

工程数学(线性代数)标准预测试卷(一)

(考试时间 150 分钟)

| | | | | | | |
|----|---|---|---|---|-----|--|
| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 | |
| 得分 | | | | | 核分人 | |
| 得分 | | | | | 复查人 | |

第一部分 选择题

| | | |
|----|-----|-----|
| 得分 | 评卷人 | 复查人 |
| | | |

一、(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)在每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的,请将其代码填在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1. 设 A, B, C 均为 n 阶可逆矩阵,则 $(ABC)^{-1}$ 等于 ()

(A) $A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ (B) $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

(C) $(A^{-1})^{-1}(B^{-1})^{-1}(C^{-1})^{-1}$ (D) $(C^{-1})^{-1}(B^{-1})^{-1}(A^{-1})^{-1}$

2. 已知 A 是 n 阶方阵,则 ()

(A) $|A^T| = |A|$ (B) $|A^T| = -|A|$

(C) $|A^T| = |A|^{-1}$ (D) $|A^T| = |A|^{-1}$

3. 以下说法正确的是 ()

(A) 若向量 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出,则 β 必可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表出,这种表示方法是唯一的

(B) 若向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两线性无关,则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必无关

(C) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关,则 α_n 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 线性表出

(D) 任意 n 个 n 维向量必然线性相关

4. 已知向量 α 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为

()

矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

矩阵 A 的全部特征向量为 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 的全部解

矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值, 则必有 n 个线性无关的特征向量

矩阵 A 可逆, 则矩阵 A 的属于 λ 的特征向量也是矩阵 A^{-1} 的属于 $\frac{1}{\lambda}$ 的特征向量

第二部分 是非选择题

| 得分 | 评卷人 | 复查人 |
|----|-----|-----|
| | | |

二、填空题(本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分) 不写解答过程, 将正确的答案写在每小题的空格内。错填或不填均无分。

已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A^{-1} 等于 _____

A 为 3 阶方阵, B 为 2 阶方阵, 且 $A^2 + B^2 = 2A + 2B$, 则 $|A+B|$ 等于 _____

若 α_1, α_2 都是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解向量, 则 $A(\alpha_1, \alpha_2)$ 等于 _____

已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩为 3, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 中任意 3 个向量的秩为 _____

若线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

有解, 则常数 a, b, c 应满足条件 _____

若非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ 有解, 则 a 为 _____

若 A 与 B 相似, 则 $A - B$ 的

特征矩阵 $A - \lambda I$ 的非零特征值是 _____

二次型 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ 是正定的, 则 a 应满足的条件是 _____

矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 对应的二次型是 _____

| 得分 | 评卷人 | 复查人 |
|----|-----|-----|
| | | |

三、计算题(本大题共 3 小题, 每小题 10 分, 共 30 分)

求解矩阵方程 $A^{-1}X = B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{已知 } \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma_{\text{圆}} \\ \gamma_{\text{猿}} \\ \gamma_{\text{源}} \end{bmatrix} \text{ 求 } \text{ } \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma_{\text{圆}} \\ \gamma_{\text{猿}} \\ \gamma_{\text{源}} \end{bmatrix}$$

设源阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma_{\text{圆}} \\ \gamma_{\text{猿}} \\ \gamma_{\text{源}} \end{bmatrix}$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma_{\text{圆}}, \gamma_{\text{猿}}, \gamma_{\text{源}}$ 均为源维行向量, 且已知 $\alpha, \beta, \gamma_{\text{圆}}, \gamma_{\text{猿}}, \gamma_{\text{源}}$

试计算行列式 $|A|$

求非齐次线性方程组的通解

已知齐次线性方程组 $Ax=0$ 其中 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$ 有非零解, 分别对 λ 的不同取值, 求原齐次线性方程组的一般解

已知方阵 $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \\ c & c & a & d \\ d & d & d & a \end{bmatrix}$, 求 A 的特征值与特征向量

| 得分 | 评卷人 | 复查人 |
|----|-----|-----|
| | | |

四、证明题(本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

已知 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, 证明: $A^2 - 2aA + (a^2 - b^2)E = O$

10. 设 A, B 都是 n 阶实对称矩阵, 证明存在正交阵 Q , 使 $Q^T A Q$ 与 $Q^T B Q$ 同时对角化的充要条件是 A 与 B 有相同的特征值.

工程数学(线性代数)标准预测试卷(二)

(考试时间 150 分钟)

| | | | | | | |
|----|----|----|----|----|-----|--|
| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 | |
| 题分 | 10 | 10 | 10 | 10 | 核分人 | |
| 得分 | | | | | 复查人 | |

第一部分 选择题

| | | |
|----|-----|-----|
| 得分 | 评卷人 | 复查人 |
| | | |

一、(本大题共 10 小题,每小题 10 分,共 100 分)在每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的,请将其代码填在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1. 已知 A 可逆,则必有 ()

(A) A^{-1} 可逆

(B) A^{-1} 不可逆

(C) A^{-1} 不可逆

(D) A^{-1} 不可逆

2. 取何值时,齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解 ()

(A) $k=1$

(B) $k=2$

(C) $k=3$

(D) $k=4$

3. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 则 ()

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 即为极大无关组

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 必线性无关

(D) 以上都不对

4. 设有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 极大无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 则 ()

(圆员缘) 则该向量组的极大线性无关组是

(摇摇)

粤 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

月 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

悦 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

阅 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ 的自由未知量为

(摇摇)

粤 x_2, x_3

月 x_1, x_2

悦 x_1, x_3

阅 x_2, x_3

非齐次方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$ 有解 则

(摇摇)

