

新世纪高校机械工程规划教材

# 工 程 力 学

主 编 许英姿 张培国

副主编 杨道斋

参 编 高惠瑛 李春风

主 审 张维国



机 械 工 业 出 版 社

本书是新世纪高校机械工程规划教材之一。

本书为《工程力学 》, 和《工程力学 》为一配套教材, 要学习《工程力学 》, 必须先学习《工程力学 》。《工程力学 》内容包括运动学基础、点的合成运动、刚体的平面运动、刚体动力学普遍定理、动载荷、简单超静定问题, 带“\*”号者为选学内容。各章均附有思考题、习题, 书末还附有习题答案。

本书可供高等工科院校机械类专科学生使用, 也可供非机械类的本科、专科学生使用, 还可供有关工程技术人员参考。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

工程力学 . / 许英姿, 张培国主编 .—北京: 机械工业出版社, 2003.6

新世纪高校机械工程规划教材

ISBN 7-111-12032-9

. 工 ... . 许 ... 张 ... . 工程力学- 高等学校- 教材 .TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 034292 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 高文龙 王世刚

责任编辑: 宋学敏 版式设计: 霍永明 责任校对: 李秋荣

封面设计: 姚 毅 责任印制: 路 琳

北京机工印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行

2003 年 6 月第 1 版 · 第 1 次印刷

1000mm× 1400mm B5 · 3.75 印张 · 145 千字

定价: 10.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

本社购书热线电话(010) 68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

# 新世纪高校机械工程规划教材编审委员会

顾 问: 艾兴(院士)

领导小组: 张 慧 高振东 梁景凯 高文龙  
赵永瑞 赵玉刚

委 会: 张 慧 张进生 宋世军 沈敏德  
赵永瑞 程居山 赵玉刚 齐明传  
高振东 王守成 姜培刚 梅 宁  
昃向博 梁景凯 方世杰 高文龙  
王世刚 尚书旗 姜军生 刘镇昌

# 前 言

本书是为适应当前教学改革的总体要求而编写的。在编写过程中力求增强改革和创新意识,旨在将教材建设与教学改革结合起来。具体体现在如下几个方面:

1) 在体系的编排上,对传统的《理论力学》体系作了适当的调整,运动学部分以点的合成运动和刚体的平面运动为重点,将点的运动和刚体的简单运动作为一章来研究;动力学部分将动力学三大定理浓缩为一章来研究。

2) 在内容的处理上强调基础、加强应用、注重物理概念、理论推导严谨明了。

本书为《工程力学 》,和《工程力学 》为一配套教材,适用课时数为 30 ~ 40 课时。

参加本书编写的有山东理工大学许英姿(第十三章),青岛大学张培国(第十一章),青岛大学杨道斋(第九、十章),中国海洋大学高惠瑛(第十二章),渤海船舶技术学院李春风(第十四章)。全书由许英姿负责统稿;由青岛大学张维国教授主审,他对本书提出了许多宝贵的意见,在此致以衷心的感谢。

由于作者水平有限,书中难免会有错误和不妥之处,敬请给予批评指正,不胜感谢。

编 者

# 目 录

## 前言

第九章 运动学基础 .....	1
第一节 点的运动 .....	1
第二节 刚体的基本运动 .....	5
思考题 .....	10
习题 .....	10
第十章 点的合成运动 .....	12
第一节 点的合成运动的基本概念 .....	12
第二节 点的速度合成定理 .....	13
第三节 牵连运动为平动时点的加速度合成定理 .....	16
* 第四节 牵连运动为转动时点的加速度合成定理 .....	19
思考题 .....	22
习题 .....	23
第十一章 刚体的平面运动 .....	27
第一节 平面运动的运动方程 .....	27
第二节 平面图形内各点的速度 .....	2
第三节 平面图形内各点的加速度 .....	33
思考题 .....	37
习题 .....	38
第十二章 刚体动力学普遍定理 .....	42
第一节 动力学基本量的计算 .....	42
第二节 动量定理 .....	50
第三节 动量矩定理 .....	54
第四节 动能定理 .....	60
思考题 .....	66
习题 .....	66
第十三章 动载荷 .....	72
第一节 惯性力和动静法 .....	72
第二节 动静法求动应力 .....	74
第三节 能量法求冲击问题的动应力 .....	77
第四节 交变应力简介 .....	80
思考题 .....	87

习题 .....	87
<b>第十四章 简单超静定问题</b> .....	<b>90</b>
第一节 超静定问题的概念和解法 .....	90
第二节 拉压和扭转超静定问题 .....	90
第三节 装配应力与温度应力 .....	96
第四节 弯曲超静定问题 .....	99
思考题 .....	103
习题 .....	104
<b>附录</b> .....	<b>107</b>
附录 A 简单载荷作用下梁的变形 .....	107
附录 B 习题答案 .....	109
<b>参考文献</b> .....	<b>114</b>

