

工程力学概要

(材料力学部分)

与 习题解答

顾赫宁 编著

华南理工大学出版社

工程力学概要与习题解答

(材料力学部分)

顾赫宁 编著

华南理工大学出版社

·广州·

图书在版编目 (CIP) 数据

工程力学概要与习题解答 (材料力学部分) 顾赫宁编著 广州: 华南理工大学出版社, 2005.12
I ①工... II ②顾... III ③工程力学—解题 ④材料力学—解题 IV ⑤TB3—4

I ①工... II ②顾... III ③工程力学—解题 ④材料力学—解题 IV ⑤TB3—4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 121212 号

总发行: 华南理工大学出版社 (广州五山华南理工大学 560 号楼, 邮编 510640)

发行电话: 020-87533333 87533333 (传真)

责任编辑: 林建岸

印刷: 广州市新明光印刷有限公司

责任编辑: 林建岸

印刷者: 广州市新明光印刷有限公司

开本: 787mm×1092mm 1/32 印张: 12.5 字数: 320千字

版次: 2005年 12月第 1版第 1次印刷

印数: 1-5000册

定价: 12.00元

目 录

第一章 轴向拉伸与压缩	(v)
第二章 剪切与扭转	(vii)
第三章 弯曲内力	(viii)
第四章 弯曲应力	(xiii)
第五章 弯曲变形	(xv)
第六章 应力状态与强度理论	(xvii)
第七章 组合变形	(xviii)
第八章 压杆稳定	(xx)
第九章 能量法	(xxii)
附：第二届全国青年力学竞赛材料力学试题及解答	(xxiii)
第三届全国周培源大学生力学竞赛材料力学试题及解答	(xxiv)

第一章 轴向拉伸与压缩

一、内容总结

1. 轴向拉压的概念

等直杆在其两端各受一集中力 F 作用, 两个力等值, 反向, 且作用线与杆轴线重合, 则此杆产生轴向拉压这种基本变形。

2. 轴力与轴力图

轴向拉压杆的内力称为轴力, 用符号 F_N 表示。当 F_N 的方向与截面外法线方向一致时, 规定为正, 反之则为负。求轴力时采用截面法。

在本章或以后的章节中, 求内力时均使用“设正法”, 即将所求截面的内力假设为正的数值, 如果结果为正, 则说明假设正确, 轴力为拉力; 如果结果是负值, 则说明实际情况与假设相反, 是压力。

当杆受到多个轴向外力作用时, 在杆的各横截面上的轴力将随横截面位置的不同而变化, 这种表示轴力与截面位置关系的图线, 称为轴力图。

3. 轴向拉压杆横截面及斜截面上的应力及其应用条件

由于轴向拉压杆横截面上的应力分析是一个静不定问题, 所以要从几何和静力平衡两方面着手进行研究。首先几何方面, 据实验, 杆件横截面变形前后均为平面, 因而提出“平面假设”, 任意两横截面间所有假想的纵向纤维的变形均相同, 受力相同, 由材料均匀连续的假设可知, 轴向拉压杆横截面上各点的应力相等, 垂直于横截面。再根据静力平衡条件即可得出轴向拉压杆横截面 (圆) 上的正应力

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

式中 A 为横截面面积。与横截面成 α 角的任一斜截面上的应力:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha \quad \tau_\alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\tau_\alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha \quad \sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha$$

式中 σ 即轴向拉压杆在横截面 ($\alpha = 0^\circ$) 上的正应力。

轴向拉压杆横截面上应力公式应用条件:

- ①适用于弹性及塑性范围;

②适用于锥角 $\alpha \leq 10^\circ$ 横截面连续变化的直杆；

③在外力作用点附近或杆件面积突然变化处，应力分布并不均匀，不能应用上述公式，稍远一些的横截面上方可使用。这就是“圣维南原理”。

轴向拉压杆的强度计算

等直杆轴向拉压时的强度条件为

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

其中 $[\sigma]$ 称为许用应力，它是用材料的极限应力 σ_{\lim} 除以安全系数 n 所得的数值。

塑性材料的极限应力为材料的屈服极限 $\sigma_{\text{弹}}$ ，脆性材料的极限应力为材料的强度极限 $\sigma_{\text{断}}$ ， n 是大于 1 的数。

