普通高等教育‘十五’国家级规划教材
（高职高专教育）

工　程　数　学

林　益　主编

杨　明　叶　鹰　谢松法　梅正阳　编

高等教育出版社

内容提要

本书被列为普通高等教育“十五”国家级规划教材，是为高等职业学院理工科学生编写的基础课《工程数学》教材，内容包括线性代数、概率统计、积分变换、数学模型.

本书以“必需、够用”为度，注重应用.实际问题有新意，且与当前生活、科技息息相关，体现了“数学为人人”的思想.适当地利用数学软件 Matlab 以增强学生的计算能力，让学生把注意力更多地放在领会数学思想和方法，而不是在运算技巧上.选学数学模型，无疑地会极大地提高了学生应用数学的兴趣与能力.全书呈模块式结构，便于组合，以适应各专业、各层次不同的教学要求.

本书内容新颖，通俗易懂，可供高职高专及各类成人教育的理工科使用，也为理工科本科学生与工程技术人员及数学爱好者提供了丰富的、有特色的数学应用范例.

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷			
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	年　月第　版
印　　张	19	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	460 000	定　　价	20.10 元

策划编辑　蒋　青
责任编辑　丁鹤龄
封面设计　杨立新
责任绘图　杜晓丹
版式设计　史新薇
责任校对　戈　捷
责任印制

出 版 说 明

为加强高职高专教育的教材建设工作,2000 年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》(教高司[2000] 19 号),提出了“力争经过 5 年的努力,编写、出版 500 本左右高职高专教育规划教材”的目标,并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施:先用 2 至 3 年时间,在继承原有教材建设成果的基础上,充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验,解决好高职高专教育教材的有无问题;然后,再用 2 至 3 年的时间,在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材.根据这一精神,有关院校和出版社从 2000 年秋季开始,积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”.这些高职高专规划教材是依据 1999 年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》(草案)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(草案)编写的,随着这些教材的陆续出版,基本上解决了高职高专教材的有无问题,完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步.

2002 年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题,将高职高专教育规划教材纳入其中.“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略,抓好重点规划”为指导方针,重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设,特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材;同时还要扩大教材品种,实现教材系列配套,并处理好教材的统一性与多样化,基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系,在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系.

普通高等教育“十五”国家级规划教材(高职高专教育)适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用.

教育部高等教育司

2002 年 11 月 30 日

前　　言

本书是为高等技术职业学院理工科学生所编写的基础课《工程数学》教材，其内容包括线性代数、概率统计、积分变换和数学模型四部分.

当前我国高等教育正从“精英教育”向“大众教育”过渡，这个深刻的变化给我国高等职业教育发展提供了十分广阔的前景.“十五”期间各类高等技术职业学院将给国家输送八百万专业技术人才.显然，全面提高高职教育的质量和高职学生的素质是刻不容缓的.教育部高等教育司指出：“具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要”.本书是应运而生的.它为高职高专教材提供了一种模式，反映了长期工作在教学第一线的作者们对于数学教学改革的研究的一些成果.希望借此能为高职教育的大发展贡献出自己绵薄之力.

“以人为本”(并非“以学科为本”)是本书编写的出发点；以“大众教育”和“数学为人人”为本书编写的指导思想；以提高学生数学素质，促进学生主动学习数学为本书编写的主要目的.因此，我们在教学内容的取舍上注意到高职教育的要求和学生的实际情况，以“必需、够用”为尺度，不片面追求数学理论的系统性和完整性.在内容编写上有意识地引导学生了解数学与社会实际的关系：从就在周边发生的，或者从涉及到一些科学前沿的饶有趣味的实际问题出发，自然地引出数学概念和方法，并贯穿始终，最后使问题得到了满意的解决，培养了学生应用数学的意识与能力.在教学理念上不过分强求学生如何去更深刻地理解数学概念、原理及研究过程，而是更多地让学生体会数学的本质以及数学的价值.本书增添了供选用的数学模型并附录了数学软件Matlab的使用介绍，这在强化学生应用数学的兴趣和能力，提高计算技能等方面将起到重要作用.穿插在本书各章中的“知识广角”无疑也是一道靓丽的风景线，它将激发学生的兴趣，亲近数学理论，拓宽学科的视野.

