怎样学好“线性代数”?怎样学可以提高效率，用较少的气力取得较好的效果？这是很多参与本课程考试的同志都会关心的问题.

每门课程都有自己的特点，它的众多内容都有自己的结构. 学习时必须了解它的特点和独特的结构，抓住问题、发展的线索、要点和有意义的难点，依据课程考试大纲的要求，由浅入深、由表及里扎扎实实地学习.

下面，就我们的理解，对本课程的性质、内容结构、各部分的要点及需注意的问题作一些说明，供大家参考.

课程总说明

“线性代数”是工科各专业本科的专业基础课. 它所讨论的问题主要是线性方程的求解和矩阵的对角化，以及化二次型为标准形.

从概念上讲，通过 n 维向量的概念，这些问题可以抽象为 n 维向量空间及其上的线性变换的问题. 为解决这些问题，形成了向量组的线性相关性和秩的理论，以及线性变换（或矩阵）的特征值和特征向量的理论. 这些理论是本课程的基础理论.

从实际计算的角度来看，这些问题又都可以用矩阵的形式来表述，并通过矩阵的代数运算和行列式计算得到最终的解决. 所以矩阵代数和行列式是本课程中处理问题的基本工具和

基本方法. 当然，它本身也是一种基本理论.

这些理论和方法，不仅在数学的各个分支中有广泛的应用，而且在众多的科技领域和社会科学的领域，特别是计算机科学中也都有大量的应用. 计算数学中的所有方法，无例外地都以线性代数为基础，所以，本课程不仅是基础理论性的课程，而且也是一门有很强应用背景的应用数学课程.

要学好这门课程，首先必须了解它所要讨论的有哪些问题，在讨论的过程中引进了哪些基本概念，形成了哪些基本理论，得到了哪些重要的结论，用到的工具和方法又有哪些. 掌握了从问题的提出、展开和深化、直至最终（或在一定程度上）解决的过程，就抓住了课程的纲，就能学得主动、学深学透，就能避免只见树木不见森林，学完了还糊涂一片.

课程的内容和结构

“线性代数”的内容共分 5 部分：矩阵和行列式，向量空间，矩阵的秩和线性方程组，特征值和特征向量，实二次型. 下面，对这些内容在课程中的地位和作用分别进行说明.

矩阵和行列式，是解决线性代数和许多数学问题的工具和方法，同时它也是带有浓厚的代数或计算色彩的理论. 因此，这部分是整个课程的基础，是学习的一个重点.

向量空间是线性代数的蕴涵几何意味的一种理论. 一个线性方程，矩阵的一个行（列），都可以看成一个向量. 线性方

程组中各个方程和矩阵中各个行（列）之间的许多关系实质上就是向量之间的一种线性关系．分析这种关系对于剖析一个线性方程组的解的情况和结构，或了解一个矩阵的行、列的线性结构，具有关键的意义．这部分内容比较抽象，概念和推理多，比较难学，但这是线性代数理论的基础和精髓．通过它的学习可以培养抽象思维能力和严密的逻辑推理能力，提高自己的数学素质．学好了这一部分，学习其他部分就不会感到很困难了．

线性方程组的求解，是线性代数的基本问题之一和发展的起源，有极其广泛的应用，也是学习本课程的一个重点．一个线性方程组可以用它的系数矩阵 A 和增广矩阵 A 来表征．方程组解的情况集中反映在 A 和 A 的秩上．矩阵的秩是刻画其行（列）的线性关系和众多子式的特征的一个最重要的数量指标，是本课程中最深刻的一个概念．从向量组的线性相关性到向量组的秩，进而到矩阵的秩，是课程中理论性最强，最难学，可也是最精彩的部分．秩的概念联系到矩阵、行列式、向量组、线性方程组、线性变换和二次型，希望大家从它的内涵和多种应用上很好掌握．线性方程组相容性的判定和解的结构是这部分的最终也是最重要的结果，而用初等行变换化矩阵为行最简形则是本课程最基本的计算之一，有多种应用

矩阵（或线性变换）的特征值和特征向量，是线性代数中有广泛和重要应用的一部分内容，也是数值代数中讨论的一个主题．其几何背景是：在平面或空间（2 或 3 维向量空间）

