

高等院校工科专业研究生力学教材

工程塑性力学

(修订版)

丁大钧摇主编

丁大钧摇单炳梓摇马摇军摇编著

东南大学出版社

内 容 提 要

本书将塑性力学与结构设计紧密结合, 连续论共分 15 章。主要内容有: 应力应变状态和简单应力状态下的弹塑性问题及屈服条件, 全量理论和增量理论, 简单弹塑性问题及刚塑性平面问题, 轴对称问题和弹塑性压杆的稳定以及刚架和板的上、下限解, 金属的拉制与压制。最后 1 章中还列出了弹性和塑性力学的有限单元法并辅以相应计算实例, 以适应实际应用的需要。

本书可作为土木工程、机械工程、水利水电工程等非力学专业的研究生教材和工程力学专业的高年级本科生教材, 也可作为科研和工程技术人员的参考书。

摇摇图书在版编目(CIP)数据

工程塑性力学 丁大钧主编; 丁大钧, 单炳梓, 马军
编著. —南京: 东南大学出版社, 2003

高等院校工科专业研究生力学教材

摇摇 I 丁... II 丁...②丁...③单...④马... III 工程
力学 弹性力学—高等学校—教材 IV 刘... 刘...

摇摇 I 丁... II 丁...②丁...③单...④马... III 工程
力学 弹性力学—高等学校—教材 IV 刘... 刘...

摇摇中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 194 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 邮编 210096)

出版人: 江涌汉

新华书店经销 摇摇摇摇兴化印刷有限责任公司印刷

开本: 787mm×1092mm 1/32 印张: 10.5 字数: 280千字

2003年 9月第 1 版 摇摇 2003年 9月第 1 次印刷

摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇摇

印数: 1~1000册 摇 定价: 18.00元

(凡因印装质量问题, 可直接向读者服务部调换。电话: 025-8379333)

前摇摇言

本人与单炳梓教授合编的《工程塑性力学》是为建筑结构专业及机械加工专业硕士研究生这一课程学习需要而编写的,因此结合两专业的特点,分别对板的塑性理论分析和“拉制与压制”等机械加工的有关内容作了适当加深。在正式出版之前,先油印使用,而后征求了同学与进修教师的意见,作了全面修改与补充,于 1982 年由南京工学院(现东南大学)出版社正式出版。上个世纪 70 年代后期,曾有研究生家长电话要求购买,惜因售罄,未能提供,而编者等又无力修改请出版社重印。

1986 年春,东南大学出版社与东南大学土木工程学院建筑工程系马军副教授联系,请他修改补充,本人等自非常欢迎,补充内容也曾与编者商讨定下,即针对教学需要和为有关专业研究生及工程技术人员提供参考,特在每章末增补了习题,并增加有限元应用实例一章。但因本人大病半年多仍在治疗调养中,无暇随时与马教授联系,深感不安。

在本人与另两位同行撰写的“我国钢管混凝土拱桥建设”一文中,按弹性的试验值和塑性理论计算的钢管与混凝土分别承担的内力表明,两者的比例一般约为 $\frac{1}{5}$ 和 $\frac{4}{5}$,而国外个别桥梁专家竟将钢管混凝土拱桥列入钢拱桥,即以钢管受力为主,显然是欠妥的。因此上文还将在国外发表,不但阐述我国在这种拱桥建设方面的辉煌成就(文中介绍

了我国建设的跨度为 100m 左右钢管混凝土拱桥 10 座,以及新近核查了国外建设的钢管混凝土拱桥 (其跨度均在 100m 以内),也可藉此深入了解这类拱桥的受力特点从而免受误导,这应属“工程塑性力学”的内容。

由于编者在这一领域内研究的深度、广度有限,本书中计算谬误难免,希请读者批评指正,则编者幸甚。

丁大钧于东南大学

二〇〇七年七月下浣

目 录

绪论	1
塑性力学的研究对象及其特点	1
塑性力学的发展简史	2
第 1 章 应力状态和应变状态的分析	3
一点的应力状态	3
应力张量	5
主应力	7
应力张量不变量	10
应力偏张量及其不变量	12
用摩尔图表示应力状态	14
一点无限小的应变及应变张量	16
主应变	18
应变张量不变量	20
应变偏张量及其不变量	22
应变状态的摩尔图	24
习题	24
第 2 章 简单应力状态下的弹塑性力学问题	25
基本实验资料	25
简化计算模式	27
关于应变表示方法	29
真实应力和颈缩问题	31
三杆桁架的弹塑性分析	33
加载路径对桁架变形和极限荷载的影响	35
习题	35
第 3 章 屈服条件	37
屈服条件的概念	37
对等倾面上应力状态的研究	39