第一章至第三章是线性代数.线性代数在数学理论和现代科技中应用的重要性是众所周知的，但其抽象的理论往往使学习者感到枯燥无味，而且也很难在有限的学时中了解这门古典学科在现代科技发展中的作用.现在，作者从直观背景中引入概念，以例子展开数学理论和方法.内容的重点是矩阵和向量这两个代数工具，并使线性方程组、矩阵相似等有关理论作为它们的应用而给出.整个线性代数部分避开了不必要的抽象理论，使必需的理论与方法沿若干精选的实例展开、发展，并在不断的发展中解决问题.把繁琐的计算部分交给了计算机，让计算机数学软件的应用能力与理论学习得到同步的增长.

第四章至第六章是概率统计.自然界和社会生活中存在着大量的随机现象.然而学生在学习与科学技术及日常生活紧密相关的概率统计时却感到比较困难.于是作者尝试突破传统的教学模式，变“先建立数学理论再解决实际问题”为“通过解决实际问题来学习概率统计”.整个教学内容是从几个实用的、兴趣盎然且富有探索意义的典型问题出发，并将它们分解为若干小问题而贯穿始终.通过这些问题，逐步展开概率统计的概念与方法，直至问题解决.所涉及到的数学概念以紧扣解决实际问题为原则.如全概率公式，在弱化了条件概率的概念后，就能将该公式的古典形

式、离散型随机变量形式和连续型随机变量形式多次应用到解决实际问题的例子中去. 数学软件的使用解决了“计算量大”的传统教学难题，还能使一些原先无法用手工计算实现的概率统计方法得以应用.

第七章是积分变换. 对于工科的许多专业，积分变换是专业课程中极为重要的工具. 在对复数和复变函数作简单回顾或介绍后直接进入积分变换的内容，舍弃了复杂的复变函数理论. Fourier变换尽可能结合其实际物理背景，如频谱、卷积的物理意义及许多性质的物理解释与应用. Laplace 变换重点放在计算与应用上. 通过一些简练、实用性强的方法及大量的例子，使学生熟练掌握 Laplace 变换的方法与技巧，使之成为学生解决实际问题的一项基本工具.

第八章是数学模型. 为高职学生开设数学模型课是一种尝试. 书中所选择的四个问题与实际生活紧密相连，既浅显、易懂，又具有趣味性. 建模的过程典范，步骤清楚，数学思维的分析详细，学生容易上手、入门. 如同所有实际问题一样，模型中所需的数学知识可能略高于学生现有的知识. 这就要有意识地引导学生去查找资料，利用已知成果，特别是充分利用计算机和数学软件. 显然通过数学建模可极大提高学生应用数学的兴趣和能力.

本书附录了数学软件 Matlab 简介. 简介通俗易懂，循序渐进，特别适合初次接触该软件者自学. 对软件内容的介绍比较清楚. 除介绍基本概念和基本方法外，还对比地介绍了软件的命令方式和程序方式，及部分函数的使用方法. 软件介绍的内容以“够用”为主，完全支持本书中有关的电算问题，也为读者深入学习和编程打下了较好的基础.

本书呈模块式结构，便于组合，以适应不同专业和不同层次的教学要求. 是否选用 Matlab 计算软件或数学模型并不影响课程的主要内容.

本书由林益主编，杨明编写了线性代数部分，叶鹰编写了概率统计部分，谢松法编写了积分变换部分，梅正阳编写了数学建模，数学软件 Matlab 简介等部分.

本书的编写得到华南理工大学汪国强教授，高等教育出版社蒋青高级策划和华中科技大学教务处的大力支持与热情帮助，在此特致以衷心的感谢！

由于作者的水平、经验有限，对一些问题的认识未必周全，因此不可避免地会有谬误，会力不从心，会不尽人意，恳请有关专家、同行和广大读者批评指正.

编 者

2003 年 2 月

目　　录

第一章　矩　　阵

在研究现实世界的许多问题中，常遇到为多个变量之间存在的线性关联关系．要表示这种关系，就需将多个变量联合起来使之成为一种多变元的线性系统．线性代数为这种系统的分析提供了数学语言和研究方法，本章将介绍线性代数中最基本的概念——矩阵及其运算．

§1.1　线性系统举例

线性系统是我们在社会科学、工程技术及各类应用中最常见的一种系统．

1.1.1　交通流量模型

一个城市中，一个由单行车道组成的系统如图 1.1 所示．四条单行车道交叉于 A、B、C、D 四个交叉道口．在车流高峰期，可观察到从这些交叉道口进出这个系统的车流量．例如一小时内，从交叉道口 A 进入系统有 450 辆车，从交道口 A 离开系统的有 610 辆车．其他交叉道口的数据见图．现在问题是每小时内，在系统内每两个交叉道口之间的车流量是多少？