中，一个简单的几何变换（如绕原点的旋转）φ 把点（向量）P 变成 Q，设 P 和 Q 在坐标系（向量空间的一个基）（Ⅰ）中的坐标依次为 x 和 y（2 或 3 维向量），φ 用 x 和 y 可表示为 $y=Ax$，A 是一个 2 或 3 阶方阵，称之为 φ 在（Ⅰ）下的矩阵．一般来说，对于任选的（Ⅰ），A 比较复杂．有意义的问题是：如何选取一个好的坐标系（基）Ⅱ，使 φ 在（Ⅱ）下的矩阵 B 最为简单．假设从（Ⅰ）到（Ⅱ）的坐标变换式为 $u=C\tilde{u}$（C 是可逆矩阵），P 和 Q 在（Ⅱ）中的坐标依次为 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 则 $x=C\tilde{x}$，$y=C\tilde{y}$．所以 φ 在（Ⅱ）中的表示式为 $C\tilde{x}=AC\tilde{y}$，或 $\tilde{x}=C^{-1}AC\tilde{y}$，从而 $B=C^{-1}AC$．即 B 是 A 的相似矩阵，C 是相似变换矩阵．最简单而又可能的矩阵是对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$．当 $B=\Lambda$ 时就导致特征值和特征向量．如果（Ⅰ）和（Ⅱ）都是直角坐标系（标准正交基），则 C 是正交矩阵．特征值的计算就是求行列式 $|\lambda E-A|$（这是 λ 的一个多项式）的根，特征向量的计算则是求齐次线性方程组的非零解．正交矩阵是一类特殊矩阵，有许多应用．为了更好地了解和构造这种矩阵，引进了向量的内积运算．由此可以计算向量的长度和夹角．添加了这种度量运算的向量空间即所谓的欧氏空间，它比只有线性运算的向量空间更具体，也更贴近实际（很难想象没有了长度和角度概念的几何会是什么样）．这一章的基本问题是矩阵的对角化，即对给定的 A，求可逆或正交矩阵 C，使 $C^{-1}AC=\Lambda$．

实二次型就是定义在向量空间上的系数为实数的二次齐次函数，求它的标准形是线性代数中又一类具有广泛应用背景的问题．其几何意义是：把平面上有心二次曲线的方程 $ax^2+2bxy+cy^2=1$，或空间中有心二次曲面的方程 $ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz=1$ 化成标准方程．这两个方程的左端表示式就是 2 元或 3 元二次型．求二次型的标准形有二种方法：一种是用满秩线性变换，即配方的方法；另一种是用正交变换（直角坐标变换）的方法，这就导致特征值和特征向量的计算．这部分最后讨论的一个问题是实二次型（实对称矩阵）的分类和正定性．这里要用到前面的一些知识．

各部分内容的要求、重点和注意事项

要学好各部分的内容，首先必须注重它的基本概念，掌握基本的计算，这是基础；其次，还必须在它们与其他部分的联系和各种应用上下功夫．下面分别对各部分作具体的阐述．

为避免重复或疏漏，大家应以课程考试大纲的第二大部分为准，把它与这里的阐述结合起来，反复加以思考．

由于各部分内容是互相联系的，我们在阐述时无法顾及教材中的先后顺序．为了与教材的有关内容相对照，我们往往用加（）的形式，说明在教材中的哪些页、哪些定义、定理或例子（注：这里所说的教材，是指由全国高等教育自学考试指导

委员会组编，魏战线编写的《线性代数》．辽宁大学出版社出版，1999 年．这是自学考试用的指定教材）．

1．矩阵代数

(1) 有关的术语

大家必须首先知道关于矩阵的各种术语和符号，即清楚一个矩阵指的是什么，什么叫矩阵的行、列，其（i,j）元位于何处，$m\times n$ 矩阵指的是什么，什么叫方阵和矩阵或方阵的阶及其主对角线（《线性代数》第 2 页），知道两个矩阵相等的含义（《线性代数》第 4 页定义 1.2)．还应注意矩阵的表示（包括简写）和使用的符号（《线性代数》第 2 页）．

这些看似小事，但许多初学者往往就在这些地方出错．

需注意，由于行、列数或阶数的不同，零矩阵 $\boldsymbol{0}$ 和单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 有无穷多个，同是一个 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{0}$，在不同的场合可以有不同的阶数或行、列数（《线性代数》第 2，3 页）．

(2）矩阵的运算

矩阵有 4 种运算：加（减）法（《线性代数》第 15 页定义 1.5)，数乘矩阵（《线性代数》第 17 页定义 1.6)，矩阵乘法（《线性代数》第 19 页定义 1.7) 和转置（《线性代数》第 27 页定义 1.8)．大家一定要注意在什么条件下可以做矩阵的加法和乘法运算，如 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{AB}$ 就不能写成 $\boldsymbol{A}(1-\boldsymbol{B})$而应写成 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})$,因为 $1-\boldsymbol{B}$ 没有意义．在矩阵的这些运算中，乘法用得最多且又不易掌握．要注意 $\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times n}=(\boldsymbol{AB})_{m\times n}$．