猿猿	屈瑞斯加和米赛斯屈服条件和屈服曲面	缘园
猿源	两种屈服条件的比较	缘源
猿缘	屈服条件的实验验证	缘苑
	习题	远
第 源章	全量理论	远
源	概述	远
源	弹性理论中的物理方程	远
源	全量理论中的物理方程	远
源	卸载问题	苑
源	全量理论中物理方程的几种类型	苑
	习题	愿
第 缘章	增量理论	愿
缘	概述	愿
缘	增量理论中的本构关系	愿
缘	增量理论和全量理论的关系	愿
缘	增量理论的实验验证	愿
缘	关于加载和卸载	愿
缘	关于应变强化模式	愿
缘	杜拉克公设——稳定准则	愿
缘	加载曲面的外凸性和应变增量的流动法则	愿
	习题	愿
第 远章	简单弹塑性问题	愿
远	梁的弹塑性弯曲	愿
远	承受内压力的厚壁球壳	愿
远	承受内压力的厚壁圆筒	愿
远	柱体的弹塑性扭转	愿
	习题	愿
第 苑章	刚塑性平面应变问题	愿
苑	基本特点和基本方程	愿
苑	应力方程的特征线	愿
苑	滑移线基本性质	愿
苑	塑性区的边界条件	愿
苑	常见的滑移线场	愿
苑	用滑移线场理论求解楔体的塑性极限荷载	愿

苑. 用滑移线场理论求解有切口厚板的极限弯矩	员猿
苑. 用滑移线场理论求解有圆形切口板条的极限拉力	员猿
习题	员源
第 愿章 刚塑性平面应力问题	员苑
愿. 概述	员苑
愿. 基本方程式及其性质	员愿
愿. 有圆孔的无限大薄板受内压力时的刚塑性平衡	员源
愿. 有圆孔的无限大薄板受轴对称拉伸时的刚塑性平衡	员苑
习题	员园
第 怨章 轴对称变形	员员
怨. 概述	员员
怨. 基本方程式及简化假定	员员
怨. 拉伸试件颈缩处的应力状态	员猿
怨. 圆板的塑性弯曲	员缘
习题	员员
第 员园章 拉制与压制	员猿
员园. 概述	员猿
员园. 三维径向塑性流动	员猿
员园. 拉丝中的应力和最大压缩率	员缘
员园. 压制圆钢中的应力和最大压缩率	员苑
员园. 二维径向塑性流动	员愿
员园. 拉制和压制板材中的应力和最大压缩率	员园
员园. 拉制和压制中消耗的功	员猿
员园. 考虑摩擦力时的拉丝	员源
习题	员愿
第 员员章 弹塑性平衡的稳定性	员员
员员. 概述	员员
员员. 弹性压杆的稳定性	员猿
员员. 在弹性极限后压杆的稳定性	员缘
习题	员园
第 员圆章 极限平衡理论	员员
员圆. 概述	员员
员圆. 梁的极限荷载分析	员员
员圆. 刚架的极限荷载分析	员猿

绪摇摇论

园摇摇塑性力学的研究对象及其特点

埃及一座古神庙的残壁上留有一幅壁画,详细地说明了如何将一块 猿皂伊猿皂伊猿皂整体方尖石碑从阿拉伯运到埃及的组织工作,据载,石碑是采用专门设计的驳船运送的,如图 园摇摇所示,就是该船的示意图。它是一只没有肋骨的船,亦即是一个无加劲肋的壳体。荷载置于船的中部。为了防止船体在向下的荷载和向上的静力压力作用下的挠曲,驳船上方采用由方木束构成的折弦加固。图 园摇摇为同一时代划行货船的示意图。与上述驳船相反,此船中部必须有以供划船者和指挥者用的空间,而在船首和船尾存放货物。显然,这只船的壳体将产生与驳船相反方向的弯曲,所以采用能承受拉力的弦杆来加强。

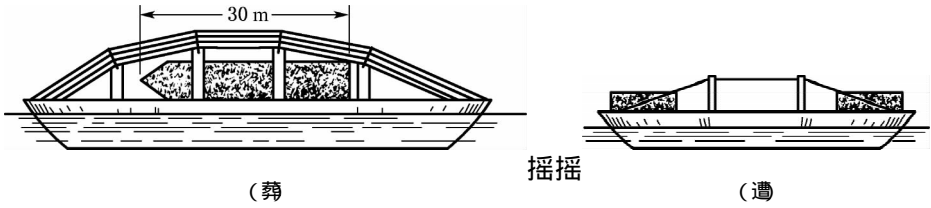


图 园摇摇

从以上两个例子可以看到古埃及工程技术所达到的水平。当然,无疑这些都是凭经验进行设计的,直到 员缘世纪文艺复兴时期,才有关于企图研究材料强度和致力于理论力学问题的首批可靠资料,诸如著名科学家莱奥纳多·达·芬奇(缘猿- 缘)有关金属丝、柱子及其他结构的强度试验和某些静力学问题的记载。员远世纪,伽利略(员缘- 员)第一个试图获得作用于物体上的力与物理强度之间的关系。员愿年他写出了关于梁强度计算方面的卓越著作。伽利略在处理这类问题时还没有为此目的所需的物理定律——弹性定律,而只能用某些关于物体中内力分布的假设来代替。

