普通高等工科教育规划教材

工 程 力 学 Ⅱ

通 用 部 分

哈尔滨工业大学国家工科力学基地　组编

主　编　程　靳
参　编　程燕平　李　涛
　　　　毕贤顺　王　刚

机 械 工 业 出 版 社

本书内容包括原国家教委颁布的高等工科院校理论力学及材料力学基本要求的内容。为满足21世纪教学改革的需要，本书引入了笛卡尔张量、连续介质力学基本理论及流体力学基础以及几种大型力学通用程序的介绍。增添这些内容的目的是使工科大学生对力学的基本概念、基础理论及力学中的物理量有更深入的理解，并能正确使用几种大型力学通用程序。

本书共三册，第Ⅰ册为基础部分，包括刚体静力学（原理论力学的静力学）及变形体静力学（原材料力学中杆、轴、梁等内容），适用于少学时类专业。第Ⅱ册为通用部分，含运动学、动力学、连续介质力学及组合变形等，适用于中学时类专业。第Ⅲ册为专题部分，含原理论力学、材料力学的专题及力学通用程序介绍，适用于多学时类专业。

本书可作为高等工科院校各专业理论力学、材料力学（统称工程力学）课程的教材，可作为夜大、电大、函授大学相应专业的自学和函授教材，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

工程力学．Ⅱ．通用部分/程靳主编．—北京：机械工业出版社，2002.7

普通高等工科教育规划教材

ISBN 7-111-09997-4

Ⅰ.工…　Ⅱ.程…　Ⅲ.工程力学—高等学校—教材　Ⅳ.TB12

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第048762号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
责任编辑：季顺利　版式设计：张世琴　责任校对：李秋荣
封面设计：姚　毅　责任印制：路　琳
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2002年8月第1版·第1次印刷
1000mm×1400mm B5·11.125印张·423千字
0 001—4 000册
定价：25.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、68326677-2527

序

高等学校工科（这里“工科”特指机械、建筑、交通、航空航天等类型专业）的力学课程在传统上由“理论力学”及“材料力学”组成。然而高等学校工科力学课程究竟应包含哪些内容，多年来一直是教育界和力学界讨论的话题之一。应该说，力学课程的内容是随着时间、时代而改变的。由于科学技术的不断发展，力学课程的内容也应不断变化。

在20世纪70年代之前，由于计算机很少，在力学计算上大量采用手算，当时设置的“理论力学”及“材料力学”课程内容适应并满足了当时的需要。比如压力机机身的刚度计算就简化为曲梁的计算，用材料力学方法就可解决。而现在由于计算机的大量采用，对这一问题可采用有限元法计算，或者使用通用程序。这表明，以前的力学课程强调手算（这部分内容一般要求学生熟练掌握，并占用大量学时）是适应当时的需要的，但不满足21世纪的需要。

在21世纪，高等工科院校学生掌握坚实而宽广的力学基础是最重要的。例如，大量构件的强度、刚度计算，机构的运动学、动力学分析等，虽然有多种大型通用程序，但在使用时必先将实际问题化为力学模型，而这一工作要求使用者有较强的力学基础。要善于进行受力分析及运动分析，要清楚地理解有限运动与无穷小变形之区别，要善于将实际材料化为某些理想材料的本构方程，要正确理解力学中的各类物理量，如应力张量、应变张量等。这其中许多内容属连续介质力学范畴，在过去的“理论力学”、“材料力学”中是欠缺的。

一些先进国家工科力学的内容与20世纪70年代前相比已经有很大的不同。其内容虽然包括我国现有“理论力学”、“材料力学”内容，但手算内容要求很浅（学生了解即可），甚至删去。大量增添了连续介质力学（含流体力学）内容，且较详细，这些内容是我国现有“理论力学”、“材料力学”中所没有的。多数力学课程中都包含笛卡尔张量（少数学校甚至讲述普遍张量），学生只有具备张量概念才能正确理解应力张量、应变张量等力学概念，这些都是使用通用程序时必须具备的知识，无法依靠计算机。

