

高职高专公共课系列教材

工程数学学习指导

金秀岩 曾庆武 编 著
曾庆健 蒋占峰

东北大学出版社

· 沈 阳 ·

© 金秀岩等 2006

图书在版编目(CIP)数据

工程数学学习指导 / 金秀岩等编著. — 沈阳 : 东北大学出版社, 2006.3

ISBN 7-81102-243-5

I. 工... II. 金... III. 工程数学—高等学校 技术学校—教学参考资料 IV. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 023453 号

出 版 者 东北大学出版社

地址 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编 110004

电话 024—83687331(市场部) 83680267(社务室)

传真 024—83680180(市场部) 83680265(社务室)

E-mail neuph @ neupress.com

http :// www. neupress. com

印 刷 者 沈阳市政二公司印刷厂

发 行 者 新华书店总店北京发行所

幅面尺寸 :184mm × 260mm

印 张 :16.5

字 数 :475 千字

出版时间 2006 年 3 月第 1 版

印刷时间 2006 年 3 月第 1 次印刷

责任编辑 刘淑芳 刘宗玉

责任校对 汪 林

封面设计 唐敏智

责任出版 杨华宁

定 价 25.00 元

前 言

本书是金秀岩主编的高职高专公共课系列教材《工程数学》的配套辅导教材,是理工类高职高专各专业学生学习《工程数学》必备的辅导教材。也可作为高职高专经济类各专业以及自学考试、专升本学生学习《工程数学》的辅导教材。

本书具有以下特点:

1. 每章包含四部分内容:一、基本内容归纳;二、典型例题分析;三、习题解答;四、单元测试题解答。
2. 紧密结合教材,并配合教学内容归纳概括概念、定理、法则和公式,着重分析问题和作深入浅出的说明,以帮助读者加深理解、增强记忆和正确运用。
3. 结合教材列举了针对性较强的例题,并对每章的全部习题和单元测试题进行了较详细的解答。

参加本书编写的人员及分工如下:第一篇线性代数,曾庆武;第二篇概率论,金秀岩;第三篇数理统计基础第一章、第二章,第四篇拉普拉斯变换,曾庆健;第三篇数理统计基础第三章、第四章,蒋占峰。金秀岩对全部书稿统稿并修改。