弹性力学中的物理定律是由胡克(员- 员)于 员远年建立的,但直到 员苑年库伦(员- 员)发表的主要著作中方得到最全面的利用。

现在我们知道,固体只是在变形很小时才具弹性,而当作用于物体的力较大

时 物体就会发生非弹性的塑性变形。

塑性力学的目的 ,在于用分析的数学方法 ,研究塑性变形物体内的应力和变形^①。

塑性力学是变形体力学的组成部分 ,它与以研究理想弹性体中应力和变形为目的弹性力学 ,有密切的关系。在弹性力学中的大部分基本概念都可以在塑性力学中得到应用。两者之间的根本差别在于弹性力学是以应力与应变成线性关系的广义胡克定律为其基础的 ,而在塑性力学的范围内 ,一般说来 ,应力与应变间的关系是非线性的 ,同时这种非线性的特征 ,又与所研究的具体材料有关。因此 ,塑性力学没有像广义的胡克定律那样统一的规律 ,而必须建立在实验的基础上。也就是应先从实验中找出材料超出弹性极限后的特性 ,再定出物理关系 ,然后建立塑性力学基本方程。求解这些方程 ,就可得到不同情况时塑性状态下的应力和变形。利用这些基本规律来讨论材料发生塑性变形后内部应力重新分布的情况 ,可以作出更合理的设计。在这方面已有许多人进行了不少工作 ,解决了不少问题。但对比较复杂的问题 ,数学上的困难较难解决。因此 ,利用塑性问题的某些特点 ,克服数学上的困难 ,使各种方法得到发展有着重要意义。

由于物体达到塑性阶段时 ,并未破坏而仍能继续承受荷载 ,所以如把构件设计到部分达到塑性 ,部分保持弹性状态 ,就可以节约材料 ,获得经济效益。因此 ,应用塑性理论能更合理地确定工程结构和机械零件的安全系数。以塑性力学为基础的极限设计理论 ,在结构设计中有很大用途。另一方面 ,金属加工如拉制、压制等都是塑性过程 ,把这些工艺现象提高到理论阶段 ,而又可进一步指导实践。这对生产技术的发展将具有积极的意义。

在实际问题中 ,允许塑性变形的大小将视不同工程领域而有不同的量级。在工程结构和机械零件的设计中是不允许大变形的 ,因为如果变形过大 ,结构便不能正常工作。因此 ,在这类问题中塑性变形要限制在弹性变形的量级。而在金属加工的工艺过程中 ,塑性变形很大 ,这时弹性变形则可完全忽略。

与弹性力学比较 ,塑性力学有如下几个主要特点 :

(圆) 应力与应变之间的关系是非线性 ,其比例系数不仅与材料有关 ,而且与塑性应变有关。

(圆) 由于塑性变形是不能恢复的 ,因此应力与应变之间不再存在一一对应的

^① 在研究物体(主要对金属)的宏观塑性性质时 ,通常是将金属看成连续体 ,以若干实验数据为基础 ,提出某些假设和公设 ,从而建立塑性力学的宏观理论 ,或者称为数学塑性理论。由于新材料的出现和外界条件的变化 ,塑性理论的使用范围日益扩大。塑性理论的进一步发展 ,需要对材料塑性变形的物理本质有深入的了解 ,探讨塑性现象和宏观塑性理论的微观机理 ,建立微观分析的基础。因此 ,近年来关于塑性力学基本理论的发展走向微观和宏观结合的途径 ,即所谓物理塑性理论。

关系,而与加载历史有关。

(猿) 变形体中可分为弹性区和塑性区,在弹性区加载和卸载都服从胡克定律,但在塑性区加载过程服从塑性规律,而卸载过程则服从胡克弹性定律。

(源) 在实验的基础上,塑性力学一般采用以下假设:

- ① 材料是连续的、均匀的,也是稳定的^①;
- ② 平均正应力不影响屈服条件;
- ③ 体积的变化是弹性的;
- ④ 时间因素对材料性质的影响^②,可不考虑。