最大正应力发生的截面称为危险截面。对于变截面直杆，轴力绝对值最大的截面，静面积最小的截面是危险截面。

强度问题一般有以下三类：

(1) 设计截面尺寸

已知外力 F ，材料许用应力 $[\sigma]$ ，设计杆件截面

$$A \geq \frac{F}{[\sigma]}$$

若所取截面形状为矩形，一般取 b 和 h 分别为矩形长、宽。

(2) 求许可载荷

已知杆件横截面尺寸及所选用材料，求所能承受的最大外力。一般先求出许可的轴力，再求许可载荷

$$F \leq n[\sigma]A$$

(3) 强度校核

已知外力 F ，杆件横截面尺寸及所选用材料，校核该杆件是否安全。

轴向拉压杆的变形计算

轴向拉压杆的轴向线应变 ϵ 为

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

轴向拉压杆的横向应变 ϵ_r 为

$$\epsilon_r = -\mu \epsilon \quad \text{或} \quad \mu = \left| \frac{\epsilon_r}{\epsilon} \right|$$

μ 称为泊松比，是材料的弹性常数之一，无量纲。

轴向拉压杆虎克定律的两种形式及应用条件

$$\Delta L = \frac{FL}{EA} \quad \sigma \leq \sigma_p$$

应用条件：①正应力不超过比例极限 σ_p ；②在计算长度 L 内， E ， μ ， n 均为常数。

对于阶梯形受拉压杆件，其总变形应分段考虑，然后进行代数和累加，即

$$\Delta L = \sum_{i=1}^n \frac{F_i L_i}{E_i A_i}$$

材料的力学性能和低碳钢静拉伸实验

材料在外力作用下所呈现的有关强度和变形方面的特性,称为材料的力学性能。

在常温静载条件下低碳钢受拉时,以 σ 为纵坐标,以 ϵ 为横坐标,可以得到应力—应变曲线

(图 1-1)。从图中可看到:

(1) 变形分为四个阶段

弹性阶段 屈服(流动)阶段 强化阶段 颈缩破坏阶段

(2) 四个强度指标

比例极限 σ_p 线弹性阶段结束时(点 a)所对应的应力数值。

弹性极限 σ_e 弹性阶段结束时(点 b)所对应的应力数值。

屈服极限 σ_s 下屈服点(点 c)所对应的应力数值。

强度极限 σ_b 试件破坏之前所能承受的最高应力数值。

(3) 一个弹性指标

由图 1-1 可看出,材料弹性模量

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

(4) 两个塑性指标

延伸率

$$\delta = \frac{l - l_0}{l_0}$$

断面收缩率

$$\psi = \frac{A_0 - A_n}{A_0}$$

式中 l_0 为试件原长, l 为拉断后长度, A_0 为横截面的原来面积, A_n 为颈缩破坏处的最小面积。塑性材料: δ 较大; 脆性材料: δ 较小。

低碳钢试件拉至塑性变形阶段后卸载,当重新加载时,材料的比例极限提高,塑性降低,该现象称为冷作硬化。

简单拉压静不定问题

对于某一结构,若总平衡方程数少于所要求的未知量总数时,这一结构称为静不定结构。总未知量数减去总平衡方程数即为该结构的静不定次数。求解静不定问题的关键在于根据变形几何关系,列出与静不定次数相同的补充方程。

解静不定问题的一般步骤为:①确定静不定次数;②列出所有独立的平衡方程;③根据变形几何关系,列出变形协调方程;④将物理关系式代入变形协调方程,得到补充方程,将其与平衡方程联立,求出全部未知量。