## 第九章 运动学基础

运动学研究物体的空间位置随时间变化的规律，而不考虑引起运动变化的原因。要确定一个物体在空间的位置，只有选定另一个物体作为参考体。如果将以一组坐标系固连在参考体上，则该坐标系称为参考系。工程实践中，一般选择与地面相固连的坐标系为参考系。

运动学的主要研究对象为点和刚体，这里的点是指不计形状、大小、质量，但在空间占有确定位置的几何点；而刚体可看作是由无数个点组成的、在力的作用下不变形的系统。

### 第一节 点的运动

以数学形式表示的点在空间的位置随时间变化的规律，称为点的运动方程。要建立点的运动方程，常见的有三种方法，其中矢量法和直角坐标法已在《高等数学》和《普通物理学》中作过介绍。下面除了复习以上两种方法外，还将介绍一种新的方法——自然法。

#### 一、矢量法

设动点  $M$  在空间作曲线运动，如图 9-1 所示，任选一固定点  $O$  作为参考点，则点  $M$  到点  $O$  的矢径  $r = \overline{OM}$  唯一地确定。

点  $M$  运动时，矢径  $r$  的大小和方向随时间  $t$  而变化，是时间  $t$  的单值连续函数，即

$$r = r(t) \quad (9-1)$$

上式就是点的矢量形式的运动方程。

根据速度的定义，点的速度等于矢径对时间的变化率，即

$$v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r}{t} = \frac{dr}{dt} \quad (9-2)$$

类似的，点的加速度为位置矢量的二阶导数，即

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \quad (9-3)$$

#### 二、直角坐标法

设动点  $M$  在空间运动，通过固定点  $O$  建立一直角坐标系  $Oxyz$ ，如图 9-2 所

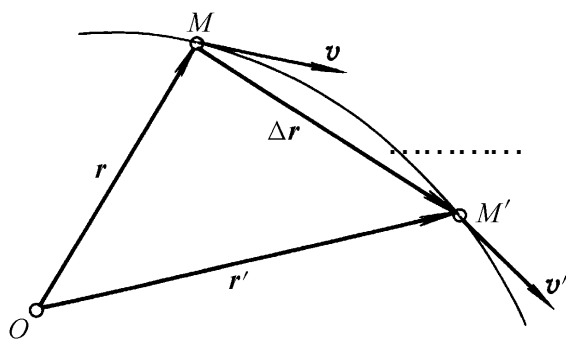


图 9-1 点的矢量形式

示, 则点 M 在任一瞬间的位置可以用它的坐标  $(x, y, z)$  唯一地确定。点 M 运动时, 其坐标值  $x, y, z$  都随时间  $t$  而变化, 是时间  $t$  的单值连续函数, 即

$$\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned} \quad (9-4)$$

这就是点的直角坐标形式的运动方程

由图 9-2 知, 点 M 的矢径可表示为

$$r = xi + yj + zk$$

再利用式 (9-2) 及式 (9-3), 可得动点 M 的直角坐标形式的速度和加速度

$$v = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k \quad (9-5)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}i + \frac{d^2y}{dt^2}j + \frac{d^2z}{dt^2}k \quad (9-6)$$

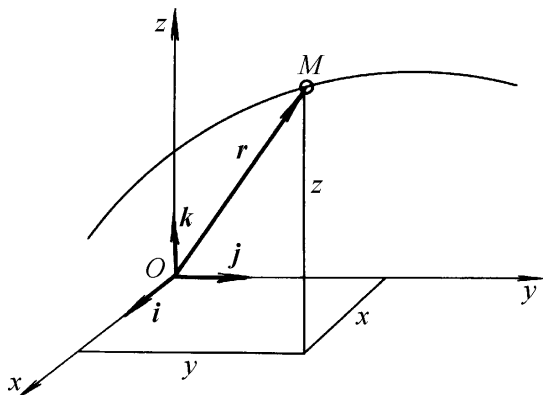


图 9-2 点的直角坐标系

### 三、自然法

在点的运动中, 如果点的运动轨迹已知, 则它的位置可由轨迹上某一点到这一位置的轨迹弧长来确定。这种以点的轨迹作为曲线坐标来确定点的位置的方法称为自然法。

设点的轨迹已知, 在轨迹上任选一点 O 为原点, 并沿轨迹规定正负方向, 如图 9-3 所示, 则点在任一瞬时  $t$  的位置 M 可由具有正负号的弧长  $s$  来确定。s 称为弧坐标, 它是时间  $t$  的单值连续函数

$$s = f(t) \quad (9-7)$$

上式称为点的自然形式 (或称弧坐标形式) 的运动方程。

用自然法描述点的运动时, 速度和加速度的表示与轨迹曲线的几何性质有密切的关系。为此, 先将关于空间曲线的某些几何性质介绍如下:

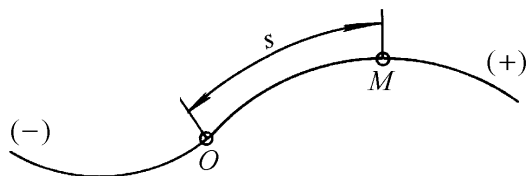


图 9-3 自然法

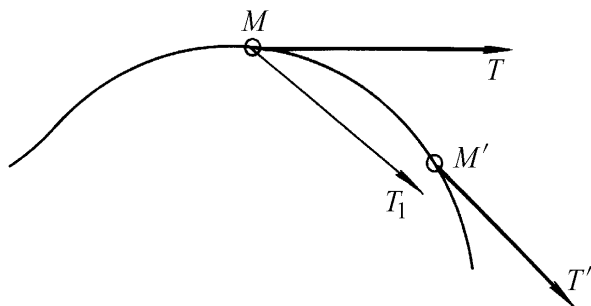


图 9-4 密切面

#### 1. 密切面

设有一空间曲线, 如图 9-4 所示。在曲线上点 M 的邻近处取点 M', 曲线在点 M 和点 M' 的切线分别用 MT 和 M'T' 表示。现过点 M 作一直线 MT<sub>1</sub> 平行于切线

MT，则两相交线 MT 和 MT<sub>1</sub> 决定一个平面。当点 M 向点 M 移动时，该平面将随着 MT 的变化而变化，并绕着切线 MT 转动。当点 M 无限趋近点 M 时，该平面将趋向一极限位置，这个极限位置处的平面称为曲线在点 M 的密切面。

### 2. 自然轴系

在空间曲线上的任一点 M 可以作一切线 MT，通过切线 MT 作空间曲线在该点的密切面，如图 9-5 所示。通过点 M 作一垂直于切线的平面，称为曲线在点 M 的法平面。密切面与法平面 N 的交线 MN，称为曲线在点 M 的主法线。再过点 M 在法平面内作一垂直于密切面的直线 MB，称之为空间曲线在点 M 的副法线（又称次法线）。曲线在点 M 的切线、主法线、副法线组成一正交轴系，称为曲线的自然轴系。

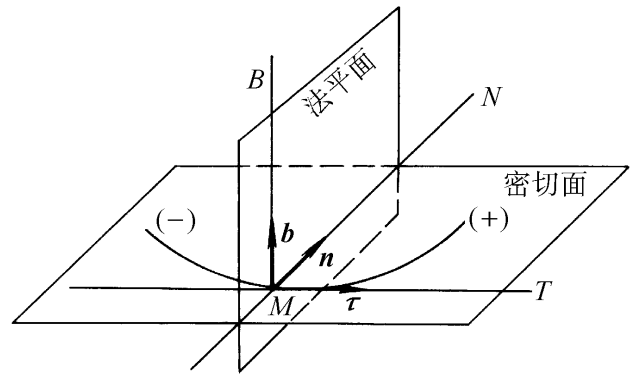


图 9-5 自然轴系

下面规定各轴的正方向，并用三个单位矢量表示自然轴系：

- 1) 切线单位矢量 沿切线 MT，并指向弧坐标的正方向。
- 2) 主法线单位矢量 n 沿主法线 MN，指向曲线在该点处的曲率中心。
- 3) 次法线单位矢量 b 的方向按右手法则确定，即

$$b = \tau \times n$$

需要指出的是，自然轴系与固定的坐标轴系不同，它是随动点在轨迹曲线上的位置而变化的，因此，单位矢量  $\tau$ 、n、b 是方向随动点的位置而变化的变矢量。

下面再介绍用自然法表示的点的速度和加速度。

设已知动点 M 的运动轨迹，如图 9-6 所示，其运动方程由式 (9-7) 表示。在瞬时 t，点的位置在 M，其弧坐标为 s，对在空间中任选的固定点 O 的矢径为 r；在瞬时 t + Δt，点的位置在 M'，其弧线坐标为 s + Δs，对 O 的矢径为 r'，根据用矢量法推导的点的速度公式 (9-2) 得

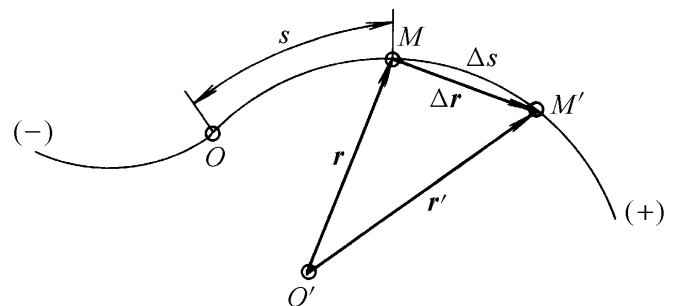


图 9-6 自然法表示点的速度和加速度

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt}$$

可以证明

$$\frac{dr}{ds} =$$

故 
$$v = \frac{ds}{dt} = s = v \quad (9-8)$$

上式表明:点的速度沿轨迹的切线方向。式中的  $v$  可理解为速度  $v$  在切线方向的投影。

同样,根据加速度的定义,得

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v) = \frac{dv}{dt} + v \frac{d}{dt} \quad (9-9)$$