园摇摇塑性力学的发展简史

员苑世纪库伦首先提出塑性固体(主要是土壤)的屈服条件,这标志着塑性力学研究的开始。但此后很少进展,直到员9世纪后半叶才逐渐有所发展。

在应力应变规律的研究方面,员8世纪圣维南(圣维南)提出平面情况下理想刚塑性体的应力-应变关系,并假设最大剪应力与最大剪应变率方向一致。他还根据圆柱体受扭转或弯曲而处于部分塑性状态时的应力(员866年)以及圆管受内压而处于全塑性状态时的应力(员866年),认识到应力和总塑性应变之间没有一一对应的关系,因而假设应变速率主轴和应力主轴是重合的。员874年劳埃斯(劳埃斯)提出包括弹性应变部分的三维弹塑性应变关系。员876年纳达依(纳达依)考虑加工硬化情况,建立了大应变情况下的应力应变关系。

关于材料进入塑性状态有不同的假设,第一个假设是由伽利略在员7世纪提出的,他认为材料进入塑性状态是由于最大主应力引起的,即当最大主应力达到屈服极限 $\sigma_{泽}$ 时,材料即进入塑性状态。这个假设已为实验所推翻,因为各向等压时,压应力可以远远超过 $\sigma_{泽}$,而材料并未进入塑性状态。第二个假设是马里奥特于员7世纪提出而由圣维南于员9世纪中叶才使之最后定型的。他们认为最大主应变可使材料进入塑性状态。这个假设也同样被实验否定。这两个假设根据其提出年代的前后,分别被称为第一和第二强度理论。员879年屈瑞斯加(屈瑞斯加)公布关于冲压和挤压初步试验报告。据此,他认为金属在最大剪应力达临界值时发生塑性屈服,这便是第三强度理论。摩尔(摩尔)的第一篇著作出版于员884年,但其所创

① 关于非稳定材料的问题正在研究中。

② 在温度不高、时间不太长的情况下,可不考虑蠕变和松弛效应。在应变率不太大时,可不计应变率或应变速率对塑性变形规律的影响。故在描述塑性变形过程时,时间量度的绝对值不会影响问题的分析,可任取一个单调变化的量作为时间参数,以代表荷载或变形的先后次序,这就是所谓加载或变形的历史。而这个历史,可以用秒或年做单位。下面有时提到的速率或应变率等,实际上也是这个意思。将考虑时间因素对材料性质的影响问题,划归至“流变学”(流变学)的范围中去。

立的强度理论的全面详尽的论述则发表于 1915 年,这可认为是最大剪应力理论的推广,一般被称为第四强度理论。1919 年继胡勃(配接万道)之后至 1924 年由米赛斯(配接土)从数学简化要求所提出的屈服条件^①,后来被解释为最大弹性形变能的屈服条件,被称为第五强度理论。1926 年杜拉克(配接)从稳定材料的定义出发,证明了塑性应变率与屈服曲面的正交性。

关于试验研究方面,1910 年盖斯特(配接)进行了薄管的联合拉伸和内压试验,初步证实最大剪应力屈服条件。1916 年,由卡曼(配接)和 1918 年由伯喀尔(配接)用圆柱体三向受力(压力高达 55 个大气压)试验证实了摩尔强度理论。1918 年,普朗特(配接)进行了复杂状态下塑性变形规律的第一批系统的实验研究,1919 年,罗地(配接)用钢、铜和镍的薄壁管进行了在不同的轴向拉伸和内压力的联合作用下的实验。1920 年泰勒(配接)和昆尼(配接)也使用薄管,但在拉伸和扭转作用下进行实验证实了胡勃-米赛斯屈服条件符合较好,也证明下面提到的列维-米赛斯关系对真实情况是很好的近似。

关于计算理论方面,1910 年列维(配接)采用圣维南关于理想塑性材料的概念,提出了在应力和塑性应变速度之间的三维关系,后来米赛斯还独立地得到了列维所曾提出过的应力-应变关系,因而发展成增量理论。1918 年汉盖(配接)和普朗特提出塑性应变问题中的滑移线理论,1919 年汉盖又提出全量理论,在实践中应用很方便;后来(1926 年)依留辛(А. И. Ильюшин)发展了这个理论,并提出简单加载定理和卸载定理,大量利用这一理论求解具体边值问题。虽然全量理论在理论上不适用于复杂加载的应力变化,但对某些问题计算的结果却和实验结果很好地符合。20 世纪 20 年代前后,对结构承载能力的研究有很大发展,特别是杜拉克、卜拉格(配接)等人对三维应力状态提出了极值原理,从而引出上、下限定理。

我们知道,用解析方法解决的弹性塑性问题是很少的。对工程中的许多实际问题,往往还需要借助于数值解法,差分法是一项应用较多的方法。近些年来,由于电子计算机的发展而得到广泛应用的有限单元法亦已推广于弹塑性分析的领域。随着有限单元法的发展,把解题的关键集中到提出更符合实际的本构关系上来。所以,20 世纪 20 年代以后对塑性本构关系的模式化的研究是很活跃的,也取得一定进展^②。随着生产和科学研究不断发展的要求,塑性力学也必将得到进一步的发展和更广泛的应用。