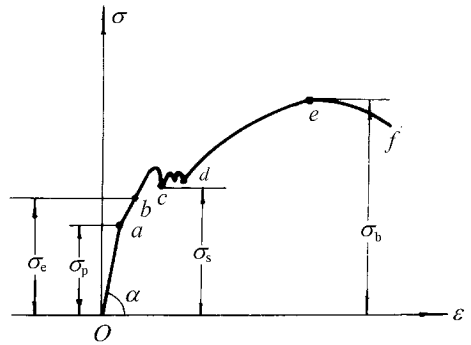
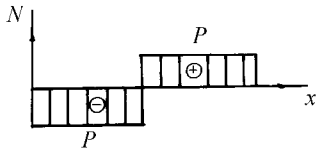
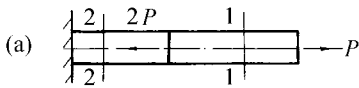


图 1-1

掌握“用切线代替圆弧”求简单桁架中杆件变形量的方法。

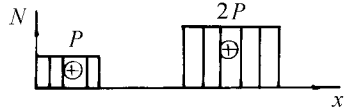
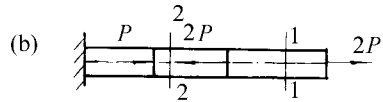
二、习题解答

例1 求图示各杆的内力和圆筒横截面上的轴力,并作轴力图。



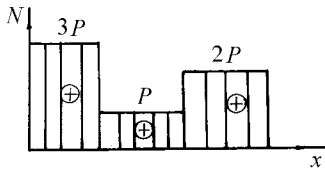
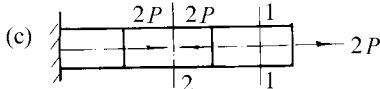
$$N_1 = +P$$

$$N_2 = -P$$



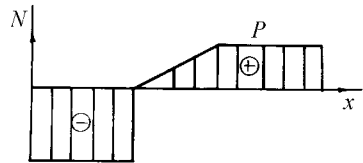
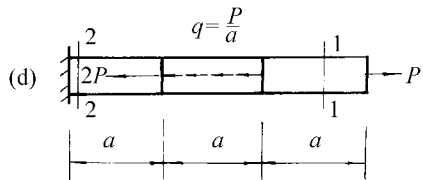
$$N_1 = +2P$$

$$N_2 = 0$$



$$N_1 = +2P$$

$$N_2 = +P$$



$$N_1 = +P$$

$$N_2 = -2P$$

题图

例2 求图示等直杆横截面上的内力和圆筒上的轴力,并作轴力图。如横截面积 $S_1 > S_2 > S_3$,求各横截面上的应力。

解: 求轴力

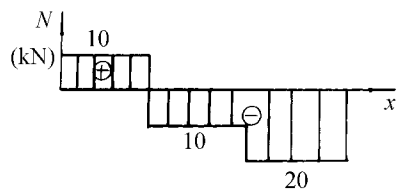
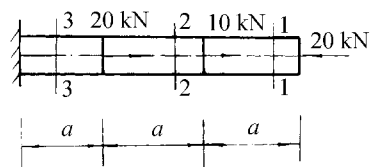
求轴力

求轴力

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{S_2}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{S_3}$$



题图

例3 求图示阶梯状直杆横截面上的内力和圆筒上的轴力,并作轴力图。如横截面积 $S_1 > S_2 > S_3$,求

求各横截面上的应力。

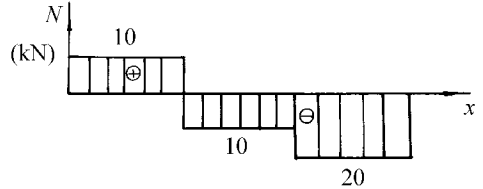
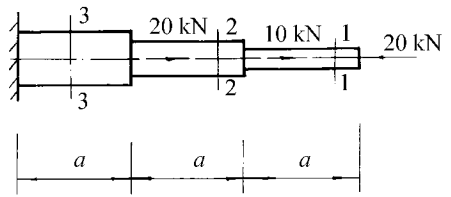
解：