基于这些想法，我们编写了“工程力学”教材，以替代原有的“理论力学”、“材料力学”教材。

本书可供高等工科院校各类型专业作为力学教材（替代“理论力学”、“材料力学”）使用。

本书分第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ册出版。第Ⅰ册为基础部分，包括刚体静力学（原理论

力学的静力学）及变形体静力学（原材料力学的杆、轴、梁等基本内容），适用于少学时类专业，即第Ⅰ册相当于传统教材中少学时类使用的《工程力学》教材。第Ⅱ册为通用部分，包括运动学、动力学、连续介质力学（含笛卡尔张量及流体力学）及组合变形、强度理论等，适用于中学时类专业，即第Ⅱ册涵盖了近机类中学时专业使用的传统理论力学、材料力学教材内容。对于一般院校中学时类专业，仅使用第Ⅰ、Ⅱ两册即可。第Ⅲ册为专题部分，其内容包括原理论力学、材料力学的专题部分及若干大型力学通用程序介绍，适用于多学时类专业。带*的内容各专业可根据需要，选取其中的若干章、节讲授。为便于老师讲授本教材，我们编辑印刷了与本书配套的教学参考书，每个学校可免费提供2套。有需要者请向哈尔滨工业大学理论力学教研室函索。

本书由博士生导师程靳教授主编，参加编写的有程燕平（第一、二、三、四、十九、二十、二十一、二十二、二十三、二十四、二十八章），李涛（第五、六、七、八、九、二十五、二十六、二十七章），程靳（第十、十一、十二、十三、十四、二十九、三十、三十一、三十二、三十三章），毕贤顺（第十五、十六、十七、十八章），王刚（第三十四章），全书由程靳、程燕平统稿。

哈尔滨工程大学朱加铭教授审阅了书稿，并提出了许多宝贵意见，特此致谢。

本书是国内首次在高等工科院校基础力学课程中加入连续介质力学内容。由于我们水平和条件所限，一定有许多缺点和错误，衷心希望大家提出批评和指正。

编者

2002年4月

目　　录

第三篇 连续介质力学

引 言

物质由分子组成，分子由原子组成，物质是不连续的。连续介质模型不考虑微观上的不连续，认为物质是连续且无限可分的，物质的任何一个无限小的体积可以认为是一个质点，每个质点周围都有物质存在且与之连续。利用这种连续介质模型有利于使用各种数学工具，由此建立的大量理论和方程可以相当准确地反映物质宏观力学行为的规律。

连续介质力学描述物质宏观现象间的关系，而不考虑微观尺度上的物理结构。连续介质力学研究物质在各种载荷下的响应，它主要由两部分组成：

（1）各种物质都必须遵循的普遍原理，如物质运动时的几何关系（运动学关系）以及质量守恒、动量及动量矩守恒、能量守恒等等。

（2）物质的本构关系，即研究理想化物质与变形、载荷等有关的物理属性。一般用方程来描述这种关系，称之为本构方程。

任何物理定律，如果是正确的，那就必然是客观的，与观察者无关，即与坐标系（参照系）无关。只有张量方程能满足这一要求，因为用张量表达的方程与坐标系无关。因此为了描述连续介质力学的各种规律，应该使用张量来建立方程。

本书不使用一般的张量，因为一般的张量对于工科低年级学生来讲可能是稍难一些。本书引入了笛卡尔张量，并用之描述连续介质力学的各种方程。对于大学生，笛卡尔张量是很容易理解和接受的。

第十章　笛卡尔张量

由于连续介质力学的基本方程一般用张量来表达，因此本章是学习连续介质力学的重要数学基础。由于笛卡尔坐标系是很简单的坐标系，因此在这样坐标系中成立的张量——笛卡尔张量也是很简单的张量。笛卡尔张量的概念和理论是很容易接受的。

第一节　指 标 记 法

一、哑指标与自由指标

考察下式

$$S = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$$

式中的 $\sum\limits_{i=1}^{n}$ 在计算的结果中并不出现，它仅仅是表示求和。如果给出一个约定，就可以省去 $\sum\limits_{i=1}^{n}$，于是有著名的爱因斯坦（Einstein）求和约定：在一项里，凡重复一次的指标表示求和。