^① 在胡勃之前很久,马克斯威尔(配接)即曾完成这一理论,但未发表。而是从很久以后公布的马克斯威尔给汤姆逊的信中才知道。

^② 在钢筋混凝土结构方面,国际上已逐渐形成“钢筋混凝土力学”这一分支,20 世纪 20 年代后期,国内亦已开展这方面的研究工作。

第 11 章 应力状态和应变状态的分析

本章提供了一些描述连续介质的平衡关系式,是为了考虑进一步应用于塑性体力学,但其共性决不限于介质的特殊力学性质。

11.1 任意一点的应力状态

在工程实践中通常采用的术语“应力”,是为了表示作用在物体内部质点间想象截面上的内力强度。

考虑物体内部任意一点,并假定它为很小的封闭的面所包围,并在这个面的每一面素 dA 上,作用着力 dF ,则作用在单位面积上的力即为应力,其值等于 $\frac{dF}{dA}$ 。

下面将考虑均值应力状态,其中应力与截面面积 dA 的形状、实际尺度及该截面(它被认为足够的小)和已知点的距离无关。但是应力与截面 dA 的方向有关,而方向用该截面的单位外法向矢量(或向量) n 确定。如果对任一给定的单位矢量 n 相应截面上的应力矢量

$$T_n = \sigma_{ij} n_j$$

为已知,则一点的应力状态将为已知。下角标 n 表示应力与方向的关系。

在 $Oxyz$ 直角坐标系中, T_n 的分量有下列形式

$$T_{nx} = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z$$

$$T_{ny} = \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z$$

$$T_{nz} = \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z$$

式中 (α, β, γ) 、 $(\alpha', \beta', \gamma')$ 、 $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ 分别为矢量 T_n 对 Ox 、 Oy 和 Oz 轴之间的夹角, σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} 、 σ_{xy} 、 σ_{yz} 及 σ_{xz} 分别为 T_n 对三个轴的夹角的余弦,常用 σ_{11} 及 T_{ij} 表示。在同一体系中, T_n 的分量可写成下列形式,即 $T_{nx} = \sigma_{11} n_x + \sigma_{12} n_y + \sigma_{13} n_z$ 。

按照此处所采用的符号体系,沿坐标轴的应力分量有两个角标:第一个角标表示应力作用平面法线的方向,第二个角标表示分量的方向。此外,当单位矢量的方

向和一个轴重合时,每次都使用特殊符号。在这种情况下,应力法向分量用 σ 表示而仅使用一个角标,应力的切向分量用 τ 表示。

在图 1.1 中绘出平行六面体元素,元素的面分别垂直于坐标轴。在图中我们看到的三个面上示出应力分量,由于应力状态为均值的,作用在另三个面上的应力分量和示出的应力分量,大小各自相同,但方向相反。

建立两个符号体系之间的关系

方向: x, y, z 轴

分量: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$

分量: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$

分量: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$

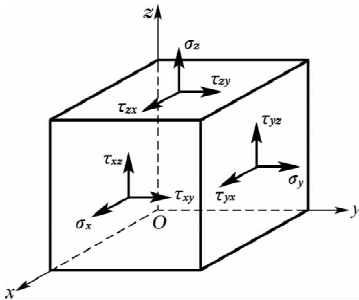


图 1.1

图 1.1

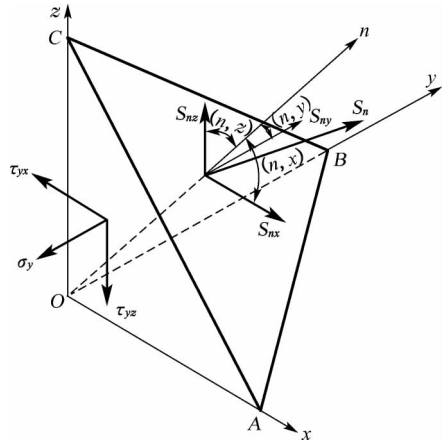


图 1.2

用列示中的三个应力分量即可确定包围所考虑点的封闭面上的应力状态。如即将指出的,已知这三个分量的大小,可对面的任意方向(即对任意单位矢量 n)求 σ_n 。试考察一已知点包围的很小的体素(图 1.2),四面体三面垂直于坐标轴,而第四面垂直于已知单位矢量 n 。采用静力学规律,从该体素的平衡条件求得沿 x, y, z 轴的三个平衡方程式分别为

$$\begin{aligned} \sigma_x \Delta y \Delta z - \sigma_y \Delta x \Delta z - \tau_{xy} \Delta x \Delta y - \tau_{yz} \Delta x \Delta z - \tau_{zx} \Delta y \Delta z &= 0 \\ \sigma_y \Delta x \Delta z - \sigma_x \Delta x \Delta z - \tau_{xy} \Delta x \Delta y - \tau_{yz} \Delta x \Delta z - \tau_{zy} \Delta y \Delta z &= 0 \\ \sigma_z \Delta x \Delta y - \tau_{xz} \Delta x \Delta y - \tau_{yz} \Delta x \Delta z - \tau_{zy} \Delta y \Delta z &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