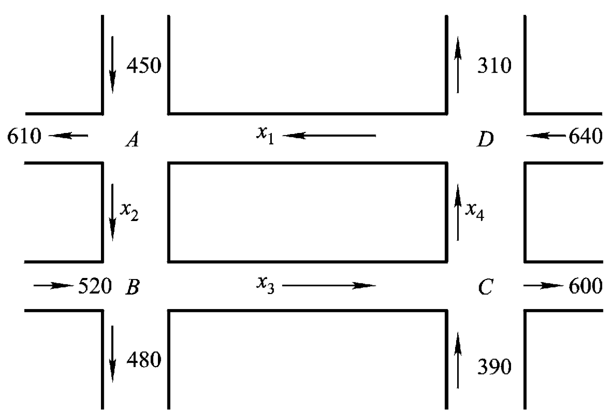


图 1.1

在这个系统中，要求出的车流量是 x_1, x_2, x_3, x_4，它们是相互联系的量，可以由每个交叉道口进出车辆数相等来建立这些关系．

例如，进入交叉道口 A 的车流量：x_1+450，从 A 出去的车流量：x_2+610，因此有

$$x_1+450=x_2+610 \qquad (\text{交叉道口 } A).$$

类似地有

$$x_2+520=x_3+480 \qquad (\text{交叉道口 } B),$$
$$x_3+390=x_4+600 \qquad (\text{交叉道口 } C),$$
$$x_4+640=x_1+310 \qquad (\text{交叉道口 } D),$$

这些数量关系涉及数的加法，它是线性运算中的一种.

线性运算中的另一种运算是数乘运算，即用数与一变量相乘.由多个变元的线性运算组成的方程组就是一个线性系统的数学形式，也简称为线性系统.

显然变量 $x_i\,(i=1,2,3,4)$ 必须对所列四个关系式的联合分析后给出.

1.1.2 人口婚姻模型

一个小城镇中，现有已婚男士 $x_0=8\,000$ 人，单身男士 $y_0=2\,000$ 人.每年有 30% 的已婚男士离婚，有 20% 的单身男士结婚.设男士总人数不变，问一年后，该城中已婚和单身男士数目 x_1 和 y_1 各为多少？

在这个问题中，可按单身和已婚两类男士分析，则有

$$\begin{cases}70\%\,x_0+20\%\,y_0=x_1,\\30\%\,x_0+80\%\,y_0=y_1.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}0.7x_0+0.2y_0=x_1,\\0.3x_0+0.8y_0=y_1.\end{cases}$$

因此，一年后已婚和单身人数和现有两类人数是一种线性关系.计算上述式子即可给出一年后该城镇男士婚姻状况数据.

社会学家关心的是进一步的问题：

1. 两年后或三年后，乃至若干年（k 年）后，该城中已婚和单身男士各为多少？它们和当前数据的关系如何？

2. 这样无限延续下去，两类人的分布状况在变化中是否趋于稳定？多少年以后会出现稳定状况？

1.1.3 炼油厂模型

设一个公司有下属三个炼油厂，每个厂分别从原油中生产三种石油产品：燃油、柴油和汽油.这些厂从一桶原油中产出的三种产品油数量如表 1.1.

表 1.1

工厂 / 产品	第 1 炼油厂	第 2 炼油厂	第 3 炼油厂
燃油	16（加仑）	8（加仑）	8（加仑）
柴油	8（加仑）	20（加仑）	8（加仑）
汽油	4（加仑）	10（加仑）	20（加仑）

如果公司接到一份 9 600 加仑燃油，12 800 加仑柴油和 16 000 加仑汽油的订单，由三个工厂生产，问各厂分别使用多少桶原油？为完成这份订单公司共需原油多少桶？

对这个问题，我们可设第 i 个炼油厂需要原油 x_i 桶，则三个厂共生产的产品油达到订单要求的关系是：

燃油：　$16x_1+8x_2+8x_3=9\ 600$，

柴油：　$8x_1+20x_2+8x_3=12\ 800$，

汽油：　$4x_1+10x_2+20x_3=16\ 000$.

求解这一线性系统可得出每个厂生产订单产品所需原油桶数以及公司应准备的原油总数.

