高等学校教材

工 程 数 学

积分变换

(第四版)

东南大学数学系　张元林编

高等教育出版社

策划编辑　李艳馥
责任编辑　胡乃
封面设计　于　涛
责任绘图　郝　林
版式设计　张　岚
责任校对　存　怡
责任印制

内容简介

本书介绍 Fourier 变换和 Laplace 变换这两类积分变换的基本内容, 初版于 1978 年, 再版于 1982 年, 三版于 1989 年 .本次修订, 其基本内容符合原国家教委 1995 年颁布的《工程数学课程教学基本要求》(“积分变换”部分) ; 为方便使用, 保持了第三版的系统和结构; 同时也增添了一些内容, 并加强了该书的实用性, 以适应不同专业和不同层次的要求; 书中的例题与习题也作了适量的补充与调整 .书后附有 Fourier 变换简表和 Laplace 变换简表可供学习时查用 .书中给出习题答案可供参考 .

本书可供高等院校非数学专业的有关专业本科生选作教材, 也可作为工科研究生的教材或教学参考书, 亦可供广大工程技术人员参考 .

图书在版编目(CIP)数据

工程数学 .积分变换 张元林编 .—4 版 .—北京:
高等教育出版社, 2003 .11
ISBN 7 - 04 - 012955 - 8

Ⅰ .工 . . . Ⅱ .张 . . . Ⅲ .①工程数学 - 高等学校 - 教材②积分变换 - 高等学校 - 教材 Ⅳ .TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 093434 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网　　址	http:// www .hep .edu .cn
总　　机	010 - 82028899		http:// www .hep .com .cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷			
		版　　次	1978 年 12 月第 1 版
开　　本	850×1168　1 32		年　月第 4 版
印　　张	5 .5	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	130 000	定　　价	8 .10 元

目　　录

第四版前言

本书第三版自 1989 年 5 月出版以来,为许多院校用作教材 .经过 10 多年教学实践的检验,受到了同行和广大读者的欢迎 .同时他们也提出了宝贵的意见和建议,这也是促成本次修订的理由 .在此谨表谢忱 .

此次修订的另一个动因,则是课程体系与设置、教材的建设与改革须与时俱进 .10 多年来,改革开放不断深入,我国经济建设和科学技术迅速发展,教育环境发生了很大变化,教学改革取得很大进展,本书的再次修订也是适应时代进步的必然 .

高等教育出版社高等理工分社的支持又使本书的此次修订由编者和读者的愿望变成了现实 .在此同样表示感谢 .

本次修订,其基本内容符合原国家教委 1995 年颁布的《工程数学课程教学基本要求》,为满足各类专业及不同层次的需求,并体现理论联系实际的原则,加强了本书的实用性 .如此更有利于学生学以致用,也可使本书成为有关专业的研究生、教师和从事相关工作的技术人员的参考用书 .在保持第三版系统和结构的前提下,本版增加了一些内容 .第一章增加了 §1 .5 Fourier 变换的应用,其中给出“ 微分、积分方程的 Fourier 变换解法 ”和“ 偏微分方程的 Fourier 变换解法 ”两小节;第二章在 §2 .5 Laplace 变换的应用中充实了微分方程的 Laplace 变换解法的内容,增加了“ 偏微分方程的 Laplace 变换解法 ”一小节;同时在这两章中,还调整和补充了适量的例题和习题 .

积分变换应用广泛,本书只能给出一些最基本的内容和应用范例,以求举一反三之效,从而激活读者思维,开阔思路,扩大视野,增强其学习兴趣 .书中有星号 * 的内容可根据不同专业,不同

教学时数等情况加以取舍.它们也可供对此有兴趣的读者和学有余力的学生参考.

本书第三版的编者署名为南京工学院数学教研组,而南京工学院早于1988年更名为东南大学.因此,本书第四版即如封面所署名,特此说明,以免混淆.

由于编者水平所限,书中错误或不妥之处在所难免,殷切希望使用本书的教师及广大读者批评指正,以期日后再作修订.