按这一约定，上式可写为

$$S = a_ix_i \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

在三维空间中，$i=1$，2，3，即

$$S = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

一般情况，经常在三维空间中使用张量，这时 $i=1$，2，3 可以省去不写，因此前式可写为

$$S = a_ix_i$$

可以看出求和指标与字母本身无关，上式中的 i 换成什么字母都可以，因此上式亦可写为

$$S = a_ix_i = a_jx_j = a_kx_k = \cdots$$

称上面的求和指标为哑指标。

求和约定当然也适用于二重求和、三重求和及多重求和。例如

$$A = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$$

可写为 $A=a_{ij}x_ix_j$，它展开后为 9 项

$$\begin{aligned} a_{ij}x_ix_j = {} & a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \\ & a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + a_{23}x_2x_3 + \\ & a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3x_3 \end{aligned}$$

考察方程组

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots \qquad \cdots \\ a_{n1} \cdots\cdots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

该方程组可以写为

$$y_i = a_{ij}x_j \qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

上式中的 i 在方程的每一项中只出现一次，称为自由指标。与哑指标类似，当 $i=1$，2，3 时可以省去不写。例如

$$y_i = a_{ij}x_j$$

代表如下线性方程组

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}\right\}$$

又如，$T_{ij}=A_{im}B_{jm}$ 代表

$$\left.\begin{aligned} T_{11} &= A_{1m}B_{1m} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + A_{13}B_{13} \\ T_{12} &= A_{1m}B_{2m} = A_{11}B_{21} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{23} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T_{33} &= A_{3m}B_{3m} = A_{31}B_{31} + A_{32}B_{32} + A_{33}B_{33} \end{aligned}\right\}$$

在使用指标记法时，应注意如下问题：

（1）哑指标与字母选择无关，但同一项中两对哑指标不能用同一字母。如 $A_{ij}x_ix_j$ 不能写为 $A_{kk}x_kx_k$。

（2）如下方程中，左列是错误的，右列是正确的。

$$\left.\begin{aligned} a_i + b_j &= c_i \\ A_{ij} &= B_{ik} \\ D_{ik} &= B_{ij}c_{jm} \\ a_i + b_jc_i &= d_i \end{aligned}\right\}\text{错} \qquad \left.\begin{aligned} a_i + b_i &= c_i \\ A_{ij} &= B_{ij} \\ D_{ik} &= B_{ij}c_{jk} \\ a_i + b_je_jc_i &= d_i \end{aligned}\right\}\text{正确}$$

（3）每一项中不能有三个及三个以上指标相同，如

$$A = a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_3$$

写为 $A=a_ib_ic_i$ 是错误的，无意义。这类求和应写为 $A=\sum_{i=1}^{3}A_ib_ic_i$，亦可采用如下

记法

$$A = a_i b_i c_{\underline{i}}$$

$\underline{i}$ 表示它不参与求和，只是在数值上等于 i。

(4) 指标记法中，只有自由指标和哑指标，且不可兼用，无其他指标。有些资料用

$$a_i = F_{ii}$$

这是错误记法，因为 F_{ii} 中的 i 是自由指标又是哑指标，这是不允许的。

(5) 一个自由指标代表三个方程，若有 n 个自由指标则表示有 3^n 个方程。

每对哑指标展开后为 3 项，若有 n 对哑指标，则展开后应为 3^n 项。

如：$a_{ijk}b_{ijk}$ 有 $3^3=27$ 项，$a_i b_j c_k d_m T_{ijkm}$ 展开后应有 $3^4=81$ 项。

(6) 两个指标的指标记法可表为矩阵，通常第一个指标代表行，第二个指标代表列。它们与矩阵有如下关系：

$$\begin{array}{ll}
D_{ji}=B_{ij} & [D] = [B]^{\mathrm{T}} \\
b_i=B_{ij}a_j & [b] = [B][a] \\
b_i=B_{ji}a_j & [b] = [B]^{\mathrm{T}}[a] \\
S=B_{ij}a_i a_j & [S] = [a]^{\mathrm{T}}[B][a] \\
D_{ij}=B_{ik}C_{kj} & [D] = [B][C] \\
D_{ij}=B_{ik}C_{jk} & [D] = [B][C]^{\mathrm{T}} \\
A_{ij}=Q_{im}Q_{jn}B_{mn} & [A] = [Q][B][Q]^{\mathrm{T}}
\end{array}$$