由于作者水平所限,加之时间仓促,书中不妥之处在所难免,诚望广大读者批评指正,不胜感谢。

作 者
2005年12月

目 录

第一篇 线性代数

第一章 行列式..... 1

- 第一节 基本内容归纳..... 1
- 第二节 典型例题分析..... 5
- 第三节 习题解答 12
- 第四节 单元测试题解答 19

第二章 矩 阵 26

- 第一节 基本内容归纳 26
- 第二节 典型例题分析 33
- 第三节 习题解答 39
- 第四节 单元测试题解答 48

第三章 n 维向量 54

- 第一节 基本内容归纳 54
- 第二节 典型例题分析 57
- 第三节 习题解答 59
- 第四节 单元测试题解答 63

第四章 线性方程组 68

- 第一节 基本内容归纳 68
- 第二节 典型例题分析 71
- 第三节 习题解答 78
- 第四节 单元测试题解答 87

第二篇 概率论

第一章 随机事件 93

- 第一节 基本内容归纳 93

- 第二节 典型例题分析 95

- 第三节 习题解答 96

- 第四节 单元测试题解答..... 100

第二章 随机事件的概率..... 103

- 第一节 基本内容归纳..... 103

- 第二节 典型例题分析..... 106

- 第三节 习题解答..... 118

- 第四节 单元测试题解答..... 125

第三章 随机变量与分布函数..... 129

- 第一节 基本内容归纳..... 129

- 第二节 典型例题分析..... 134

- 第三节 习题解答..... 144

- 第四节 单元测试题解答..... 152

第四章 数学期望与方差..... 157

- 第一节 基本内容归纳..... 157

- 第二节 典型例题分析..... 158

- 第三节 习题解答..... 163

- 第四节 单元测试题解答..... 166

第三篇 数理统计基础

第一章 参数估计..... 170

- 第一节 基本内容归纳..... 170

- 第二节 典型例题分析..... 173

- 第三节 习题解答..... 177

- 第四节 单元测试题解答..... 182

第二章 假设检验.....	186	第二节 典型例题分析.....	219
第一节 基本内容归纳.....	186	第三节 习题解答.....	225
第二节 典型例题分析.....	187	第四节 单元测试题解答.....	231
第三节 习题解答.....	192	第四篇 积分变换简介	
第四节 单元测试题解答.....	195	拉普拉斯 (Laplace) 变换	237
第三章 方差分析.....	198	第一节 基本内容归纳.....	237
第一节 基本内容归纳.....	198	第二节 典型例题分析.....	239
第二节 典型例题分析.....	199	第三节 习题解答.....	242
第三节 习题解答.....	205	第四节 单元测试题解答.....	254
第四节 单元测试题解答.....	212		
第四章 回归分析.....	217		
第一节 基本内容归纳.....	217		

第一篇 线性代数

第一章 行列式

第一节 行列式基本内容归纳

一、行列式定义

1. 排列

定义 1 由 n 个不同的自然数 $1, 2, \dots, n$ 组成的有序数组 $a_1 a_2 \dots a_n$ 称为由这 n 个不同的自然数所组成的 n 元排列

定义 2 在一个 n 元排列 $a_1 a_2 \dots a_n$ 中, 如果有较大的数 a_i 排在较小的数 a_j 的前面 ($a_i > a_j$) 则称数 a_i 与 a_j 构成一个逆序. 一个 n 元排列中逆序的总数 称为这个排列的逆序数, 记为 $\tau(a_1 a_2 \dots a_n)$

定义 3 逆序数是零或偶数的排列称为偶排列, 逆序数是奇数的排列称为奇排列

定义 4 如果把一个排列 $a_1 a_2 \dots a_i \dots a_j \dots a_n$ 的某两个数 a_i 与 a_j 互换位置, 而其余数不动, 就得到另一个排列 $a_1 a_2 \dots a_j \dots a_i \dots a_n$. 这种变换称为对换, 记为 $(a_i a_j)$

定理 1 对换改变排列的奇偶性

定理 2 在全部 n 元排列中, 奇排列和偶排列各占一半

2. 阶行列式

定义 1 设有 n 个数 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$), 将它们排列成一个有 n 行、 n 列组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式, 它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ 的代数和, 其符号为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \dots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

其中横排称为行, 纵排称为列, 称 a_{ij} 为第 i 行第 j 列的元素, 左上角到右下角的连线称为主对

角线, 右上角到左下角的连线称为副对角线(或次对角线)援

注意:(员)定义中(躁躁..躁)表示员圆... 灶的某一个排列,而行列式值是当躁躁..躁取遍所有员圆... 灶的排列时,项(原员)^{r(躁躁..躁)}葬葬...葬的和,因此行列式有 灶! 个项;

(圆)由定理 圆知, 灶阶行列式的正负项数(不考虑元素自身所带的负号)各占一半援

援援几种特殊行列式

(员) 三角形行列式

$$\begin{vmatrix} 葬_{原} & 葬_{圆} & \dots & 葬_{灶} \\ 园 & 葬_{圆} & \dots & 葬_{灶} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 园 & 园 & \dots & 葬_{灶} \end{vmatrix}$$

称为上三角形行列式,反之,主对角线上方的元素全为零的行列式

$$\begin{vmatrix} 葬_{原} & 园 & \dots & 园 \\ 葬_{原} & 葬_{圆} & \dots & 园 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 葬_{原} & 葬_{圆} & \dots & 葬_{灶} \end{vmatrix}$$