利用矩阵的乘法，线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

和线性变换

$$
\begin{cases}
y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\
y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_n + \cdots + a_{mn}x_n
\end{cases}
$$

用矩阵可依次表示为（《线性代数》第 23 **页例** 1.7，**《线性代数》第** 24 **页例** 1.8）

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ 和 } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},
$$

其中

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.
$$

（3）**矩阵的运算规则**

矩阵毕竟不是数（除非是 1 阶矩阵），它的运算规则有一些是与数的运算规则不同的，大家务必注意．这里主要有两点，即一般说来（《线性代数》第 21 页例 1.6）

$$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}\text{（乘法不适合交换律），}$$

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}\nRightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}\text{ 或 }\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}\text{（乘法有零因子）．}$$

前者是指即使 $\boldsymbol{AB}$ 有意义，$\boldsymbol{BA}$ 也可能没有意义，在有意义时也不一定等于 $\boldsymbol{AB}$．由后者可知

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}\nRightarrow\quad\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}\text{ 或 }\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\text{（消去律不成立）．}$$

还应注意

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\text{（而不是}\quad\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\text{！）．}$$

对方阵可作方幂运算（《线性代数》第 26 页），并 有

$$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{m+n},(\boldsymbol{A}^m)^n=\boldsymbol{A}^{mn}.$$

但一般

$$(\boldsymbol{AB})^r\neq\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{B}^r\ .$$

(4）几类特殊矩阵

1）数量矩阵 $k\boldsymbol{E}$（k 是数，$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵）．

其特点是它与任意矩阵的乘积（在可乘的条件下）可交换．即如 $\boldsymbol{X}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同阶的任意方阵，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$，则 $\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{E}$.

又 $k\boldsymbol{E}$ 可逆$\Leftrightarrow k\neq0$，且$(k\boldsymbol{E})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{E}$.

注意，如 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶，则行列式

$$|k\boldsymbol{E}|=k^n.$$

2）对角矩阵（《线性代数》第 4 页）．

即形如$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$的矩阵，其非主对角线元均为 0.
可简记作$\mathrm{diag}[d_1,d_2,\cdots,d_n]$，这是最简单的一类矩阵.

显然，对角矩阵的和、积及数乘也都是对角矩阵.

3）（反）对称矩阵.

即 $A^T=A$（或 $-A$）的一类矩阵. 显然，这种矩阵必须是方阵（《线性代数》第 30～31 页）.

如设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

A 是对称矩阵$\Leftrightarrow$ $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

A 是反对称矩阵$\Leftrightarrow$ $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

由此可见，反对称矩阵的主对角线元全是 0（即 $a_{11}=\cdots=a_{nn}=0$）.

［思考题］矩阵的对称性或反对称性在矩阵的各种运算下是否保持？

二次型的矩阵是对称矩阵吗？

4）三角矩阵（《线性代数》第 3 页）.

主对角线以上（下）的元素全为 0 的方阵称为下（上）三角矩阵. 这类矩阵在计算方法中有用.

［思考题］三角矩阵在矩阵的各种运算下是否仍是同类三角矩阵？

5）分块矩阵和矩阵的分块运算.

以子矩阵为元素的矩阵称为分块矩阵（《线性代数》第 32 页）.

利用分块矩阵作矩阵运算可以大大提高矩阵运算的效率(特别在有些子矩阵是 O 或 E 的情况下).

要会作分块矩阵的运算，特别是乘法运算（须注意，不仅以子块作元素可以进行乘法运算，而且各个子矩阵的乘法也有意义)(《线性代数》第 33～36 页).

分块（准）对角阵是对角矩阵的推广，也是一类较简单的矩阵.

分块对角矩阵在各种矩阵运算下仍是分块对角矩阵（《线性代数》第 37 页).

把矩阵按行或列分块有特殊的意义（《线性代数》第 38 页例 1.12).