1.1.4　化学方程式

在光合作用中，植物要从阳光中获取能量把二氧化碳（CO_2）和水（H_2O）转换成葡萄糖（$C_6H_{12}O_6$）和氧（O_2），反应方程式为：

$$x_1CO_2+x_2H_2O\longrightarrow x_3O_2+x_4C_6H_{12}O_6,$$

其中 x_1、x_2、x_3、x_4 分别为参加反应的二氧化碳、水、氧和葡萄糖的数目.

问题是在这样的反应中，二氧化碳、水、葡萄糖和氧气的比例各为多少？

由化学反应的平衡可知反应式中的化学元素碳（C）、氧（O）、氢（H）相等，从而有：

$$\begin{cases}x_1=6x_4,\\2x_1+x_2=2x_3+6x_4,\\2x_2=12x_4.\end{cases}$$

这三个线性关系将联合给出所需数 x_i 之间的数量关系.

上述模型的数量关系的共同特点是：多个变量由若干个线性关系联合确定，形成一个多个变元、多个方程的线性方程组.在系统变元很多时，这些关系趋于复杂，需要建立数学工具简洁地表示这些关系，并为这些关系的分析提供有效的理论和方法.这些工具主要是将要介绍的矩阵和随后要介绍的向量理论.作为它们的应用，我们将给出线性方程组的解法并解决更进一步的问题.

§1.2　矩阵的概念

在§1.1的线性模型中，一般都涉及几个不同部分不同种类的数据，如表1.2中，第二年已婚和单身两类人数的比例数可列表表示为：

表1.2

人口类别 / 比例	已婚者	单身者
已婚比例	0.7	0.2
单身比例	0.3	0.8

把其中数据抽象出来，则为数表

$$\begin{bmatrix}0.7&0.2\\0.3&0.8\end{bmatrix}.$$

其中横排的数字称为行，竖排的数字称为列，本数表有二行二列，0.7是第一行第一列的数字，表示第一年的已婚者在第二年仍维持婚姻的比例.

模型 1.1.3 的石油产品数据表 1.1 中，数值抽象出来则是下列数表：

$$\begin{bmatrix} 16 & 8 & 8 \\ 8 & 20 & 8 \\ 4 & 10 & 20 \end{bmatrix},$$

其中第 i 行，第 j 列的数 a_{ij} 表示对第 i 类产品油，第 j 个炼油厂的产量数. 如 $a_{22}=20$，表示第 2 个炼油厂的柴油产量为 20(加仑).

这些例子说明我们可以把一个线性模型的数据抽出来，表示为一个数表，这个数表就是将要定义的矩阵.

定义 1.2.1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij}，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$ 组成的一个 m 行、n 列的数表称为矩阵.

记为

$$(a_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

我们常用大写字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 等表示一个矩阵，如：

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},$$

其中 $m\times n$ 是矩阵的阶数，m 是行数、n 是列数；a_{ij} 是位于矩阵第 i 行，第 j 列位置上的数，称为矩阵的元素. 在本教材中，它们都是实数，从而 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵.

如前面两个模型得到的矩阵：

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} 16 & 8 & 8 \\ 8 & 20 & 8 \\ 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

分别是 2×2 阶和 3×3 阶矩阵. 这种行数和列数相等($m=n$)的矩阵被称为方阵或 n 阶方阵.

例 1

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

都是矩阵的例子.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 2×3 阶矩阵，其中元素 $a_{21}=3$，$a_{23}=4$. 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 只有一列，而矩阵 $\boldsymbol{D}$ 只有一行，像这种只有一列或者只有一行的矩阵分别被称之为列向量和行向量. 矩阵 $\boldsymbol{O}$ 的元素全为 0，称元素都是 0 的矩阵为零矩阵.

由于矩阵被定义为由数构成的表图(简称数表). 因此，定义 1.2.1 中隐含有两个矩阵相等的含义为：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的阶数相同，而且对应位置上的元素相等.

在例 1 中，所给矩阵是互不相等的.