可以证明 
$$\frac{d}{dt} = \frac{s}{n}$$

式(9-9)右端中的第一项表示速度方向不变,仅由于速度大小变化引起的速度变化率。它是加速度沿切线方向的一个分量,称为切向加速度  $a$ ,  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ 。

式(9-9)右端中的第二项表示速度大小不变,仅由于速度方向改变所引起的速度变化率,它是加速度沿法线方向的一个分量,称为法向加速度  $a_n$ ,  $a_n = \frac{v^2}{n} = \frac{s^2}{n}$ 。

概括起来,点的加速度在其曲线自然轴系中的表示式为

$$a = a + a_n = s + \frac{s^2}{n} \quad (9-10)$$

如果点的切向加速度的代数值保持不变,即  $a = v = s = \text{常数}$ ,则点的运动称为曲线匀变速运动。将此式在初始条件下( $t=0$ 时,  $v = v_0, s = s_0$ )积分,即可得到其运动学关系式

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a t \\ s &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v^2 - v_0^2 &= 2a (s - s_0) \end{aligned} \quad (9-11)$$

例 9-1 设动点  $M$  沿螺旋线  $x = 2\sin 4t, y = 2\cos 4t, z = 4t$  运动。试求在任一瞬时的速度、加速度的大小及轨迹的曲率半径。(  $x, y, z$  的单位为  $m$ , 时间  $t$  的单位为  $s$ 。)

解 已知动点  $M$  的直角坐标形式运动方程,可求出点  $M$  的速度在各坐标轴上的投影为

$$\begin{aligned} x &= 8\cos 4t \\ y &= -8\sin 4t \\ z &= 4 \end{aligned}$$

点  $M$  的速度大小为

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{(8\cos 4t)^2 + (-8\sin 4t)^2 + 4^2} \text{ m/s} \\ &= 4\sqrt{5} \text{ m/s} \end{aligned}$$

点 M 的加速度在各坐标轴上的投影为

$$x = -32\sin 4t$$

$$y = -32\cos 4t$$

$$z = 0$$

点 M 的加速度的大小为

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{(-32\sin 4t)^2 + (-32\cos 4t)^2} \text{ m/s}^2 \\ &= 32 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

又因为

$$a = \frac{dv}{dt} = 0$$

则有

$$a_n = a = 32 \text{ m/s}^2$$

所以

$$= \frac{v^2}{a_n} = \frac{(4\sqrt{5})^2}{32} \text{ m} = 2.5 \text{ m}$$

## 第二节 刚体的基本运动

刚体的基本运动,按其特征可分为平行移动(平动)、定轴转动、平面平行运动(平面运动)及定点转动和一般运动。本节简要讲述刚体的两种基本运动,即平动和定轴转动。刚体的其他运动,则可看作是这两种基本运动以不同形式的合成。

### 一、刚体的平行移动

刚体在运动过程中,如果其体内任一直线始终保持与初始位置平行,这种运动就称为平行移动,简称平动或移动。例如在直道上行驶的汽车的运动,电梯的运动,刨床滑枕的运动,振动筛筛体的运动。刚体平动时,若其上各点的轨迹为直线,称为直线平动,如图 9-7 所示沿直线轨道行驶的汽车的运动;若其上各点的轨迹为曲线,则称为曲线平动,如图 9-8 所示平板的运动。

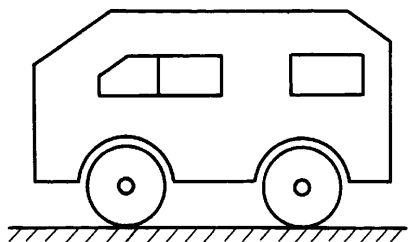


图 9-7 直线平动

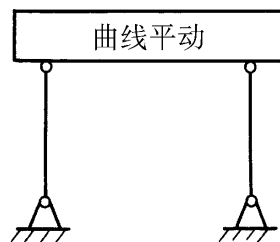


图 9-8 曲线平动

下面研究刚体作平动时,其上各点的轨迹、速度和加速度之间的关系。

在作平动的刚体上任选两点 A、B,设其矢径分别为  $\mathbf{r}_A$ 、 $\mathbf{r}_B$ ,如图 9-9 所示。矢径  $\mathbf{r}_A$ 、 $\mathbf{r}_B$  和矢量  $\mathbf{r}_{AB}$  的关系为

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB} \quad (9-12a)$$

因为刚体作平动, 矢径  $r_{AB}$  为常矢量, 故点 A 的轨迹沿  $r_{AB}$  方向平移一段距离, 就能与点 B 的轨迹重合。

将式(9-12a)对时间  $t$  求一次导数, 并考虑到  $\frac{dr_{AB}}{dt} = 0$ , 得

$$v_B = v_A \quad (9-12b)$$

再对时间  $t$  求一次导数, 即得

$$a_A = a_B \quad (9-12c)$$

由于 A、B 是在刚体上任意选取的两点, 所以由以上分析可知: 刚体平动时, 其上各点的轨迹形状完全相同, 且在同一瞬时, 其上各点具有相同的速度和加速度。

由于平动刚体上各点的运动相同, 只要知道刚体上任一点的运动就能知道整个刚体的运动, 因此刚体平动的问题可以归结为点的运动问题来研究。

### 二、刚体的定轴转动

刚体运动时, 若其体内或其延拓部分有两点始终保持不动, 这种运动就称为定轴转动, 简称转动。过这两点的固定直线称为转轴。定轴转动是工程中常见的一种刚体运动, 例如, 安置在固定基础上的发电机的转子、电动机的输出轴等的运动都是定轴转动。

