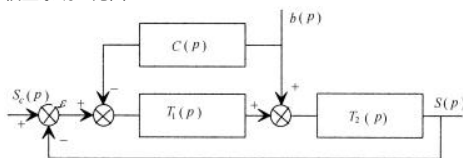


图 1-8 前馈-校正系统结构框图

这个过程需要主要干扰信号的先验知识。

当

$$C(p)T_1(p) = 1$$

时可消除如图 1-8 所示的预测链的干扰影响。这个系统具有与随动系统同样的概念缺陷。

1.2.9 PIR 校正器，纯滞后系统

这类校正器应用于传递函数如下的系统：

$$T(p) = KG(p)e^{-pt}$$

其中 t 为延迟秒数。如果 t 很小，可以用一个相位超前环节来补偿。如果情况不是如此，就

可能要考虑 PIR 校正器（也称为 Smith 预测器），见图 1-9。

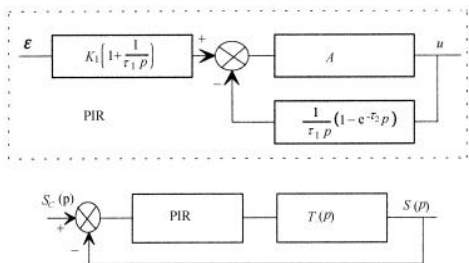


图 1-9 系统结构框图

Smith 校正器的传递函数为

$$\frac{u(p)}{e(p)} = \frac{K_1 A (1 + t_1 p)}{t_1 + A (1 - e^{-t_2 p})}$$

其闭环传递函数为

$$\frac{S(p)}{S_c(p)} = \frac{K_1 K A (1 + t_1 p) e^{-pt}}{K_1 K A (1 + t_1 p) e^{-pt} + (1 + tp)[t_1 p + A(1 - e^{-t_2 p})]}$$

调整参数

$$\begin{cases} K_1 = \frac{1}{K} \\ t_1 = t_2 = t \end{cases}$$

得到

$$\frac{S(p)}{S_c(p)} = \frac{e^{-pt}}{1 + \frac{t}{A} p}$$

增益 A 可以校正闭环系统的响应时间。

1.3 模拟校正器离散化

校正器 $C(p)$ 的离散需要对误差 e 和通常阶数为 0 的输出模块进行采样。从模拟过程到采样系统的变换过程主要是把 p 转换为 z 。这个过程有几种近似方法，最好的是梯形近似法叫做 Tustin 或双线性变换。变量 p 和变量 z 的关系是 $z = e^{pT_s}$ ，其中 T_s 为采样周期。用下式代替 p 可以得到 $C(z)$ 的表达式：

$$p = \frac{1}{T_s} \ln(z)$$

由于得到的结果难以应用，所以只采用 z 展开后的第一项：

$$\ln(z) = 2 \left(w + \frac{w^3}{3} + \Lambda \right)$$

其中

$$|w| = \left| \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right| < 1$$

即如果考虑等式的第一阶

$$p = \frac{1}{T_s} \ln(z) = \frac{2}{T_s} \times \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

由上述表达式得:

$$z = \frac{2+pT_s}{2-pT_s}, |z|=1 \forall w$$

由此变换后虚轴 $p=jw$ 变换为单位圆周。

双线性变换具有保持系统稳定性的优点,但缺点是 z 平面内的频率和 p 平面内的频率没有线性关系。实际上,

$$p = jw = \frac{2}{T_s} \times \frac{z-1}{z+1}$$

即

$$p = \frac{2}{T_s} \times \frac{e^{jwT_s} - 1}{e^{jwT_s} + 1} = \frac{2}{T_s} \times \frac{\left(e^{\frac{jwT_s}{2}} - e^{-\frac{jwT_s}{2}} \right)}{\left(e^{\frac{jwT_s}{2}} + e^{-\frac{jwT_s}{2}} \right)}$$

简化得:

$$p = \frac{2j}{T_s} \tan\left(\frac{wT_s}{2}\right)$$

其中 $p=jw$, 则表达式为:

$$w = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{wT_s}{2}\right)$$

如果 $wT_s \ll 1$, 那么:

$$\tan(x) \approx x, w = w'$$

在低频段频率是线性关系。否则,要使 w 以 1 个特殊值 w_0 对应于 w' , 必须考虑比例系数 k :

$$k = \frac{w_0}{\frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{w_0 T_s}{2}\right)}$$