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$, $\boldsymbol{B}=(b_{jk})_{s\times n}$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ik})_{m\times n}$. $\boldsymbol{B}$ 的行向量为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$, $\boldsymbol{C}$ 的行向量为 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$,则有

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_s\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_m\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 可写成

$$\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1s}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{ms}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_s\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + a_{1s}\boldsymbol{\beta}_3 \\ \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + a_{ms}\boldsymbol{\beta}_3 \end{pmatrix}.$$

从而

$$\boldsymbol{\gamma}_i = a_{i1}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{i2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{is}\boldsymbol{\beta}_s ,(i = 1,2 ,\cdots ,m)$$

这说明 $\boldsymbol{C}$ 的行向量都是 $\boldsymbol{B}$ 的行向量的线性组合. 同理，$\boldsymbol{C}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合，这在以后讨论 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{AB}$ 的秩的关系时有用.

6）矩阵的初等行、列变换，矩阵的等价.

矩阵的初等行（列）变换（《线性代数》第 9 页定义 1.3，第 14 页）总称为矩阵的初等变换，在矩阵计算、行列式计算、有关向量组的计算和求解线性方程组中有重要应用. 大家要能熟练地作这种行（列）运算，并能十分注意计算的准确性.

初等矩阵就是单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换所得到的矩阵(《线性代数》第 70 页，定义 1.14). 如 $\boldsymbol{P}$ 是 $\boldsymbol{E}$ 经初等变换 T 所得到的初等矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经 T 变成 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$（如 T 是初等行变换）或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}$（如 T 是初等列变换）（《线性代数》第 72 页定理 1.7).

大家要能辨别一个矩阵是否是初等矩阵，并知道初等矩阵的作用.

如 $\boldsymbol{A}$ 经初等变换后变成 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$（《线性代数》第 14 页），要知道“$\cong$”的三个基本性质

(《线性代数》第 15 页). 任一矩阵均与形如 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的准对角矩阵等价.

7) 可逆矩阵和逆矩阵，逆矩阵的计算.

在解代数方程 $ax=b$ 时,只要 $a\neq 0$,就可解得 $x=b/a=a^{-1}b=ba^{-1}$.

对矩阵方程 $AX=B$ 如何？A 要满足什么条件才可解得 X？这就导致可逆矩阵的概念（《线性代数》第 61 页定义 1.12).

由定义，可逆矩阵必是方阵.

易证：如 A 可逆，则其逆矩阵惟一，记作 A^{-1}.

所以

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$,利用行列式和伴随矩阵 $A^*=(A_{ji})_{n\times n}$ (《线性代数》第 62 页定义 1.13)，可知（《线性代数》第 64 页定理 1.6)

A 可逆$\Leftrightarrow A$ 的行列式$|A|\neq 0$,且此时

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

由此不难知道，A 可逆$\Leftrightarrow$存在方阵 B 使得

$$AB=E \text{ 或 } BA=E$$

(因这时$|AB|=|A||B|=|E|=1$,故$|A|\neq 0$).

注意，对矩阵不能定义除法运算，即使 A 可逆（当然

$A \neq 0$），$\frac{1}{A}$是没有意义的.

在 A 可逆时，方程 $AX = B$ 的解是 $X = A^{-1}B$（不是 BA^{-1}或 B/A，后者无意义！）

公式 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ 的意义主要是理论上的，它给出了 A^{-1}的具体表示式. 当 A 的阶 $n \geqslant 3$ 时，用它来求 A^{-1}要算 1 个 n 阶行列式和 n^2 个 $n-1$ 阶行列式，其工作量是很大的，当 $n > 3$ 时尤其是如此.

计算 A^{-1} 的简单的方法是用矩阵的初等行变换（《线性代数》第 74 页例 1.27）. 这是矩阵计算中最基本的计算之一，务必熟练掌握. 为防止计算错误，最好验算一下你求得的 A^{-1}是否适合 $AA^{-1} = E$ 或 $A^{-1}A = E$（至少抽查几个元素）.

用初等行（列）变换计算 A^{-1} 的理论根据是任一可逆矩阵总可分解为若干初等矩阵的乘积. 即如 $|A| \neq 0$，则必有初等矩阵 P_1，P_2，…，P_r，使

$$A = P_1P_2\cdots P_s.$$

从而 $A \cong E$（《线性代数》第 72~74 页定理 1.8，1.9）.

下面来看看几种特殊矩阵的逆矩阵.

如 $A = \mathrm{diag}[d_1, d_2, \cdots, d_n]$是对角矩阵，则$|A| = d_1d_2\cdots d_n$. 所以 A 可逆$\Leftrightarrow d_1d_2\cdots d_n \neq 0$，且此时

$$A^{-1} = \mathrm{diag}[d_1^{-1}, d_2^{-1}, \cdots, d_n^{-1}].$$

如 $A = (a_{ij})_{n\times n}$是三角矩阵，则 A 可逆$\Leftrightarrow a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$. 且用上述方法易知 A^{-1}是与 A 同类的三角矩阵.