原图

原图

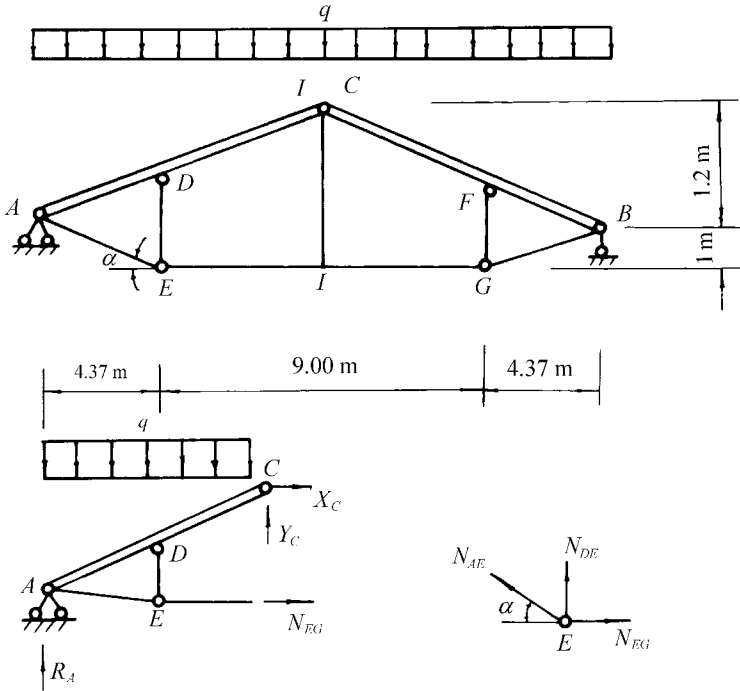
原图

原图



题图

图一混合屋架结构的计算简图。屋架的上弦用钢筋混凝土制成。下面的拉杆和中间竖向撑杆用角钢构成，其截面均为两根等边角钢。已知屋面承受集度为 q 的垂直均布荷载。求拉杆和撑杆横截面上的应力。



题图

由题意可判定此结构为对称结构，

亦即

求内力

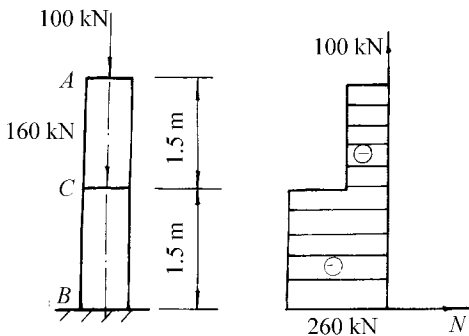
取截面以左部分，由 \sum

原图

原图 (拉)

模量 E 和泊松比 ν 如不计柱的自重, 试求下列各项:

- (1) 作轴力图;
- (2) 各段柱横截面上的应力;
- (3) 各段柱的纵向线应变;
- (4) 原柱的总变形。



题图

解: (1) 作轴力图

(2) 各段柱横截面上的应力

(3) 各段柱的纵向线应变

(4) 原柱的总变形

解: (1) 作轴力图

(2) 各段柱横截面上的应力

(3) 各段柱的纵向线应变

(4) 原柱的总变形

试证明受轴向拉伸(压缩)的圆截面杆横截面沿圆周方向的线应变 ϵ_{θ} 等于直径的相对变化 ϵ_D ;

一根直径为 D 的圆截面杆, 在轴向拉力 F 作用下, 直径减小 ΔD , 如材料的弹性模量 E 和泊松比 ν 已知, 试求轴向拉力 F ;