编者

2003年6月于南京

引　　言

在数学中,为了把较复杂的运算转化为较简单的运算,常常采取一种变换手段.例如数量的乘积或商可以通过对数变换变成对数的和或差,然后再取反对数,即得到原来数量的乘积或商.这一方法的实质就是把较复杂的乘除运算通过对数变换化为较简单的加减运算(当然,上述运算是依赖于对数表来完成的).再如解析几何中的坐标变换、复变函数中的保角变换等都属于这种情况.所谓积分变换,就是通过积分运算,把一个函数变成另一个函数的变换,一般是含有参变量 α 的积分

$$F(\alpha) = \int_a^b f(t) K(t, \alpha) \mathrm{d} t .$$

它的实质就是把某函数类 A 中的函数 $f(t)$ 通过上述积分的运算变成另一函数类 B 中的函数 $F(\alpha)$,这里 $K(t, \alpha)$ 是一个确定的二元函数,称为积分变换的核.当选取不同的积分域和变换核时,就得到不同名称的积分变换.例如变换核 $K(t, \omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$,积分域 $(a, b) = (-\infty, +\infty)$,则有

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d} t, (\omega \text{为实变量});$$

变换核 $K(t, s) = \mathrm{e}^{-st}$,积分域 $(a, b) = (0, +\infty)$,则有

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d} t, (s \text{为复变量}) .$$

它们分别称为 Fourier 变换和 Laplace 变换(在应用数学中,常用的积分变换还有 Fourier 正弦变换,Fourier 余弦变换,Hankel 变换和 Mellin 变换等).$f(t)$称为象原函数,$F(\alpha)$称为 $f(t)$的象函数,在一定条件下,它们是一一对应而变换是可逆的.

用积分变换去解微分方程或其它方程,就如同用对数变换计

算数量的乘积或商一样.如果从原方程中直接求未知的解 y 有困难或较为复杂时,则可求它的某种积分变换的象函数 Y,然后再由求得的 Y 去找 y.当然,这种变换的选择应当使得由原来关于 y 的方程经变换得到的关于 y 的象函数 Y 的方程是容易求解的.一般地说,在这种变换之下,原来的偏微分方程可以减少自变量的个数直至变成常微分方程;原来的常微分方程可以变成代数方程,从而使得在函数类 B 中的运算简化,找出在 B 中的一个解,再经过逆变换,就得到原来要在函数类 A 中所求的解(当然,上述求变换与求逆变换是可以依赖于积分变换表来完成的).

积分变换的理论和方法不仅在数学的许多分支中,而且在其它自然科学和各种工程技术领域中均有着广泛的应用,它已成为不可缺少的运算工具.本书要介绍的是最常用的两类积分变换:Fourier 变换和 Laplace 变换.我们着重讨论它们的定义、性质及某些应用.

第一章　Fourier 变换

§1.1　Fourier 积分

在学习 Fourier 级数的时候,我们已经知道,一个以 T 为周期的函数 $f_T(t)$,如果在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足 Dirichlet 条件(即函数在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足:1°连续或只有有限个第一类间断点;2°只有有限个极值点),那么在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上就可以展成 Fourier 级数.在 $f_T(t)$的连续点处,级数的三角形式为

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t), \tag{1.1}$$

其中 $\omega=\frac{2\pi}{T}$,

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t \quad (n = 1,2,3,\cdots),$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t \quad (n = 1,2,3,\cdots),$$

为了今后应用上的方便,下面把 Fourier 级数的三角形式转换

为复指数形式 利用 Euler 公式①

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j} = -j\frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2},$$

此时,(1.1)式可写为

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{jn\omega t}+e^{-jn\omega t}}{2}+b_n\frac{e^{jn\omega t}-e^{-jn\omega t}}{2j}\right) \\ &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-jb_n}{2}e^{jn\omega t}+\frac{a_n+jb_n}{2}e^{-jn\omega t}\right). \end{aligned}$$

如果令

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\,dt,$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n-jb_n}{2} \\ &= \frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\cos n\omega t\,dt - j\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin n\omega t\,dt\right] \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)[\cos n\omega t - j\sin n\omega t]\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-jn\omega t}\,dt \quad (n=1,2,3,\cdots), \end{aligned}$$

$$c_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{jn\omega t}\,dt \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

而它们可合写成一个式子

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-jn\omega t}\,dt \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

若令

① 数学中常用"i"表示虚数单位,这里用"j"是按照电工学中通常的习惯.

$$\omega_n = n\omega \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots),$$

则(1.1)式可写为

$$f_T(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{j\omega_n t} + c_{-n} e^{-j\omega_n t}]$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\omega_n t},$$