设有一刚体绕定轴  $z$  转动, 现先选一通过转轴  $z$  并与地面参考系相固连的固定平面 I, 再选一通过转轴并与转动刚体相固连的平面 II, 如图 9-10 所示, 因刚体上各点相对平面 II 的位置是一定的, 所以只要知道平面 II 的位置就能确定刚体上各点的位置。于是, 刚体的位置可由平面 I 与平面 II 间的夹角  $\varphi$  来确定。刚体转动时,  $\varphi$  随时间  $t$  变化, 是时间  $t$  的单值连续函数, 可用一数学式表示为

$$\varphi = \varphi(t) \quad (9-13)$$

上式称为刚体定轴转动的运动方程。  $\varphi$  的单位为 rad, 其正负符号通常规定如下: 从  $z$  轴的正向看, 沿逆时针方向量取为正值; 反之为负值。

刚体作定轴转动的运动方程与点作直线运动方程  $x = x(t)$  完全相似。设由瞬时  $t$  到瞬时  $t + \Delta t$ , 位置由  $\varphi$  增加到  $\varphi + \Delta\varphi$ , 增量  $\Delta\varphi$  称为角位移。下面引出角速度来度量刚体转动的快慢和转向。比值  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$  称为在  $\Delta t$  时间内刚体转动的平均角

速度。当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,  $\frac{d\varphi}{dt}$  的极限称刚体在瞬时  $t$  的角速度, 用  $\omega$  表示。

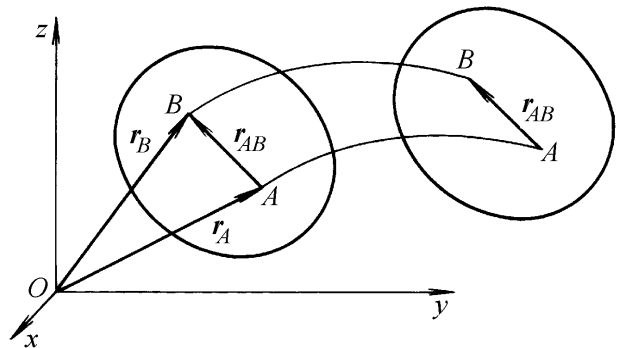


图 9-9 平动刚体

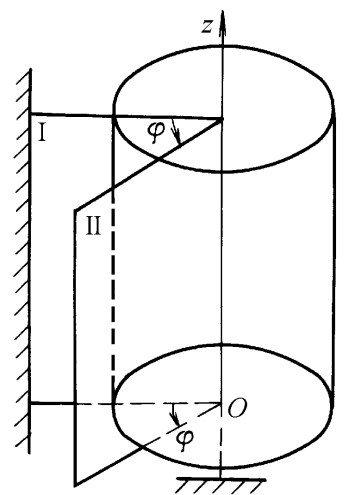


图 9-10 定轴转动

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \quad (9-14)$$

角速度的单位是 rad/s。在工程上常用每分钟内的转数  $n(r/min)$  表示刚体转动的快慢。角速度  $\omega$  与转速  $n$  之间的关系为

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \quad (9-15)$$

同样地,可以引出角加速度的概念,用  $\alpha$  表示角加速度

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \quad (9-16)$$

当  $\alpha$  为正时,角速度  $\omega$  的代数值随时间增大,反之减小。若  $\alpha$  与  $\omega$  符号相同,刚体作加速转动;若相反,刚体作减速转动。角加速度的单位是  $rad/s^2$ 。

对于匀变速转动,  $\alpha = \text{常量}$ , 则有

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \end{aligned} \quad (9-17)$$

式中  $\omega_0, \theta_0$ ——分别是  $t=0$  时的角速度和转角。

下面讨论转动刚体内各点的速度和加速度。

在转动刚体内任取一点  $M$ , 它到转轴的距离为  $R$ , 它的运动轨迹即为半径为  $R$  的圆,如图 9-11 所示。取此圆与固定平面  $Ox$  的交点为弧坐标原点,则点  $M$  的运动方程为

$$s = R\theta$$

任一瞬时,点  $M$  的速度  $v$  的大小为

$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega \quad (9-18)$$

其方向沿轨迹的切线,即垂直于半径  $OM$ , 指向与  $\omega$  转向一致。

任一瞬时,点  $M$  的切向加速度  $a_\tau$  的大小为

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha \quad (9-19)$$

其方向也沿轨迹的切线,指向与  $\alpha$  的转向一致。

点  $M$  的法向加速度  $a_n$  的大小为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \quad (9-20)$$