空心圆截面钢杆, 外直径 D , 内直径 d , 当受轴向拉伸时, 已知纵向线应变 ϵ , 试求此时的壁厚 t 。

解: (1) 证明: 圆截面原周长 $L_0 = \pi D$, 变形后圆周长 $L = \pi(D - \Delta D)$, 故

$$\epsilon_{\theta} = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\pi(D - \Delta D) - \pi D}{\pi D} = -\frac{\Delta D}{D} = -\epsilon_D$$

(2) 求轴向拉力 F

横向应变

$$\epsilon_{\theta} = -\nu \epsilon = \frac{\Delta D}{D}$$

纵向应变

$$\epsilon = \frac{F}{EA}$$

$$F = \frac{EA \epsilon}{1 - \nu^2}$$

(3) 求变形后的壁厚 t

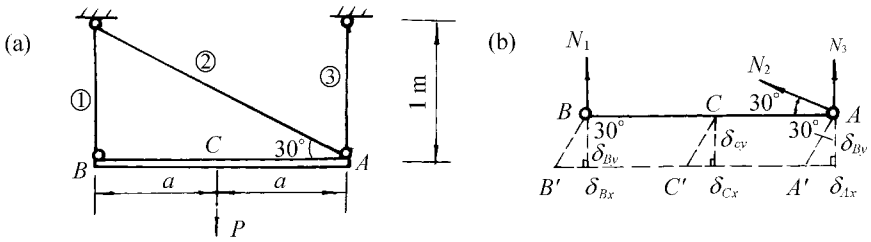
横向应变

$$\epsilon_{\theta} = -\nu \epsilon = \frac{\Delta t}{t}$$

变形后壁厚

$$t = \frac{D - d}{2(1 - \nu \epsilon)}$$

结构受力如图所示, 已知各杆的材料和横截面面积均相同。面积 A , 材料的弹性模量 E 和屈服极限 σ_s 已知, 试求当 F 增大时, 求 C 点的水平位移、铅垂位移及结构的强度储备。



题 19 题图

解：(1)由平衡条件

$$\sum \delta_{Bv} \delta_{Bv} + \delta_{Cv} \delta_{Cv} + \delta_{Av} \delta_{Av} = \delta_{Bx} \delta_{Bx} + \delta_{Cx} \delta_{Cx} + \delta_{Ax} \delta_{Ax}$$

$$\sum \delta_{Bx} \delta_{Bx} + \delta_{Cx} \delta_{Cx} + \delta_{Ax} \delta_{Ax} = \delta_{Bv} \delta_{Bv} + \delta_{Cv} \delta_{Cv} + \delta_{Av} \delta_{Av}$$

$$\sum \delta_{Av} \delta_{Av} = \delta_{Bx} \delta_{Bx} + \delta_{Cx} \delta_{Cx} + \delta_{Ax} \delta_{Ax} + \delta_{Bv} \delta_{Bv} + \delta_{Cv} \delta_{Cv} + \delta_{Av} \delta_{Av}$$

(2)求节点的垂直位移

$$\delta_{Bv} = \frac{P \cdot a}{2EI} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Pa}{4EI}$$

$$\delta_{Cv} = \frac{Pa}{4EI} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Pa}{8EI}$$

节点的垂直位移

$$\delta_{Av} = \frac{Pa}{8EI} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Pa}{16EI}$$

$$\delta_{Bx} = \frac{Pa}{16EI} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Pa}{32EI}$$

因为 δ_{Bx} 越圆 则斜杆②长度不变, 从而使节点 粤产生水平位移

$$\delta_{Cx} = \delta_{Bx} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Pa}{64EI}$$

$$\delta_{Ax} = \frac{\delta_{Bx}}{\sqrt{3}} = \frac{Pa}{32\sqrt{3}EI}$$

由变形协调关系图 可知：

$$\delta_{Bv} \delta_{Bv} + \delta_{Cv} \delta_{Cv} + \delta_{Av} \delta_{Av} = \delta_{Bx} \delta_{Bx} + \delta_{Cx} \delta_{Cx} + \delta_{Ax} \delta_{Ax}$$