例 2 彩电生产模型：考虑一个彩电生产集团，它有两个分厂，分别生产 21 吋、25 吋、29 吋彩电，两个厂的月产量在这三种类型的彩电上，依次的量用一个向量 $[20 \quad 10 \quad 9]$ 和 $[10 \quad 7 \quad 20]$

(万台)表示.则该公司的生产可用矩阵表示为：

$$A=\begin{bmatrix}20 & 10 & 9\\ 10 & 7 & 20\end{bmatrix},$$

其中 a_{ij} 表示第 i 个分厂,对第 j 种类型彩电的产量.类型 $j=1$ 表示 21 吋;$j=2$ 表示 25 吋,$j=3$ 表示 29 吋.例如 $a_{22}=7$ 表示第 2 个分厂,生产的 25 吋彩电是 7 万台/月.

例 3　图的矩阵表示:一个图是结点和边的集合.图 1.2 是一个由 5 个结点 V_1,V_2,V_3,V_4,V_5 构成的网络图.

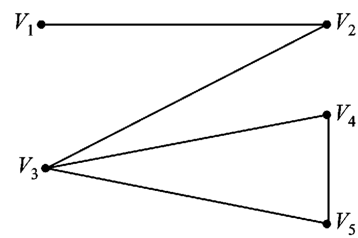


图 1.2

图 1.2 中联结结点之间的边为：

$\{V_1,V_2\}$，$\{V_2,V_3\}$，$\{V_3,V_4\}$，$\{V_3,V_5\}$，$\{V_4,V_5\}$.

我们可定义一个 5×5 阶矩阵 A 如下：

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如果 } \{V_i,V_j\} \text{是图的边；}\\ 0, & \text{如 } V_i \text{ 和 } V_j \text{ 之间无直接连接的边，}\end{cases}$$

则矩阵 A 称为图的连接矩阵(adjacency matrix).

图 1.2 的连接矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

知识广角

博弈矩阵

博弈论(game theory)是由 Von-Neumann 和 Morgenstern 于 1944 年创立的,研究决策主体的行为发生直接相互作用时候的决策及决策的均衡结果的数学理论.在经济学和管理科学等学科有极广泛的应用.其中两人非合作博弈是它的一种典型情形.有两个局中人,每人有一个策略集 S_i,$i=1,2$,每一个局中人独立选择自己的策略,但决策的结果不仅依赖于自己的策略选择,还依赖于对手的策略选择.下面是非合作博弈的一个著名的例子——囚徒困境(prisoner's dilemma).

有两个犯罪嫌疑人被警察抓住,分别关在不同的屋子里审讯.每个人可选择的策略集为{坦白,不坦白},如果两人都坦白,各判 8 年.如果两人都不坦白,因证据不足,各判 1 年.如果一人坦白.另一人不坦白,则坦白者判 0 年,不坦白者判 10 年,以体现坦白从宽抗拒从严的政策.我们定义两个 2×2 阶矩阵表示这个博弈,矩阵 A 是嫌疑人 1 的结果矩阵,矩阵 B 是嫌疑人 2 的结果矩阵：

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{2} \\ \multicolumn{2}{c}{\Downarrow} \\ \text{坦白} & \text{不坦白}\end{array} \\ 1\Rightarrow\begin{array}{r}\text{坦白}\\ \text{不坦白}\end{array} & \begin{bmatrix}-8 & 0\\ -10 & -1\end{bmatrix} \\ & \boldsymbol{A}\end{array}; \qquad \begin{array}{rc} & \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{2} \\ \multicolumn{2}{c}{\Downarrow} \\ \text{坦白} & \text{不坦白}\end{array} \\ 1\Rightarrow\begin{array}{r}\text{坦白}\\ \text{不坦白}\end{array} & \begin{bmatrix}-8 & -10\\ 0 & -1\end{bmatrix} \\ & \boldsymbol{B}\end{array}.$$

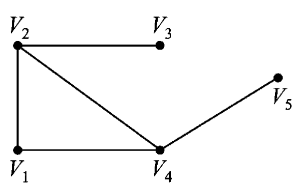
矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 表示在嫌疑人 1 取策略 i 时,嫌疑人 2 取策略 j 时,嫌疑人 1 的判刑年数.同理 $\boldsymbol{B}$ 中元素 b_{ij} 表示两个人分别取策略 i,j 时,嫌疑人 2 的判刑年数. {策略 1,策略 2} = {坦白,不坦白}.

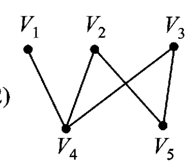
从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行分析显示,嫌疑人 1 选择策略 {坦白} 时,不论嫌疑人 2 取什么策略,其结果比他选择 {不坦白} 的相应结果都要好.因此,嫌疑人 1 会选择 {坦白}.同理,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列每个数都比第 2 列相应的数值大,因此嫌疑人 2 也会选择 {坦白}.如此,博弈矩阵的简单分析显示出博弈的结果是两人均坦白,各被判刑 8 年.