其方向指向圆心  $O$ 。

点  $M$  的全加速度  $a$  的大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = R \sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \quad (9-21)$$

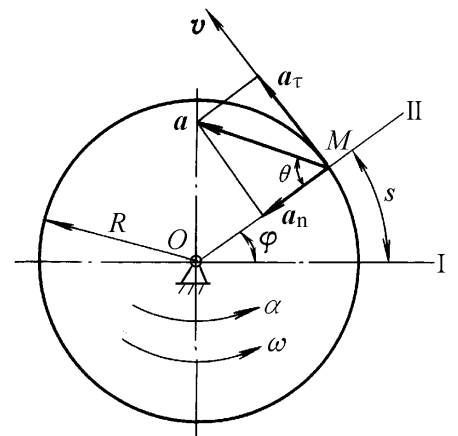


图 9-11 转动刚体的速度和加速度

其方向由加速度  $a$  与  $OM$  的夹角 确定, 其中

$$\tan \alpha = \frac{a_t}{a_n} = \frac{v \omega}{v^2} \quad (9-22)$$

由于点  $M$  是在刚体上任意选取的, 根据式(9-18)及式(9-21)可知: 在任一瞬时, 刚体内各点的速度和加速度的大小与各点到转轴的距离成正比。

例 9-2 图 9-12 所示搅拌机的主动轮 同时带动齿轮 、 转动, 搅杆  $BAC$  用销钉  $A$ 、 $B$  与齿轮 、 连接。设主动轮的转速  $n = 950 \text{r/min}$ ,  $AB = O_2O_3$ ,  $O_2A = O_3B = 25 \text{cm}$ , 各轮的齿数分别为  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = z_3 = 50$ 。试求搅杆上点  $C$  的运动轨迹和速度大小。

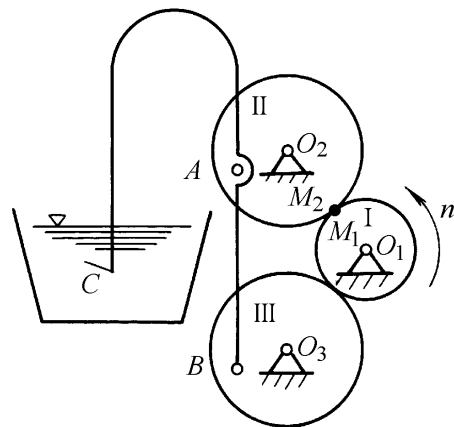


图 9-12 例 9-2 图

解 据题意,  $AB = O_2O_3$ ,  $O_2A = O_3B$ , 这说明:  $AB$  与  $O_2O_3$  相平行, 搅杆  $BAC$  在工作过程中将始终与其初始位置平行, 其运动为平动。因此搅杆上点  $C$  的轨迹和速度应与点  $A$  的相同。点  $A$  的轨迹是一半径为  $25 \text{cm}$  的圆。

齿轮 、 分别绕定轴转动, 假设其半径分别为  $R_1$ 、 $R_2$ , 角速度分别为  $\omega_1$ 、 $\omega_2$ ,  $M_1$ 、 $M_2$  分别是两个齿轮啮合圆的接触点, 因两圆之间没有相对滑动, 所以它们的速度必定相同, 即

$$v_{M1} = v_{M2}$$

由于

$$v_{M1} = \omega_1 R_1, \quad v_{M2} = \omega_2 R_2$$

因此

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \quad \text{或} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

由于齿轮在啮合圆上的齿距相等, 它们的齿数与半径成正比, 故

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (9-23)$$

这说明: 两个啮合的定轴转动齿轮的角速度与两齿轮的齿数成反比(或与两轮的啮合圆半径成反比)。这一结论也适用于圆锥齿轮、带轮、链轮以及摩擦轮的传动中。

在机械传动中, 常把主动轮和从动轮的角速度的比值称为传动比, 记为  $i_{12}$ , 即

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (9-24)$$

将式(9-15)及式(9-23)代入上式, 得

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (9-25)$$

根据上式可得点  $A$  的速度大小为

$$v_A = O_2A \omega_2 = O_2A \frac{z_1}{z_2} \omega_1 = O_2A \frac{z_1}{z_2} \frac{n}{30} = 9.95 \text{m/s}$$

故点 C 的速度大小为  $v_C = 9.95\text{m/s}$ , 轨迹为半径  $25\text{cm}$  的圆。

例 9-3 圆轮绕定点 O 转动, 并在此轮缘上绕一柔软而不可伸长的绳子, 绳子下端悬一物体 A。设该轮半径  $R = 0.2\text{m}$ , 其转动方程为  $\theta = -t^2 + 4t$ , 的单位为  $\text{rad}$ , 时间  $t$  的单位为  $\text{s}$ 。求当  $t = 1\text{s}$  时, 轮缘上任一点 M 的速度和加速度及物体 A 的速度和加速度。