(3)结构的强度储备

$$\frac{\sigma_{杂}}{\sigma_{工作}} = \frac{\sigma_{杂}}{\sigma_{许用}}$$

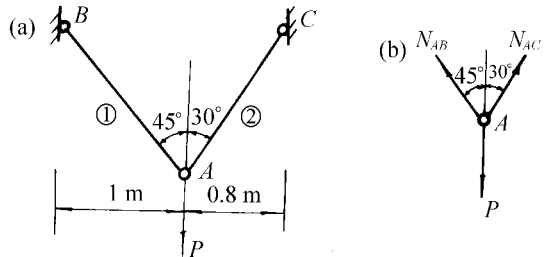
$$\frac{\sigma_{杂}}{\sigma_{许用}} = \frac{\sigma_{杂}}{\sigma_{许用}}$$

题 20 图 所示实心圆钢杆 粤和 粤兑在 粤兑 以铰相连接, 在 粤兑 点作用有铅垂向下的力 孕越圆兑兑 已知 粤兑 和 粤兑 杆的直径分别为 粤兑越圆兑兑兑和 粤兑越圆兑兑兑兑, 钢的弹性模量 耘越圆兑兑兑兑 试求 粤兑 点在铅垂方向的位移。

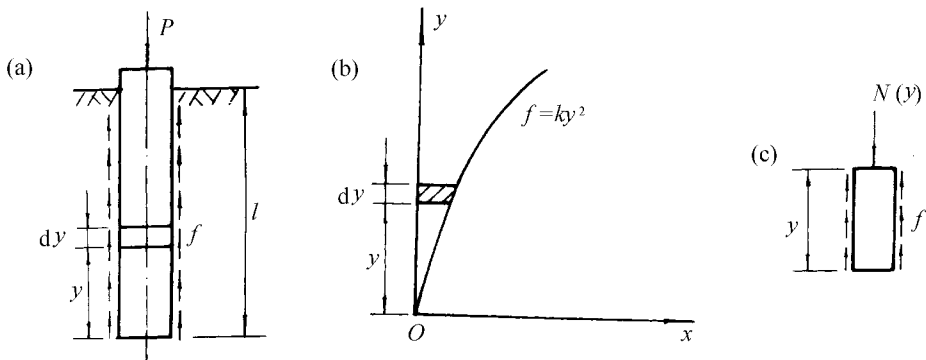
解：(1)对于节点 粤(图 20)

$$\sum \delta_{Av} \delta_{Av} = \delta_{Bv} \delta_{Bv} + \delta_{Cv} \delta_{Cv}$$

题 20 题图



的摩擦力 f 所平衡, f 按抛物线变化。试确定木桩的总缩短量, 以 Δ 表示。(提示: 先根据平衡求出常数 k)



题 1 图

解: (1) 求常数 k

木桩微段 dy 上的摩擦力 (参考图 1)

$$f = ky^2 dy$$

整个木桩的摩擦力

$$F = \int_0^l ky^2 dy = \frac{1}{3} kl^3$$

由平衡条件可知:

$$P = F = \frac{1}{3} kl^3$$

(2) 确定木桩的总缩短量

由图 1 可知, 木桩任意截面上的轴力 (压力) 为

$$N(y) = P - \int_y^l ky^2 dy = P - \frac{1}{3} k(l^3 - y^3)$$

杆中微段 dy 的缩短量为

$$\Delta y = \frac{N(y) dy}{EA}$$

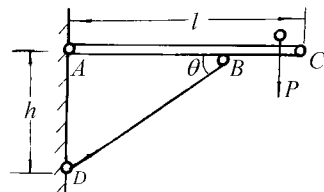
所以木桩的总缩短量为

$$\Delta = \int_0^l \frac{N(y) dy}{EA} = \int_0^l \frac{P - \frac{1}{3} k(l^3 - y^3)}{EA} dy = \frac{Pl}{EA} - \frac{k}{3EA} (l^3 y - \frac{1}{4} y^4) \Big|_0^l = \frac{Pl}{EA} - \frac{k}{3EA} (l^4 - \frac{1}{4} l^4) = \frac{Pl}{EA} - \frac{k l^4}{4EA}$$