1.4 校正系统的稳定性

1.4.1 一般稳定性条件

设 $T(p)$ 为过程传递函数, 表达式为

$$T(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

其中

$$D(p) = K(p - p_1)(p - p_2)\dots(p - p_n)$$

它可分解为

$$T(p) = \left[\frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n} \right] N(p)$$

对每一个实极点 p_k , 其响应为:

$$A_k e^{p_k t}$$

对每一个复极点 $p_k = a \pm jb$, 其响应为:

$$A_k e^{at} \cos(\omega t + f)$$

只有当每个指数响应都收敛到 0 时, 系统稳定。所以, 当每个极点的实数部分是严格负数时, 系统稳定。

1.4.2 奈奎斯特准则

首先画出开环传递函数的奈奎斯特图 (见图 1-10)。让 p 在 $-\infty$ 到 $+\infty$ 之间变化并从右边穿越零点, 如果开环传递函数的奈奎斯特图不包含 -1 点, 那么闭环系统稳定。

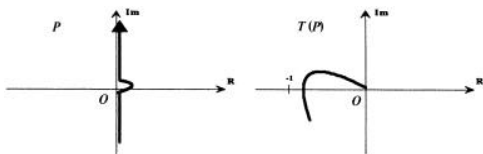


图 1-10 开环传递函数的奈奎斯特图

注意: 对于 $T(p) = \frac{T_0}{p^k(\dots)}$, $p=0$ 时, 曲线趋于无限, 所以应让 p 从 $0+$ 顺时针旋转 $k\pi$ 变为

$0-$ 。

1.4.3 离散系统稳定性

考虑一个离散系统传递函数为:

$$T(z) = \frac{k}{(z - z_0)(z - z_1)}$$

系统的单位阶跃响应为:

$$y(z) = \frac{z}{z-1} \times \frac{k}{(z - z_0)(z - z_1)}$$

两边同除以 z 并写成部分分式形式:

$$\frac{y(z)}{z} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-z_0} + \frac{c}{z-z_1}$$

如果回到原时域方程:

$$y(k) = au(k) + bz_0^k + cz_1^k$$

易得如果响应收敛，则系统稳定。所以每一项都收敛时，得到：

$$|z_n| < 1$$

1.5 例子

1.5.1 应用 MATLAB 函数

这里应用 MATLAB “控制系统工具箱”的一些函数。

◆ 传递函数的编写和显示

example1_chap1.m file

```
% Transfert function definition
num=[10 10];
den=[1 2 1];
sys1=TF(num,den);
printsys(num,den,'p');
```

```
num/den=
10 p + 10
-----
p^2 + 2 p + 1
```

◆ 零点、极点和增益计算

```
% Return zeros, poles and gain in vectors
[z,p,k]=zpkdata(sys1,'v')
```

```
z = -1
```

```
p = -1
     -1
```

```
k=10
```

◆ 传递函数的零、极点表示

```
% Representation in zeros-poles-gain form
Zsyst1=zpk(sys1)
```

```
Zero/pole/gain:
```

```
10(s+1)
-----
(s+1)^2
```

◆ 传递函数波特图

```
% Bode diagrams of the transfer function
figure(1);
bode(sys1,{0.1,50});
Title('Bode diagram')
xlabel('Frequency in rad/s')
ylabel('Phase in degrees ; Modulus in dB');
```

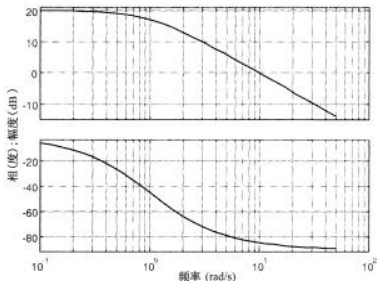


图 1-11 传递函数波特图

◆ 传递函数阶跃响应

```
figure(11);
[y,t]=step(sys1);
line(t,y),grid;
Title('Response to a 1V step')
xlabel('Time')
ylabel('Amplitude in V');
```

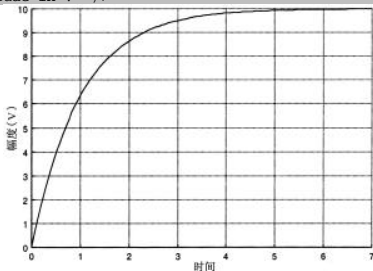


图 1-12 传递函数阶跃响应曲线

◆ 传递函数脉冲响应

```
% Transfer function impulse response
figure(12);
[y,t]=impz(sys1);
line(t,y),grid;
Title('Response to a 1V impulse')
xlabel('Time')
ylabel('Amplitude in V');
```