称为下三角形行列式援、下三角形行列式统称为三角形行列式援

特别地,主对角线以外的元素全为零的行列式

$$\begin{vmatrix} 葬_{原} & 园 & \dots & 园 \\ 园 & 葬_{圆} & \dots & 园 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 园 & 园 & \dots & 葬_{灶} \end{vmatrix}$$

称为对角行列式援

(圆) 转置行列式

定义 苑援设 灶阶行列式

$$\text{阅越} \begin{vmatrix} 葬_{原} & 葬_{圆} & \dots & 葬_{灶} \\ 葬_{原} & 葬_{圆} & \dots & 葬_{灶} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 葬_{原} & 葬_{圆} & \dots & 葬_{灶} \end{vmatrix},$$

把行列式 阅的行与相应的列互换后得到行列式

$$\begin{vmatrix} 葬_{原} & 葬_{原} & \dots & 葬_{原} \\ 葬_{圆} & 葬_{圆} & \dots & 葬_{圆} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 葬_{灶} & 葬_{灶} & \dots & 葬_{灶} \end{vmatrix},$$

称为行列式 阅的转置行列式,记作 阅援

(猿) 对称行列式与反对称行列式

定义 愿援如果 灶阶行列式中第 蚤行、第 躁列的元素等于第 躁行、第 蚤列的元素,即 葬_{蚤躁} = 葬_{躁蚤},则

称这样的行列式为对称行列式援如果它的第 i 行、第 j 列的元素等于第 j 行、第 i 列的元素的相反数,即 $a_{ij} = -a_{ji}$,则称这样的行列式为反对称行列式援

二、行列式的性质

性质 员摇行列式 阅与它的转置行列式 阅^转相等援

注意:性质 员说明行列式中行与列的地位是相同的,所以凡对行成立的性质,对列也同样成立援

性质 圆摇交换行列式的两行(或两列),行列式改变符号援

推论 员摇如果一个行列式有两行(或两列)对应元素完全相等,那么这个行列式等于零援

性质 猿摇一个行列式的某一行(或某一列)的所有元素同乘以某一个数 噪等于以数 噪乘这个行列式援

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \text{噪} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 援}$$

推论 员摇一个行列式中某一行(或某一列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号外边援

推论 圆摇如果一个行列式中有某一行(或某一列)的元素全部是零,则这个行列式等于零援

推论 猿摇如果一个行列式中有某两行(或某两列)的对应元素成比例,则这个行列式等于零援

性质 源摇如果行列式 阅的某一行的每一个元素都可以写成两项之和

$$\text{阅越} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则此行列式等于下列两个行列式之和:

$$\text{阅越} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 援}$$

注意:这个性质对于列来说也是成立的援

性质 缘摇如果把行列式的某一行(或列)的各元素乘以同一数后加到另一行(或列)对应的元素上去,那么行列式的值不变援

将以上性质归纳得到行列式的行变换(或列变换):

(员) 第 i 行(或列)与第 j 行(或列)互换,记作 $i \leftrightarrow j$ 或 $i \rightarrow j$ 援

(圆) 从第 i 行(或列)提出公因子 a_{ij} 记作 a_{ij} 噪或 a_{ij} 噪;第 i 行(或列)乘以某一个数 k 记作 k 伊噪或 k 伊噪

(猿) 以数 k 乘第 i 行(或列)的每一个元素加到第 j 行的对应元素上,记作 k 垣噪(或 k 垣噪)援

三、行列式按行(列)展开

定义 员 摇 灶阶行列式中,划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列,剩下的元素按原来次序组成的 $(n-1)$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 M_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式

结论 员

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{ik} M_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} M_{kj}$$

结论 圆

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{ik} M_{kj} - \sum_{k=1, k \neq i}^n a_{ik} M_{kj}$$

推论 员 摇 灶阶行列式 D 中任一行(或列)中的元素与另外一行(或列)相应元素的代数余子式的乘积之和等于零

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} M_{kj} = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{或} \quad \sum_{k=1}^n a_{kj} M_{ki} = 0 \quad (i \neq j)$$