式中: $\Delta y \Delta z$ 为 Δx 的面积; $\Delta x \Delta z$ 为 Δy 的面积,等于 $\Delta x \Delta z \cos \alpha$; $\Delta x \Delta y$ 为 Δz 的面积,等于 $\Delta x \Delta y \cos \beta$; $\Delta x \Delta z$ 为 Δy 的面积,等于 $\Delta x \Delta z \cos \gamma$ 。

将 $\sigma_{\alpha\beta}$ 代入方程式 (1.15) 并化简, 得到作用于垂直 α 的平面面积上的应力分量分别为

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= \sigma_{\alpha\beta} \cos^2 \theta + \tau_{\alpha\beta} \sin^2 \theta + \tau_{\alpha\beta} \sin 2\theta \\ \tau_{\alpha\beta} &= \tau_{\alpha\beta} \cos^2 \theta + \sigma_{\alpha\beta} \sin^2 \theta + \tau_{\alpha\beta} \sin 2\theta \\ \tau_{\alpha\beta} &= \tau_{\alpha\beta} \cos^2 \theta + \tau_{\alpha\beta} \sin^2 \theta + \sigma_{\alpha\beta} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

根据作用在图 1.15 所示的体素上的应力对三个坐标轴的力矩为零的条件, 可找到三个附加平衡方程式, 从而, 得到三个已知的关系式

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= \tau_{\alpha\beta} \\ \tau_{\alpha\beta} &= \tau_{\alpha\beta} \\ \tau_{\alpha\beta} &= \tau_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

因此可以说, 如果已知远个量 $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ 及 $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha\beta}$, 则一点的应力状态即为已知。

1.1.2 应力张量

式 (1.16) 的 9 个系数代表称作张量的一种数学概念, 所以一点的应力状态也可用张量 $\sigma_{\alpha\beta}$ 表示。在已知情况中, 由式 (1.16), 张量将为对称的。系数 $\sigma_{\alpha\beta}, \tau_{\alpha\beta}, \tau_{\alpha\beta}$, 称为应力张量分量, 这些分量的值与选取的坐标系有关。

张量可方便地用一个字母 $\sigma_{\alpha\beta}$ 表示, 或者更明确地用分量矩阵表示为

$$\sigma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha\alpha} & \tau_{\alpha\beta} & \tau_{\alpha\gamma} \\ \tau_{\alpha\beta} & \sigma_{\beta\beta} & \tau_{\beta\gamma} \\ \tau_{\alpha\gamma} & \tau_{\beta\gamma} & \sigma_{\gamma\gamma} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

当由坐标系 $\alpha\beta\gamma$ 变换成坐标系 $\alpha'\beta'\gamma'$ 时, 张量分量的值改变了。下面仅以 $\sigma_{\alpha\alpha}$ 及 $\tau_{\alpha\beta}$ 为例进行这种变换的计算。

首先确定作用在垂直新轴 α' 上的应力矢量 $\sigma_{\alpha'\beta'\gamma'}$ 的分量, 假设在式 (1.16) 中 α 符合新轴 α' 方向, 得到这些分量为

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\alpha'\beta'} &= \sigma_{\alpha'\beta'} \cos^2 \theta + \tau_{\alpha'\beta'} \sin^2 \theta + \tau_{\alpha'\beta'} \sin 2\theta \\ \tau_{\alpha'\beta'} &= \tau_{\alpha'\beta'} \cos^2 \theta + \sigma_{\alpha'\beta'} \sin^2 \theta + \tau_{\alpha'\beta'} \sin 2\theta \\ \tau_{\alpha'\beta'} &= \tau_{\alpha'\beta'} \cos^2 \theta + \tau_{\alpha'\beta'} \sin^2 \theta + \sigma_{\alpha'\beta'} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

这时求分量 $\sigma_{\alpha\beta}$ 、 $\sigma_{\beta\alpha}$ 、 $\sigma_{\alpha\alpha}$ 沿 α 轴的总和, 得到 $\sigma_{\alpha\alpha}$ 越泽

$$\sigma_{\alpha\alpha} \text{ 越 } \sigma_{\alpha\alpha} \cos^2 \theta_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta} \cos^2 \theta_{\beta\alpha} + \sigma_{\gamma\gamma} \cos^2 \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\alpha\beta} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} + \tau_{\alpha\gamma} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\beta\gamma} \cos \theta_{\beta\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha}$$