解 由转动方程求出圆轮在任一瞬时的角速度和角加速度

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d\theta}{dt} = -2t + 4 \\ \alpha &= \frac{d\omega}{dt} = -2 \end{aligned}$$

当  $t = 1\text{s}$  时, 则有

$$\begin{aligned} \omega &= (-2 \times 1 + 4)\text{rad/s} = 2\text{rad/s} \\ \alpha &= -2\text{rad/s}^2 \end{aligned}$$

因此轮缘上任一点 M 的速度和加速度为

$$\begin{aligned} v &= R\omega = 0.2\text{m} \times 2\text{rad/s} = 0.4\text{m/s} \\ a_t &= R\alpha = 0.2\text{m} \times (-2)\text{rad/s}^2 = -0.4\text{m/s}^2 \\ a_n &= R\omega^2 = 0.2\text{m} \times (2\text{rad/s})^2 = 0.8\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

它们的方向如图 9-13 所示。

M 点的全加速度及其偏角为

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(-0.4\text{m/s}^2)^2 + (0.8\text{m/s}^2)^2} = 0.894\text{m/s}^2 \\ \theta &= \arctan \frac{|a_t|}{|a_n|} = \arctan \frac{0.4}{0.8} = 26.34^\circ \end{aligned}$$

因为  $a_t$  与  $\omega$  的正负号相反, 于是  $v$  与  $a_t$  的指向也相反, 圆轮此时作匀减速运动, 故知: 全加速度  $a$  偏向与圆轮转向相反的一边。

现在求物体 A 的速度和加速度。因为绳子不可伸长, 故知物体 A 沿铅垂线移动的距离  $s_A$  与点 M 在同一时间内所走过的弧长  $s_M$  相等, 且方向一致, 即  $s_A(t) = s_M(t)$ , 此式两边对时间求一阶和二阶导数, 得

$$v_A = v_M$$

$$a_A = a_M$$

这就是说, 物体 A 的速度和加速度的代数值与轮缘上点 M 的速度和切向加速度的代数值分别相等, 因此

$$\begin{aligned} v_A &= 0.4\text{m/s} \\ a_A &= -0.4\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

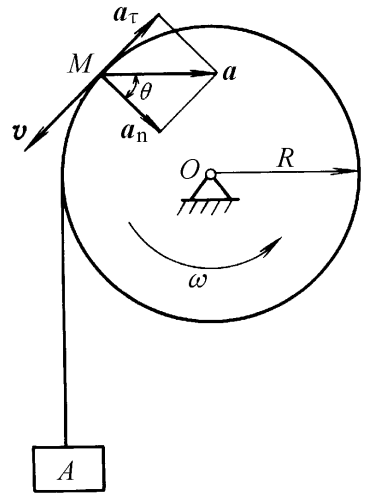


图 9-13 例 9-3 图

这表明物体 A 的速度方向是向下的, 而加速度的方向是向上的。

## 思 考 题

- 9-1  $\frac{dr}{dt}$  和  $\frac{dr}{dt}$ 、 $\frac{dv}{dt}$  和  $\frac{dv}{dt}$  有何不同?
- 9-2 刚体作平动时, 其上的某一点 M 的轨迹是否一定在一个平面内?
- 9-3 定轴转动刚体上哪些点的加速度: 大小相等; 方向相同; 大小相等, 方向也相同?
- 9-4 钻头钻孔时, 它的运动是不是定轴转动? 为什么?
- 9-5 在直线轨道上行驶的火车, 其车轮是否作定轴转动?
- 9-6 如果刚体上每一点的轨迹都是圆, 这刚体是否一定作定轴转动? 为什么?
- 9-7 有人说:“刚体绕定轴转动时, 角加速度为正, 表示加速转动, 角加速度为负, 表示减速运动。”这种说法正确吗?

## 习 题

9-1 机车以等速  $v_0 = 20\text{m/s}$  沿直线轨道行驶, 机车车轮的半径为  $1\text{m}$ 。设车轮只滚动而不滑动, 将轮缘上的点 M 在轨道上起始位置取为坐标原点, 并沿轨道取  $x$  轴。求点 M 的运动方程和加速度。

9-2 如图 9-14 所示, 摇杆机构的滑杆 AB 以等速  $u$  向上运动, 试分别用直角坐标法和自然法建立摇杆上点 C 的运动方程, 并求此点在  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  时的速度。假定初瞬时  $\varphi = 0$ , 摇杆长  $OC = a$ ,  $OD = L$ 。

9-3 半径为  $R = 0.5\text{m}$  的飞轮以等加速度由静止开始转动, 经过  $10\text{s}$  后轮缘上各点获得速度  $v = 100\text{m/s}$ 。求当  $t = 15\text{s}$  时, 轮缘上一点的速度、切向加速度和法向加速度的大小。