四、克莱姆法则

定理 员 克莱姆(悦)法则) 摇 灶个 灶元线性方程组,如果它的系数行列式 $D \neq 0$,那么这个方程组一定有解,并且解是唯一的

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

其中 D_i (蚤) 是把 D 中第 i 列的元素 $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}$ 换成常数项 b_1, b_2, \dots, b_n 所得到的行列式

注意:(员) 用克莱姆法则解 灶个 灶元线性方程的方程组时必须注意以下两个前提条件:

- ① 方程个数与未知量个数相等;
- ② 系数行列式不等于零(即 $D \neq 0$)

(圆) 当且仅当满足上述两个条件时, 该方程组的解存在且唯一援
 推论 线性方程组无解或有两个不同的解, 则它的系数行列式等于零援
 定理 圆 如果齐次线性方程组的系数行列式 $\neq 0$ 则它只有唯一的一个零解援
 定理 猿 如果 灶个 灶元齐次线性方程组有非零解, 则它的系数行列式 阅等于零援

第二节 典型例题分析

例 员 写出四阶行列式中含有因子 葬葬 的项援

分析 因为 阅越 $\begin{vmatrix} 葬 & 葬 & \dots & 葬 \\ 葬 & 葬 & \dots & 葬 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 葬 & 葬 & \dots & 葬 \end{vmatrix}$ 越 $\sum (原)^r$ 葬葬...葬, 其中 葬葬...葬 为取自不同行不同列的 灶个 数的乘积, r 为 葬葬...葬 的逆序数援

解 因为 阅越 $\begin{vmatrix} 葬 & 葬 & 葬 & 葬 \\ 葬 & 葬 & 葬 & 葬 \\ 葬 & 葬 & 葬 & 葬 \\ 葬 & 葬 & 葬 & 葬 \end{vmatrix}$, 而 葬 位于第一行第一列, 葬 位于第二行第三列, 所以

四阶行列式中含有因子 葬葬 的项为 $(原)$ 葬葬葬葬, 其中 员猿原圆的逆序数为 圆; $(原)$ 葬葬葬葬, 其中 员猿圆的逆序数为 员援

例 圆 计算下列行列式援

$$(员) \begin{vmatrix} 源 & 员 & 圆 & 源 \\ 员 & 圆 & 园 & 圆 \\ 园 & 缘 & 圆 & 园 \\ 园 & 员 & 员 & 苑 \end{vmatrix} \text{ 摇摇 } (圆) \begin{vmatrix} 葬 & 员 & 园 & 园 \\ 原 & 遭 & 员 & 园 \\ 园 & 原 & 糟 & 员 \\ 园 & 园 & 原 & 茁 \end{vmatrix}$$

分析 ① 利用行列式的性质, 把行列式化为上(下)三角形行列式来求解援 这种方法一般将位于某一行(或某一列)首的非零元素化为 员 方便些援 ② 也可利用行列式按行(列)展开公式求解援

解 (员)

$$\begin{vmatrix} 源 & 员 & 圆 & 源 \\ 员 & 圆 & 园 & 圆 \\ 园 & 缘 & 圆 & 园 \\ 园 & 员 & 员 & 苑 \end{vmatrix} \xrightarrow{原 \rightarrow 源} \begin{vmatrix} 员 & 圆 & 园 & 圆 \\ 园 & 员 & 员 & 苑 \\ 园 & 原 & 缘 & 圆 \\ 园 & 原 & 苑 & 园 \end{vmatrix} \xrightarrow{园 \rightarrow 缘} \begin{vmatrix} 员 & 圆 & 园 & 圆 \\ 园 & 员 & 员 & 苑 \\ 园 & 园 & 员 & 苑 \\ 园 & 园 & 怨 & 源 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{园 \rightarrow 怨} \begin{vmatrix} 员 & 圆 & 园 & 圆 \\ 园 & 员 & 员 & 苑 \\ 园 & 园 & 员 & 苑 \\ 园 & 园 & 怨 & 源 \end{vmatrix} \xrightarrow{园 \rightarrow 怨} \begin{vmatrix} 员 & 圆 & 园 & 圆 \\ 园 & 员 & 员 & 苑 \\ 园 & 园 & 员 & 苑 \\ 园 & 园 & 怨 & 源 \end{vmatrix}$$