粤 $x_1 = 1$

月 $x_1 = 2$

悦 $x_1 = 3$

阅 $x_1 = 4$

已知三阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 且 $A^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 则

(摇摇)

粤 $m = 1$

月 $m = 2$

悦 $m = 3$

阅 $m = 4$

设 λ_1, λ_2 为 A 的两个不同的特征值 α, β 为 A 的分别属于 λ_1 与 λ_2 的特征向量 则 α 与 β 是

(摇摇)

粤 线性无关

月 线性相关

悦 对应分量成比例

阅 可能有零向量

下列矩阵是正定矩阵的是

(摇摇)

粤 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

月 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{悦} \begin{bmatrix} \text{猿} & \text{园} & \text{猿} & \text{圆} \\ \text{园} & \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{园} & \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \end{bmatrix} \text{摇摇}$$

$$\text{阅} \begin{bmatrix} \text{猿} & \text{园} & \text{猿} & \text{圆} \\ \text{园} & \text{猿} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{员} & \text{猿} & \text{园} & \text{猿} \end{bmatrix}$$

1. 设四阶方阵 A 与对角矩阵相似的充要条件是

(摇摇)

- A. A 有 4 个互不相同的特征值
- B. A 有 4 个互不相同的特征向量
- C. A 有 4 个线性无关的特征向量
- D. A 有 4 个两两正交的特征向量

第二部分 非选择题

| 得分 | 评卷人 | 复查人 |
|----|-----|-----|
| | | |

二、填空题(本大题共 6 小题,每小题 6 分,共 36 分)不写解答过程,将正确的答案写在每小题的空格内。错填或不填均无分。

1. 设四阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & a & \\ & & & a \end{pmatrix}$, 其中 a 是 4 阶单位阵, 则 A^{-1} 的系数是 _____。

2. 设 $A = \begin{bmatrix} \text{园} & \text{猿} & \text{月} \\ \text{悦} & \text{猿} & \text{园} \end{bmatrix}$, 其中 月 悦均是 2 阶可逆方阵, 则 A^{-1} 越 _____。

3. 单个向量 α 线性无关的充要条件是 _____。

4. 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, 若 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 其中 β 的表示式 _____。

5. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} \text{员} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{园} & \text{猿} & \text{猿} \\ \text{员} & \text{猿} & \text{猿} \end{bmatrix}$ 对应的二次型是 _____。

6. 设 A 是 n 阶方阵, 对任何 n 维列向量 x 方程 $Ax = x$ 都有解的充要条件是 _____。

任一个有限维的向量空间的基是_____的,但任两个基所含向量个数是_____

设 A 是 n 阶方阵, B 为 A 的伴随矩阵, 若 $|A| \neq 0$, 则方阵 AB 的特征值是_____, 特征向量是_____

已知二次型矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & c & a \end{pmatrix}$, 则它所对应的二次型为 $f(x, y, z) = \dots$

设 n 阶实对称阵 A 的特征值分别为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则当 _____ 时, A 为正定阵

| 得分 | 评卷人 | 复查人 |
|----|-----|-----|
| | | |

三、计算题(本大题共 4 小题, 每小题 10 分, 共 40 分)

设 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & c & a \end{pmatrix}$, 求 A^{-1}

求 $(A^{-1})_{11}$; $(A^{-1})_{22}$

求向量 β 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标

已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 满足 $\alpha_1 \perp \alpha_2, \alpha_2 \perp \alpha_3$ 求向量 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标

已知齐次线性方程组 $\begin{cases} Ax = 0 \end{cases}$ 求基础解系

求非齐次线性方程组 $\begin{cases} Ax = b \end{cases}$ 的一般解

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量

| 得分 | 评卷人 | 复查人 |
|----|-----|-----|
| | | |

四、证明题(本大题共 2 小题,每小题 20 分,共 40 分)

1. 设方阵 A 满足 $A^2 = A$, 且 A 与 E 相似, 证明: $A = E$

已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 及向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 且

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + \dots + c_{1n}\alpha_n \\ \beta_2 = c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \dots + c_{2n}\alpha_n \\ \dots \\ \beta_m = c_{m1}\alpha_1 + c_{m2}\alpha_2 + \dots + c_{mn}\alpha_n \end{array} \right.$$

证明：若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关则向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 线性无关)

| | |
|---|-----|
| $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$ | # 证 |
| $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$ | |
| \dots | |
| $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$ | |

工程数学(线性代数)标准预测试卷(三)

(考试时间 150 分钟)

| | | | | | | |
|----|---|---|---|---|----|--|
| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总分 | |
| 得分 | | | | | | |
| 复核 | | | | | | |

第一部分 选择题

| | | |
|----|-----|-----|
| 得分 | 评卷人 | 复查人 |
| | | |

一、(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)在每小题列出的四个选项中只有一个是符合题目要求的,请将其代码填在题后的括号内。错选、多选或未选均无分。

1. 设 A 为 n 阶方阵, B 是 A 经过若干次矩阵的初等变换后得到的矩阵, 则有 ()

A. $|A| = |B|$

B. $|A| = -|B|$

C. $|A| = |B|^{-1}$

D. $|A| = |B|^{-1}$

2. 设 A 为 n 阶方阵, 则以下结论正确的是 ()

A. A 可逆

B. A 不可逆

C. A 可逆

D. A 不可逆

3. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关的充要条件是 ()

A. 存在不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_n 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$

B. 存在全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_n 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$

C. 存在不全为零的数 k_1, k_2, \dots, k_n 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$ 成立

D. $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$ 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 不可能线性无关

4. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则向量组线性无关的是 ()

A. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

B. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$