这个著名的例子奠定了非合作博弈的基础,也反映出个人理性和集体理性的矛盾.若让两人作为一个集体,使他们有串供的机会,则两人均会采用 {不坦白} 的策略,只有各判刑一年.

练习 1.2

1. 所有零矩阵是否相等?若不等,举例说明.
2. 写出下列图的连接矩阵.

(1) 

(2) 

3. 设上三角矩阵是方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$,其中元素 $a_{ij}=0$,$i>j$,如二阶上三角矩阵为 $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{bmatrix}$,试给出一个 4 阶上三角矩阵的例子.

§1.3 矩阵的运算

上一节给出矩阵的概念后,我们已经看到了矩阵在表示和分析问题上的简单功能.但矩阵作为重要的数学工具之一,它的有效使用还在于在矩阵间的若干运算.这一节我们将定义矩阵的一些重要运算,并讨论它们的性质和应用.

1.3.1 数乘矩阵

在 §1.2 例 2 中,彩电月生产矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}20 & 10 & 9\\ 10 & 7 & 20\end{bmatrix}.$$

如果要求出该公司的季度生产矩阵,则是每种产量,即 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 都要乘以数 3,所以季度生产矩阵为:

$$3\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3\times20 & 3\times10 & 3\times9\\ 3\times10 & 3\times7 & 3\times20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}60 & 30 & 27\\ 30 & 21 & 60\end{bmatrix}.$$

定义 1.3.1 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 阶矩阵,即 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$k$ 是一个数.则数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相乘定义为:

$$k\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn}\end{bmatrix}. \tag{1.3.1}$$

简记为
$$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

例如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 5 & -9\\ 2 & 0 & 7\end{bmatrix}$,则

$$5\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}15 & 25 & -45\\ 10 & 0 & 35\end{bmatrix},\ \frac{1}{2}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{9}{2}\\ 1 & 0 & \frac{7}{2}\end{bmatrix}.$$

要注意的是 数乘矩阵是用数乘矩阵的每一个元素.

1.3.2 矩阵的加法

矩阵加法的背景是我们在实际中经常用到的数表之间的一种加法.先看下例.

例 1 一个小组有 4 名学生,他们参加了 3 门课程的考试,可用一个矩阵表示他们的考试成绩:$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times3}$,$\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 表示第 i 个学生在第 j 门课程考试中的得分.如果三门课程都有期中、期末两次考试,则有两个考试分数矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$,它们分别是:

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}60 & 75 & 85\\ 80 & 70 & 81\\ 90 & 80 & 72\\ 70 & 55 & 60\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}70 & 80 & 80\\ 82 & 75 & 90\\ 85 & 84 & 80\\ 60 & 65 & 70\end{bmatrix}.$$

例如 $\boldsymbol{A}_1$ 中,$a_{23}=81$,则表示学生 2 在第 3 门课程期中考试得分为 81 分.

当我们要统计该小组学生的这三门课程的两次考试的总分时,就应该把他们每人的两次考试分数按各门课程对应地相加,即总分矩阵为

$$\begin{bmatrix}60+70 & 75+80 & 85+80\\ 80+82 & 70+75 & 81+90\\ 90+85 & 80+84 & 72+80\\ 70+60 & 55+65 & 60+70\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}130 & 155 & 165\\ 162 & 145 & 171\\ 175 & 164 & 152\\ 130 & 120 & 130\end{bmatrix}.$$

这种阶数相同的矩阵间的对应元素相加,称为矩阵加法.因此,总分矩阵可记为:$\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$.

定义 1.3.2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个 $m\times n$ 阶矩阵,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是一个 $m\times n$ 阶矩阵,定义为:

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}. \tag{1.3.2}$$

如

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 17 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

矩阵的加法定义告诉我们：阶数相同的矩阵才能做加法运算.

数乘矩阵和矩阵的加法,称为矩阵的线性运算.

例 2 在例 1 中的问题及所给考试分数矩阵下,若这三门课程的期末总评规定：期中成绩占 20%,期末成绩占 80%,求该组学生的总评成绩矩阵 B.