图 2 所示三角形托架, AC 为刚性杆, AD 为斜撑杆, 载荷 P 可沿水平梁移动。为使斜撑杆重量最轻, 问斜撑杆与梁之间夹角应取何值? 不考虑 AD 杆的稳定。

解: 设 P 的作用线到 A 点的距离为 x , AD 斜杆受压力为 N , 由平衡方程 $\sum M_A = 0$

$$Px - N \sin \theta \cdot h = 0$$



题 2 图

得 $\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \sin \theta$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, σ_{\max} 达最大值, 即

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \sin \theta$$

为满足强度条件 $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$:

$$\frac{P}{A} \sin \theta \leq [\sigma]$$

则杆的体积应为

$$V = \frac{P}{[\sigma] \sin \theta} \cdot L$$

显然, 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, V 最小, 亦即重量最轻。

例 1 两根杆 AB 和 AC 的材料相同, 它们的长度和横截面积也相同。AB 杆承受作用在端点的集中荷载 P; AC 杆承受沿杆长均匀分布的荷载 q, 其集度 $q = \frac{P}{L}$ 。试比较这两根杆内积蓄的应变能。

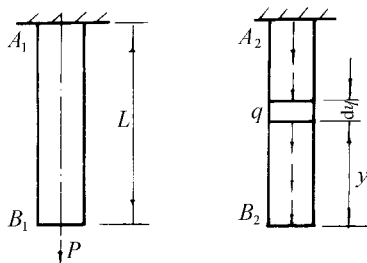
解: (1) 对于 AB 杆

$$\sigma = \frac{P}{A} \frac{x}{L}$$

(2) 对于 AC 杆, 在沿杆长均匀分布的荷载作用下, 轴力 N 沿杆长变化, 则在横截面上轴力 N 的增量为 $dN = -q \cdot dx$ 该处微段 dx

内积蓄的应变能 $dU = \frac{N \cdot dN}{EA}$, 故整个杆内的应变能为:

$$U = \int_0^L \frac{N \cdot dN}{EA} = \int_0^L \frac{P \cdot (-q \cdot dx)}{EA} = -\frac{Pq}{EA} \int_0^L dx = -\frac{PqL}{EA}$$



题 1 图

显然 $U_{AC} < U_{AB}$

例 2 一根承受轴向拉力的钢筋, 原设计采用的材料为 I 级钢筋, 其直径 $d = 20$ mm。今因仓库里缺该种材料, 拟改用 II 级钢筋的钢筋。库存 II 级钢筋的直径计有 $d_1 = 18$ mm, $d_2 = 22$ mm, $d_3 = 25$ mm 可供选择。已知 I 级钢筋的屈服极限 $\sigma_{s1} = 235$ MPa, II 级钢筋的屈服极限 $\sigma_{s2} = 335$ MPa。在安全系数相同的要求下, 试选择 II 级钢筋钢筋的合适直径。

解: 原采用的 I 级钢筋的流动荷载 P_s 为

$$P_s = \sigma_{s1} \cdot A_1 = 235 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 20^2$$

当采用 II 级钢筋替换时, 在安全系数相同的前提下, 流动荷载应相同, 于是有:

$$P_s = \sigma_{s2} \cdot A_2 = 335 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

$$d = \sqrt{\frac{235}{335} \cdot 20^2} = 17.8 \text{ mm}$$

亦选 $d = 18$ mm

故选取直径为 18 mm 的 II 级钢筋。

例 3 一桁架受力如图所示。各杆都由两个等边角钢组成。已知材料的许用应力 $[\sigma] = 160$ MPa。试选择 AC 杆和 BC 杆的截面型号。

解: (1) 此结构为对称结构, 所以