对准对角矩阵 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，$A$ 可逆 $\Leftrightarrow |A_i|\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,s)$，且此时

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

初等矩阵必是可逆矩阵，且其逆矩阵是同类初等矩阵（《线性代数》第 71 页）.

如 $D=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 是准三角矩阵，且 $|A|\neq 0$，$|B|\neq 0$，可证 D 必可逆. 设其逆矩阵为同类的分块矩阵 $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$，则有

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AX+CZ & AY+CW \\ BZ & BW \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}=E,$$

所以

$$AX+CZ=E,\quad AY+CW=0,\quad BZ=0,\quad BW=E,$$

由此可解得

$$Z=0,\quad W=B^{-1},\quad X=A^{-1},\quad Y=-A^{-1}CB^{-1}.$$

故

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

对于逆矩阵，大家应特别注意下列规则：

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}(\text{不是 } A^{-1}B^{-1}!),$$

$$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}},$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} \quad (k \neq 0),$$

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m,$$

但（$A+B$）$^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$，其实即使 A，B 可逆，$A+B$ 也不一定可逆，可逆时也不一定就是 $A^{-1}+B^{-1}$.

[思考题] 可逆对称矩阵的逆矩阵还是对称矩阵吗？试证之.

奇数阶反对称矩阵可逆吗？为什么？

例 1 设 $A^5=0$，证明 $E-A$ 可逆，并求其逆.

证 因

$$(E-A)(E+A+A^2+A^3+A^4) = E-A^5 = E,$$

故 $E-A$ 可逆，且

$$(E-A)^{-1} = E+A+A^2+A^3+A^4.$$

例 2 设 m 是正整数，$B=C^{-1}AC$，证明 $B^m=C^{-1}A^mC$.

证 $B^2 = (C^{-1}AC)(C^{-1}AC) = C^{-1}A(C^{-1}C)AC = C^{-1}AEAC = C^{-1}A^2C.$

用归纳法易知 $B^m=C^{-1}A^mC$.

当 A 是对角矩阵时，A^m 易算，一般 B^m 不易算，但可用 $C^{-1}A^mC$ 来算.

8) 矩阵方程.

设 A, B 是可逆矩阵，则矩阵方程

$AX=C$ 的解为 $X=A^{-1}C$（不是 CA^{-1}!），

$YB=C$ 的解为 $Y=CB^{-1}$（不是 $B^{-1}C$!），

$AZB=C$ 的解为 $Z=A^{-1}CB^{-1}$（不能改变次序）.

例 1 设 $E-A$ 可逆，求矩阵方程 $X-5A=AX$ 的解.

解 此方程即

$$X-AX=(E-A)X=5A,$$

由设，$E-A$ 可逆，故解

$$X=5(E-A)^{-1}A.$$

例 2 设 A，B 是给定的同阶方阵，求解矩阵方程 $AX+2A=3BX+6B+E$.

解 此方程即

$$A(X+2E)=3B(X+2E)+E,$$

或

$$(A-3B)(X+2E)=E.$$

这说明 $A-3B$ 可逆，故

$$X+2E=(A-3B)^{-1},\quad X=(A-3B)^{-1}-2E.$$

2. 行列式

(1) 排列和 n 阶行列式

要知道什么叫 n 级排列及其逆序数（《线性代数》第 42

页定义 1.9 和 1.10)，由此掌握 n 阶行列式的定义（《线性代数》第 44 页定义 1.11).

如 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的行列式可记作 $\det\boldsymbol{A}$ 或 $|\boldsymbol{A}|$(为简单计,本文中常用),或 $|a_{ij}|_n$.

行列式的许多术语与矩阵相同，但务必注意：

1) $\boldsymbol{A}$ 与 $|\boldsymbol{A}|$ 的差别，前者是一数表，后者是一个数；

2) 矩阵用 [] 或（）、行列式用 $|\quad|$. 如 $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$ 表示矩阵，$\begin{vmatrix}1&2\\0&3\end{vmatrix}$ 则表示行列式，两者切不可混淆，更不能乱用.

由定义，三角行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对下三角行列式也类似.

(2) 行列式的性质

要正确理解行列式的性质（《线性代数》第 47～49 页），并能在行列式计算中准确、熟练地运用.

在此要注意以下几点：

1) 通常用 $r_i(c_i)$表示行列式或矩阵的第 i 行（列）. $kr_i+r_j(kc_i+c_j)$表示将行列式或矩阵的第 i 行（列）的 k 倍加到第