将式(员)的 $\sigma_{\alpha\alpha}$ 、 $\sigma_{\beta\beta}$ 、 $\sigma_{\gamma\gamma}$ 代入上式并利用式(员)得到

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} \text{ 越 } & \sigma_{\alpha\alpha} \cos^2 \theta_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta} \cos^2 \theta_{\beta\alpha} + \sigma_{\gamma\gamma} \cos^2 \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\alpha\beta} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} + \tau_{\alpha\gamma} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\beta\gamma} \cos \theta_{\beta\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} \\ & \text{垣 } \sigma_{\beta\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} \cos \theta_{\alpha\alpha} + \sigma_{\gamma\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} \cos \theta_{\alpha\alpha} + \tau_{\alpha\beta} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} + \tau_{\alpha\gamma} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\beta\gamma} \cos \theta_{\beta\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} \\ & \text{垣 } \sigma_{\alpha\beta} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} + \sigma_{\alpha\gamma} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\alpha\beta} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} + \tau_{\alpha\gamma} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\beta\gamma} \cos \theta_{\beta\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} \end{aligned} \quad (员)$$

求分量 $\sigma_{\alpha\beta}$ 、 $\sigma_{\beta\alpha}$ 、 $\sigma_{\alpha\alpha}$ 沿 α 轴的总和, 可得

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} \text{ 越 } & \sigma_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} + \sigma_{\beta\beta} \cos \theta_{\beta\alpha} \cos \theta_{\alpha\alpha} + \sigma_{\gamma\gamma} \cos \theta_{\gamma\alpha} \cos \theta_{\alpha\alpha} + \tau_{\alpha\beta} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} + \tau_{\alpha\gamma} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\beta\gamma} \cos \theta_{\beta\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} \\ & \text{垣 } \sigma_{\beta\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} \cos \theta_{\alpha\alpha} + \sigma_{\gamma\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} \cos \theta_{\alpha\alpha} + \tau_{\alpha\beta} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} + \tau_{\alpha\gamma} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\beta\gamma} \cos \theta_{\beta\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} \\ & \text{垣 } \sigma_{\alpha\beta} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} + \sigma_{\alpha\gamma} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\alpha\beta} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} + \tau_{\alpha\gamma} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\beta\gamma} \cos \theta_{\beta\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} \\ & \text{垣 } \sigma_{\alpha\beta} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} + \sigma_{\alpha\gamma} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\alpha\beta} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} + \tau_{\alpha\gamma} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\beta\gamma} \cos \theta_{\beta\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} \end{aligned} \quad (员)$$

因此对应力张量其他分量改写方程式可用完全相同的方法进行, 此处不再赘述。

员) 主应力

为了使应力状态的一些重要特性更明显, 我们根据 α 方向的变化, 用图解表示应力矢量 σ_{α} 的法向分量 $\sigma_{\alpha\alpha}$ 的变化。由方程式(员)用 α 灶代替 α 得到 $\sigma_{\alpha\alpha}$ 的表达式

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} \text{ 越 } & \sigma_{\alpha\alpha} \cos^2 \theta_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta} \cos^2 \theta_{\beta\alpha} + \sigma_{\gamma\gamma} \cos^2 \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\alpha\beta} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} + \tau_{\alpha\gamma} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\beta\gamma} \cos \theta_{\beta\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} \\ & \text{垣 } \sigma_{\beta\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} \cos \theta_{\alpha\alpha} + \sigma_{\gamma\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} \cos \theta_{\alpha\alpha} + \tau_{\alpha\beta} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} + \tau_{\alpha\gamma} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\beta\gamma} \cos \theta_{\beta\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} \\ & \text{垣 } \sigma_{\alpha\beta} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} + \sigma_{\alpha\gamma} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\alpha\beta} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\beta\alpha} + \tau_{\alpha\gamma} \cos \theta_{\alpha\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} + \tau_{\beta\gamma} \cos \theta_{\beta\alpha} \cos \theta_{\gamma\alpha} \end{aligned} \quad (员)$$

对每一矢量 σ_{α} 确定其他具有相同方向而模量等于 $\frac{\sigma_{\alpha}}{\sqrt{\cos^2 \theta_{\alpha\alpha} + \cos^2 \theta_{\beta\alpha} + \cos^2 \theta_{\gamma\alpha}}}$ 的矢量。位于曲面上的矢量端点, 其坐标值分别为

$$\left. \begin{aligned} & \text{曾越} \frac{\text{糟} \text{粲} \text{灶} \text{曾}}{\sqrt{\text{渣} \text{灶} \text{渣}}} \\ & \text{赠越} \frac{\text{糟} \text{粲} \text{灶} \text{赠}}{\sqrt{\text{渣} \text{灶} \text{渣}}} \\ & \text{扎越} \frac{\text{糟} \text{粲} \text{灶} \text{扎}}{\sqrt{\text{渣} \text{灶} \text{渣}}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{员} \text{怨})$$