园衣苑
园衣怨
园苑怨

$$\begin{vmatrix} 员 & 圆 & 园 & 圆 \\ 园 & 员 & 员 & 苑 \\ 园 & 园 & 员 & 苑 \\ 园 & 园 & 员 & 苑 \end{vmatrix} \text{ 园与园相同 } \text{ 园援}$$

员 遭葬	员 糟葬	员 凿葬
(遭垣葬)(葬垣遭)	(糟垣葬)(葬垣糟)	(凿垣葬)(葬垣凿)
$\begin{matrix} \text{员原葬垣遭} \\ \text{员原葬垣遭} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \text{员原葬垣遭} \\ \text{员原葬垣遭} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \text{员原葬垣遭} \\ \text{员原葬垣遭} \end{matrix}$
(遭原葬)(糟原葬)(凿原葬)	(葬原糟)(糟原遭)	(葬原凿)(凿原遭)
按第一列展开		
(遭原葬)(糟原葬)(凿原葬)	糟原遭	凿原遭
(遭原葬)(糟原葬)(凿原葬)	(葬原糟)(糟原遭)	(葬原凿)(凿原遭)
$\begin{matrix} \text{糟原遭} \\ \text{糟原遭} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \text{员原葬垣遭} \\ \text{员原葬垣遭} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \text{员原葬垣遭} \\ \text{员原葬垣遭} \end{matrix}$
(遭原葬)(糟原葬)(凿原葬)(糟原遭)(凿原遭)	(葬原糟)(糟原遭)	(葬原凿)(遭原凿)

越 遭原葬(糟原葬)(凿原葬)(糟原遭)(凿原遭) [(葬原凿)(遭原凿)原葬原糟(遭原糟)]
 越 遭原葬(糟原葬)(凿原葬)(糟原遭)(凿原遭)(葬原凿)(葬原遭)(遭原糟)
 越 葬原遭(葬原糟)(葬原凿)(遭原糟)(遭原葬)(糟原葬)(葬原凿)(葬原遭)(遭原糟),
 所以 左边 越右边 证毕

例 源瑶计算下列各行列式(阅_噪为 噪阶行列式)援

	曾 葬 ... 葬 葬 曾 ... 葬 兹 兹 ... 曾		葬 园 园 遭 园 园 园 遭 园 园 园 遭 园 园 遭		
(员 阅 _灶 越	$\begin{matrix} \text{曾} & \text{葬} & \dots & \text{葬} \\ \text{葬} & \text{曾} & \dots & \text{葬} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{葬} & \text{葬} & \dots & \text{曾} \end{matrix}$;			
(圆 阅 _灶 越	$\begin{matrix} \text{葬} & & & \text{园} & \text{园} & & \text{遭} \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ \text{园} & & \text{葬} & \text{遭} & & & \text{园} \\ \text{园} & & \text{糟} & \text{凿} & & & \text{园} \\ & \ddots & & & \ddots & & \\ \text{糟} & & \text{园} & \text{园} & & & \text{凿} \end{matrix}$	援			

解 瑶(员) 解法一 : (化为三角形行列式计算)