这就是 Fourier 级数的复指数形式 或者写为

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t}. \qquad (1.2)$$

下面我们来讨论非周期函数的展开问题 .任何一个非周期函数 $f(t)$都可以看成是由某个周期函数 $f_T(t)$当 $T \to +\infty$时转化而来的 .为了说明这一点,我们作周期为 T 的函数 $f_T(t)$,使其在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 之内等于 $f(t)$,而在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 之外按周期 T 延拓到整个数轴上,如图 1 - 1 所示 .很明显,则 T 越大, $f_T(t)$与 $f(t)$相等的范围也越大,这表明当 $T \to +\infty$时,周期函数 $f_T(t)$便可转化为 $f(t)$,即有

$$\lim_{T \to +\infty} f_T(t) = f(t).$$

这样,在(1.2)式中令 $T \to +\infty$时,结果就可以看成是 $f(t)$的展开式,即

$$f(t) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t}.$$

当 n 取一切整数时, ω_n 所对应的点便均匀地分布在整个数轴上,如图 1 - 2 所示 .若两个相邻点的距离以 $\Delta\omega_n$ 表示,即

$$\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{2\pi}{T}, \text{或} \quad T = \frac{2\pi}{\Delta\omega_n},$$

则当 $T \to +\infty$时,有 $\Delta\omega_n \to 0$,所以上式又可以写为

$$f(t) = \lim_{\Delta\omega_n \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t} \Delta\omega_n. \qquad (1.3)$$

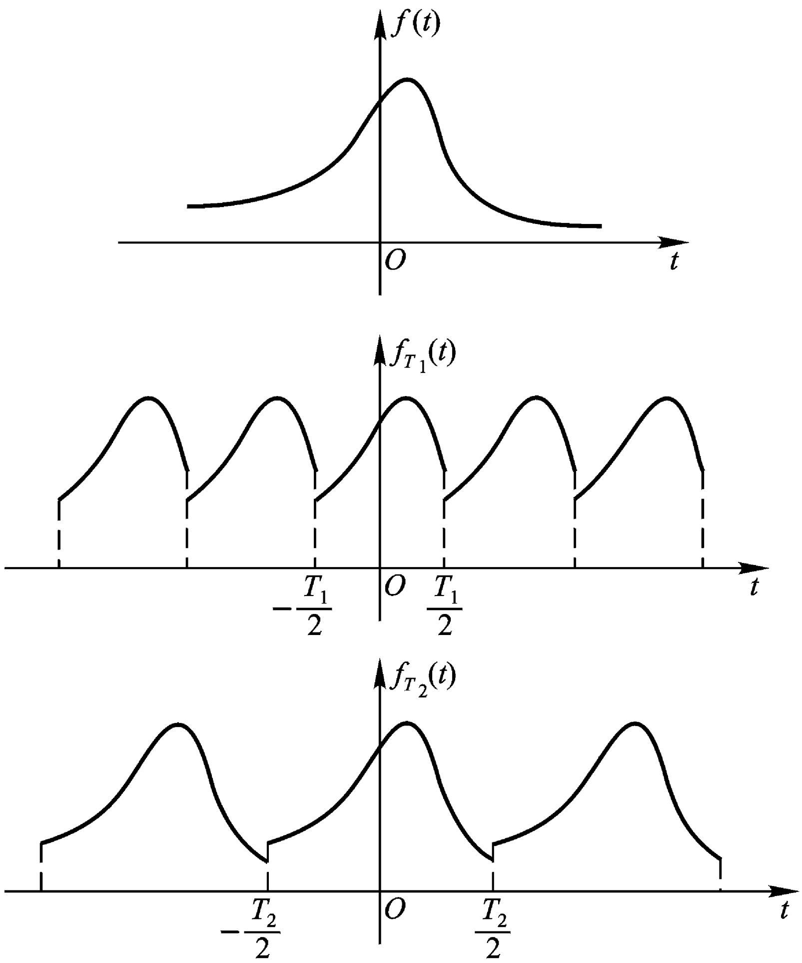

图 1 - 1

图 1 - 2

当 t 固定时, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}$ 是参数 ω_n 的函数, 记为 $\Phi_T(\omega_n)$,即

$$\Phi_T(\omega_n)=\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(\tau)e^{-j\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega_n t}.$$

利用 $\Phi_T(\omega_n)$ 可将(1.3)式写成

$$f(t)=\lim_{\Delta\omega_n\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Phi_T(\omega_n)\Delta\omega_n .$$

很明显,当 $\Delta\omega_n\to 0$,即 $T\to+\infty$ 时,$\Phi_T(\omega_n)\to\Phi(\omega_n)$,这里

$$\Phi(\omega_n)=\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega_n t}.$$

从而 $f(t)$ 可以看作是 $\Phi(\omega_n)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega_n)\mathrm{d}\omega_n ,$$

即
$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)\mathrm{d}\omega,$$

亦即
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega .$$

这个公式称为函数 $f(t)$ 的 Fourier 积分公式 .应该指出,上式只是由(1.3)式的右端从形式上推出来的,是不严格的 .至于一个非周期函数 $f(t)$ 在什么条件下,可以用 Fourier 积分公式来表示,有下面的收敛定理 .