9-4 如图 9-15 所示, 动点在半径  $R = 1\text{m}$  的圆周上按  $v = 20 - Ct$  的规律运动, 其中  $v$  以  $\text{m/s}$  计, 时间  $t$  以  $\text{s}$  计,  $C$  为待定常数。设动点经过 A、B 两点时的速度分别为  $v_A = 10\text{m/s}$ ,  $v_B = 5\text{m/s}$ , A、B 两点的位置如图所示。试求动点由点 A 经过点 B 所需时间以及到达点 B 时的加速度。

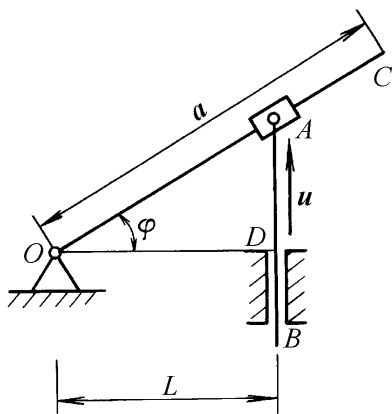


图 9-14 题 9-2 图

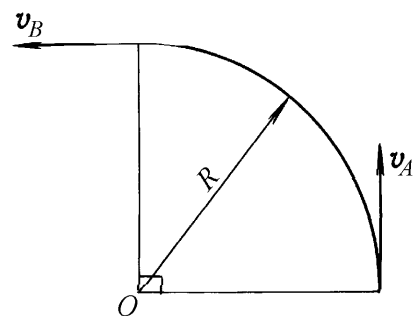


图 9-15 题 9-4 图

9-5 如图 9-16 所示, 小环 M 在铅垂面内沿半径为  $R$  的半圆形曲杆 ABCD 从点 A 由静止开始运动。已知在小环的运动过程中其切向加速度  $a = b \cos \theta$ ,  $b$  为常数。试求小环在点 B、点 C

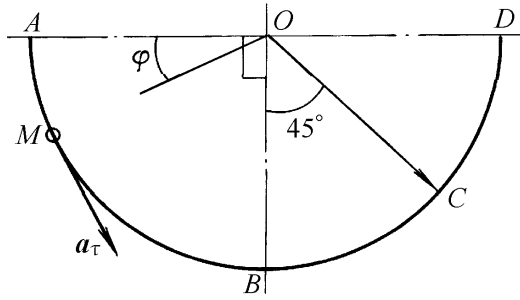


图 9-16 题 9-5 图

两处的速度和加速度。

9-6 一点在  $Oxy$  平面内以等加速度  $a$  运动。已知  $a = 2\text{m/s}^2$ , 方向平行于  $Ox$  轴。试求当  $t = 1\text{s}$  时, 该点轨迹的曲率半径。假设在初瞬时点的速度  $v_0 = 2\text{m/s}$ , 方向与  $Oy$  轴之间的夹角  $\theta = 30^\circ$ 。

9-7 直角三角形板  $ABM$  由  $A'A$  杆带动在铅垂平面内运动。已知  $A'A$  杆和  $B'B$  杆的长度都等于  $l$ , 且有  $AB = A'B$ , 如图 9-17 所示。设图示瞬时  $A'A$  杆的角速度为  $\omega$ , 且角加速度  $\alpha = 2\text{rad/s}^2$ , 试求板上点  $M$  的速度和加速度, 并在图上画出它们的方向。

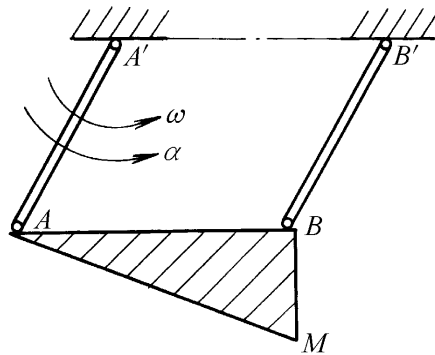


图 9-17 题 9-7 图

9-8 如图 9-18 所示,  $AB = O_1O_2$ , 曲柄  $O_1A$  和  $O_2B$  的长度均等于  $2r$ , 且均以匀角速度  $\omega_0$  分别绕  $O_1$  和  $O_2$  轴转动。固连于连杆  $AB$  上的齿轮 I 带动齿轮 II 绕轴  $O$  转动, 两轮半径均为  $r$ 。求轮 I 和轮 II 轮缘上任一点的法向加速度。

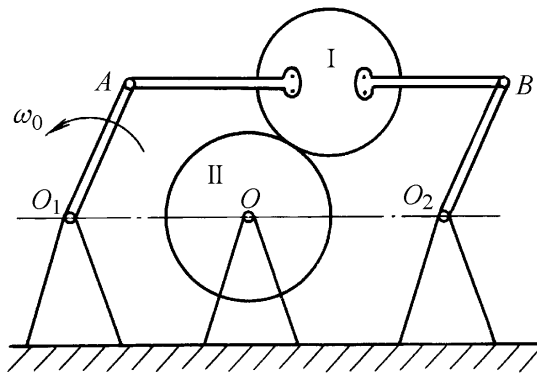


图 9-18 题 9-8 图