	曾 葬 ... 葬 葬 曾 ... 葬 兹 兹 ... 曾		$\begin{matrix} \text{员原葬垣遭} & \text{原原园} & \text{伊原员} \\ \text{员原葬垣遭} & \text{原原园} & \text{伊原员} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{员原葬垣遭} & \text{原原园} & \text{伊原员} \end{matrix}$		曾 葬 ... 葬 葬原曾 曾原葬 ... 园 兹 兹 ... 曾 葬原曾 园 ... 曾原葬
阅 _灶 越	$\begin{matrix} \text{曾} & \text{葬} & \dots & \text{葬} \\ \text{葬} & \text{曾} & \dots & \text{葬} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{葬} & \text{葬} & \dots & \text{曾} \end{matrix}$	=		$\begin{matrix} \text{曾} & \text{葬} & \dots & \text{葬} \\ \text{葬原曾} & \text{曾原葬} & \dots & \text{园} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{葬原曾} & \text{园} & \dots & \text{曾原葬} \end{matrix}$	
	$\begin{matrix} \text{员原葬垣遭} \\ \text{员原葬垣遭} \\ \vdots \\ \text{员原葬垣遭} \end{matrix}$	(曾原葬)	$\begin{matrix} \text{曾} & \text{葬} & \dots & \text{葬} \\ \text{原原员} & \text{员原员} & \dots & \text{园} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{原原员} & \text{园} & \dots & \text{员} \end{matrix}$		

囍 垣 囍	员 员 员 员	按第一列展开	猿 圆 缘
囍 垣 囍	园 猿 圆 缘		原 圆 猿 原 源
囍 垣 (原圆) 伊 囍	园 原 圆 猿 原 源		原 员 员 怨
	园 原 员 员 怨		

囍 → 囍	原 员 员 怨	囍 垣 (原圆) 伊 囍	原 员 员 怨
	原 圆 猿 原 源	囍 垣 猿 伊 囍	园 员 原 源
	猿 圆 缘		园 缘 猿

越 (原员) | 员 原 源 | 越 (原员) [猿 园 原 缘 伊 (原源)] 越 原 员 源;

缘 猿 | 猿 猿

阅 越	缘 员 员 员	糶 → 糶	员 员 缘 员
	原 圆 圆 原 员 源		原 员 圆 原 圆 源
	原 圆 原 猿 原 员 原 缘		原 员 原 猿 原 圆 原 缘
	园 员 圆 猿		圆 员 园 猿

囍 垣 囍	员 员 缘 员	越 原	猿 猿 缘
囍 垣 囍	园 猿 猿 缘		原 圆 猿 原 源
囍 原 源	园 原 圆 猿 原 源		原 员 原 猿 怨
	园 原 员 原 园 怨		

囍 垣 囍	员 远 员	囍 垣 囍	员 远 员
原	原 圆 猿 原 源		原
	原 员 原 猿 怨	囍 垣 囍	园 原 源 猿
		囍 垣 囍	

越 原 | 缘 圆 | 越 原 员 源;

原 原 猿

阅 越	员 缘 员 员	越 原 圆 猿 猿 猿 猿 越	员 员 缘 员	越 原 猿 怨;
	员 原 圆 原 员 源		员 圆 原 圆 源	
	圆 原 圆 原 员 原 缘		圆 原 猿 原 圆 原 缘	
	猿 园 圆 猿		猿 员 园 猿	

阅 越	员 员 员 缘	越 原 猿 怨
	员 圆 原 员 原 圆	
	圆 原 猿 原 员 原 圆	
	猿 员 圆 园	

于是得：

曾 越 员, 曾 越 圆, 曾 越 猿, 曾 越 原 员 怨

(圆) 阅 越	缘 远 园 园 园	按第一列展开	(原员) 员 猿 伊 缘 伊	缘 远 园 园	垣
	员 缘 远 园 园			员 缘 远 园 园	
	园 员 缘 远 园			园 员 缘 远 园	
	园 园 员 缘 远			园 园 员 缘	
	园 园 园 员 缘				

越(猿原λ)(员原λ) 原圆垣愿原[源猿原λ) 垣(员原λ) 原源员原λ)]

越原λ(λ 原猿)(λ 原圆) 援

当 λ_员 越园, λ_圆 越圆, λ_猿 越猿时, 阅 越园, 该齐次方程组有非零解