Fourier 积分定理 若 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足下列条件:1° $f(t)$ 在任一有限区间上满足 Dirichlet 条件;2° $f(t)$ 在无限区间 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积(即积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$ 收敛),则有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega^{①} \qquad (1.4)$$

成立,而左端的 $f(t)$ 在它的间断点 t 处,应以 $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$

① 式中的广义积分都是在主值意义下的,所谓主值意义是指

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N} f(x)\mathrm{d}x .$$

来代替 这个定理的条件是充分的,它的证明要用到较多的基础理论,这里从略 .

(1.4)式是 $f(t)$的 Fourier 积分公式的复数形式,利用Euler公式,可将它转化为三角形式 .因为

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \ e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau \ d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau + \\
&\qquad j\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau \ d\omega,
\end{aligned}
$$

考虑到积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau$是 ω 的奇函数,就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\omega(t-\tau)d\tau \ d\omega = 0,$$

从而

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau \ d\omega, \qquad (1.5)$$

又考虑到积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau$$

是 ω 的偶函数,(1.5)又可写为

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau \ d\omega. \qquad (1.6)$$

这便是 $f(t)$的 Fourier 积分公式的三角形式 .

在实际应用中,常常要考虑奇函数和偶函数的 Fourier 积分公式 .当 $f(t)$为奇函数时,利用三角函数的和差公式,(1.6)式可写为

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)(\cos\omega t\cos\omega\tau + \sin\omega t\sin\omega\tau)d\tau \ d\omega.$$

由于 $f(t)$ 为奇函数,则 $f(\tau)\cos\omega\tau$ 和 $f(\tau)\sin\omega\tau$ 分别是关于 τ 的奇函数和偶函数.因此

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau \mathrm{d}\tau \sin\omega t \mathrm{d}\omega. \qquad (1.7)$$

当 $f(t)$ 为偶函数时,同理可得

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(\tau)\cos\omega\tau \mathrm{d}\tau \cos\omega t \mathrm{d}\omega. \qquad (1.8)$$

它们分别称为 Fourier 正弦积分公式和 Fourier 余弦积分公式.

特别,如果 $f(t)$ 仅在 $(0, +\infty)$ 上有定义,且满足 Fourier 积分存在定理的条件,我们可以采用类似于 Fourier 级数中的奇延拓或偶延拓的方法,得到 $f(t)$ 相应的 Fourier 正弦积分展开式或 Fourier 余弦积分展开式.

例 1 求函数 $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 的 Fourier 积分表达式.

解 根据 Fourier 积分公式的复数形式(1.4),有

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-1}^{1} (\cos\omega\tau - \mathrm{j}\sin\omega\tau)\mathrm{d}\tau \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{1} \cos\omega\tau\mathrm{d}\tau \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}(\cos\omega t + \mathrm{j}\sin\omega t)\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega, \quad (t \neq \pm 1)
\end{aligned}$$

当 $t = \pm 1$ 时, $f(t)$ 应以 $\dfrac{f(\pm 1 + 0) + f(\pm 1 - 0)}{2} = \dfrac{1}{2}$ 代替.

我们也可以根据 Fourier 积分公式的三角形式(1.6)来计算.事实上,这里 $f(t)$ 为偶函数,还可以根据 Fourier 余弦积分公式获得结果.读者不妨计算和比较一下.

根据上述的结果,我们可以写为

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}f(t), & t\neq\pm1,\\ \dfrac{1}{2}, & t=\pm1.\end{cases}$$

即

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |t|<1,\\ \dfrac{\pi}{4}, & |t|=1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

据此也可看出,利用 $f(t)$ 的 Fourier 积分表达式可以推证一些广义积分的结果 这里,当 $t=0$ 时,有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2},$$

这就是著名的 Dirichlet 积分 .

习　题　一

1. 试证:若 $f(t)$ 满足 Fourier 积分定理条件,则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega+\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega,$$

其中

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau,$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau.$$

2. 求下列函数的 Fourier 积分:

(1) $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & t^2<1,\\ 0, & t^2>1.\end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \mathrm{e}^{-t}\sin 2t, & t\geq0.\end{cases}$

(3) $f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-1,\\ -1, & -1<t<0,\\ 1, & 0<t<1,\\ 0, & 1<t<+\infty.\end{cases}$