因而曲面的方程式可由式(员怨)和式(员怨)求得为

$$\text{依} \text{员} \text{越} \sigma_{\text{曾}} \text{曾} \text{垣} \sigma_{\text{赠}} \text{赠} \text{垣} \sigma_{\text{扎}} \text{扎} \text{垣} \sigma_{\text{曾} \text{赠}} \text{曾} \text{赠} \text{垣} \sigma_{\text{曾} \text{扎}} \text{曾} \text{扎} \text{垣} \sigma_{\text{赠} \text{扎}} \text{赠} \text{扎} \text{垣} \sigma_{\text{曾} \text{赠} \text{扎}} \text{曾} \text{赠} \text{扎} \quad (\text{员} \text{圆})$$

这是二次曲面方程式,称为应力曲面。从上述建立的规则得出这样的结论,即方程式(员圆)确定同一个曲面,与轴曾、赠、扎的方向无关。而式(员圆)中的系数 $\sigma_{\text{曾}}$ 、 $\sigma_{\text{赠}}$ 、 $\sigma_{\text{扎}}$ 等等,则与轴曾、赠、扎的方向有关。从二次曲面的理论已知,总有这样的直角坐标系,能使其中式(员圆)右边的双线性项为零,该轴称为应力主轴。垂直该轴的平面称为应力主平面,在主平面内仅作用正应力,它们称为主应力,在下面用符号 $\sigma_{\text{蚤}}$ (蚤越员、圆、猿)表示。利用式(员圆),用蚤代替灶,可求得应力分量 $\tau_{\text{曾} \text{蚤}}$ 、 $\tau_{\text{赠} \text{蚤}}$ 及 $\tau_{\text{扎} \text{蚤}}$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{曾}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{曾} \text{垣} \tau_{\text{曾} \text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{赠} \text{垣} \tau_{\text{曾} \text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{扎} & \text{越} \sigma_{\text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{曾} \\ \tau_{\text{赠} \text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{曾} \text{垣} \sigma_{\text{赠}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{赠} \text{垣} \tau_{\text{赠} \text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{扎} & \text{越} \sigma_{\text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{赠} \\ \tau_{\text{扎} \text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{曾} \text{垣} \tau_{\text{扎} \text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{赠} \text{垣} \sigma_{\text{扎}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{扎} & \text{越} \sigma_{\text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{扎} \end{aligned}$$

移项,并合并同类项,得到

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{\text{曾}} \text{原} \sigma_{\text{蚤}}) \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{曾} \text{垣} \tau_{\text{曾} \text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{赠} \text{垣} \tau_{\text{曾} \text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{扎} & \text{越} \sigma_{\text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{曾} \\ \tau_{\text{赠} \text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{曾} \text{垣} (\sigma_{\text{赠}} \text{原} \sigma_{\text{蚤}}) \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{赠} \text{垣} \tau_{\text{赠} \text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{扎} & \text{越} \sigma_{\text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{赠} \\ \tau_{\text{扎} \text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{曾} \text{垣} \tau_{\text{扎} \text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{赠} \text{垣} (\sigma_{\text{扎}} \text{原} \sigma_{\text{蚤}}) \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{扎} & \text{越} \sigma_{\text{蚤}} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{扎} \end{aligned} \right\} \quad (\text{员} \text{猿})$$

式(员猿)为方向余弦的齐次线性方程式。结合已知关系式

$$\text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{曾} \text{垣} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{赠} \text{垣} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{扎} \text{越} \text{员} \quad (\text{员} \text{源})$$

由此可确定未知的方向余弦。式(员猿)明显的解 $\text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{曾} \text{越} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{赠} \text{越} \text{糟} \text{粲} \text{蚤} \text{扎} \text{越} \text{员}$ 和式(员源)是矛盾的,因此应予舍弃。不同于上述零解的条件是式(员猿)的系数组成的行列式必须等于零,即

$$\begin{vmatrix} \sigma_{\text{曾}} \text{原} \sigma_{\text{蚤}} & \tau_{\text{曾} \text{蚤}} & \tau_{\text{曾} \text{蚤}} \\ \tau_{\text{赠} \text{蚤}} & \sigma_{\text{赠}} \text{原} \sigma_{\text{蚤}} & \tau_{\text{赠} \text{蚤}} \\ \tau_{\text{扎} \text{蚤}} & \tau_{\text{扎} \text{蚤}} & \sigma_{\text{扎}} \text{原} \sigma_{\text{蚤}} \end{vmatrix} \text{越} \sigma_{\text{蚤}} \text{原} (\sigma_{\text{曾}} \text{垣} \sigma_{\text{赠}} \text{垣} \sigma_{\text{扎}}) \sigma_{\text{蚤}}$$