解 由题意,我们可用矩阵的线性运算求矩阵 B：

$$B=0.2A_1+0.8A_2=\begin{bmatrix} 68 & 79 & 81 \\ 81.6 & 74 & 88.2 \\ 86 & 83.2 & 78.4 \\ 62 & 63 & 68 \end{bmatrix}.$$

从矩阵 B 中能很明了地得到每一位同学三门课程的总评分数.如矩阵 B 的元素 $b_{23}=88.2$,给出第 2 位同学,第 3 门课总评成绩为 88.2 分.

矩阵的加法和数乘矩阵本质上是矩阵元素的加法和乘法.因此,从定义,对阶数相同的矩阵 A、B,和零矩阵 O,成立下列运算的性质：

(1) 矩阵加法的交换律 $A+B=B+A$；

(2) 矩阵加法的结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$；

(3) O 矩阵为加法的零元素 $A+O=A$；

(4) $-A$ 为矩阵 A 的负元素 $A+(-A)=O$；

(5) 数乘对加法的分配律 $k(A+B)=kA+kB$；

(6) 数乘矩阵对数的加法的分配律 $(k+l)A=kA+lA$.

这些性质和数的相应运算性质完全一致.

1.3.3 矩阵的乘法

这一小节,我们将介绍最重要的矩阵运算——两个矩阵的乘法.它的直观背景和定义都比矩阵的线性运算复杂一些.我们将从矩阵与向量的运算入手,再由此引入两个矩阵的乘法.

1.3.3.1 矩阵与向量的乘法

为了解运算的定义背景,先分析 1.1.3 中的炼油厂模型.公司的三个炼油厂的现有技术分别

可以从一桶原油中生产不同数量的燃油、柴油和汽油，已知一桶原油的单产量(加仑)矩阵为

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1\text{厂} & 2\text{厂} & 3\text{厂} \end{array} \\ \boldsymbol{A}= & \begin{bmatrix} 16 & 8 & 8 \\ 8 & 20 & 8 \\ 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{燃油} \\ \text{柴油}. \\ \text{汽油} \end{array}$$

设 x_i 表示第 i 个炼油厂所用的原油的桶数，则三个厂使用原油量可用向量 $\boldsymbol{X}$ 表示为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

由已知条件可计算出公司总产量矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 16x_1+8x_2+8x_3 \\ 8x_1+20x_2+8x_3 \\ 4x_1+10x_2+20x_3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{燃油} \\ \text{柴油}. \\ \text{汽油} \end{array}$$

$\boldsymbol{C}$ 是一个 3×1 的向量，$\boldsymbol{C}$ 的第 1 个元素是：

$$c_1=16x_1+8x_2+8x_3,$$

c_1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行元素：$[16\quad 8\quad 8]=[a_{11}\quad a_{12}\quad a_{13}]$和列向量 $\boldsymbol{X}$ 对应位置上元素乘积的和：$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3$. 我们称 $a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的行向量与列向量 $\boldsymbol{X}$ 的“数量积”，即：

$$[a_{11}\quad a_{12}\quad a_{13}]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3.$$

同理 $\boldsymbol{C}$ 的第 2 个元素 c_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行与 $\boldsymbol{X}$ 的数量积，$\boldsymbol{C}$ 的第 3 个元素 c_3 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 行与 $\boldsymbol{X}$ 的数量积，它们分别给出了公司在三种产品上的总产量. 我们可以很自然地就把总产量矩阵 $\boldsymbol{C}$ 看作是单产量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和原油总用量 $\boldsymbol{X}$ 的乘积，这样就可以表示为：

$$\boldsymbol{AX}=\begin{bmatrix} 16 & 8 & 8 \\ 8 & 20 & 8 \\ 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 16x_1+8x_2+8x_3 \\ 8x_1+20x_2+8x_3 \\ 4x_1+10x_2+20x_3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{C}.$$

这样模型 1.1.3 中的订单问题就可以简洁地表示为：

$$\begin{bmatrix} 16 & 8 & 8 \\ 8 & 20 & 8 \\ 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9\ 600 \\ 12\ 800 \\ 16\ 000 \end{bmatrix}.$$

当三种产品的订单向量 $\boldsymbol{b}$ 为：

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 9\ 600 \\ 12\ 800 \\ 16\ 000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{燃油} \\ \text{柴油} \\ \text{汽油} \end{array}$$

时，公司需要准备给三个炼油厂的原油桶数就可以求解一个形式上类似于一元线性方程 $ax=c$