二、克罗奈克 (Kronecker) 符号

克罗奈克符号的定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i=j \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } i\neq j \text{ 时} \end{cases} \tag{10-1}$$

在张量计算中经常使用克罗奈克符号，它有如下性质

(1) $\delta_{ij}a_j=a_i$，$\delta_{ik}A_{ij}=A_{kj}$，$\delta_{ik}\delta_{kj}=\delta_{ij}$

(2) $\delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3$

$\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$，$a_{ij}\delta_{ij} = a_{ii}$

(3) $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}=\delta_{il}$

(4) 克罗奈克符号的矩阵为单位矩阵

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

克罗奈克符号有许多应用，如用它来进行因式分解：

$$a_{ij}x_j - \lambda x_i = a_{ij}x_j - \lambda\delta_{ij}x_j = (a_{ij} - \lambda\delta_{ij})x_j$$

记笛卡尔直角坐标系的基矢量（单位矢量）为 $\boldsymbol{e}_i$，则有

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{10-2}$$

设有两个矢量

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 = u_i\boldsymbol{e}_i$$

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3 = v_i\boldsymbol{e}_i$$

则它们的点积为

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_i\boldsymbol{e}_i \cdot v_j\boldsymbol{e}_j = u_iv_j\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = u_iv_j\delta_{ij} = u_iv_i$$

三、导数的简记法

求导数用“,”来表示，定义如下

$$\frac{\partial (\quad)}{\partial x_i} = (\qquad)_{,i} \tag{10-3}$$

式中（　　）代表任意函数，如

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi_{,i} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j} \qquad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = u_{i,jk}$$

采用这样的记号，与指标记法配合，可使很多方程表达起来很方便，如弹性力学的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\}$$

记 $x_1=x$，$x_2=y$，$x_3=z$，再利用哑指标，上式可写为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{1j,j} = 0 \\ \sigma_{2j,j} = 0 \\ \sigma_{3j,j} = 0 \end{aligned}\right\}$$

最后再利用自由指标，可最终写为

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

四、置换符号

置换符号用 e_{ijk} 表示，其定义为

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{当 } ijk \text{ 为循环排列(即 123、231、312)} \\ -1 & \text{当 } ijk \text{ 为逆循环排列(即 321、213、132)} \\ 0 & \text{当 } ijk \text{ 为非循环排列(即有二或三个指标相同)} \end{cases} \tag{10-4}$$

即：

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1$$

$$e_{321} = e_{213} = e_{132} = -1$$

$$e_{111} = e_{112} = e_{113} = \cdots = e_{333} = 0$$

容易看出

$$e_{ijk}=e_{jki}=e_{kij}=-e_{jik}=-e_{ikj}=-e_{kji} \tag{10-5}$$

设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 构成右手系，有

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\quad \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\cdots$$

上式可简记为

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=e_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{10-6}$$

若有任意两个矢量：

$$\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i\quad \boldsymbol{b}=b_j\boldsymbol{e}_j$$

则它的矢积：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_i\boldsymbol{e}_i)\times(b_j\boldsymbol{e}_j)=a_ib_j(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j)=a_ib_je_{ijk}\boldsymbol{e}_k$$

即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=a_ib_je_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{10-7}$$

用置换符号表达行列式也是很方便的，设

$$a=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

将此行列式展开，容易证明

$$a=e_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k}=e_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}$$

行列式任意两行或两列对调要改变符号，有

$$-a=e_{ijk}a_{2i}a_{1j}a_{3k}$$

即

$$e_{213}a=e_{ijk}a_{2i}a_{1j}a_{3k}$$

将 1，2，3 换为 l，m，n，可写为

$$ae_{lmn}=a_{il}a_{jm}a_{kn}e_{ijk} \tag{10-8a}$$

更一般的，可写为

$$ae_{ijk}e_{lmn}=\begin{vmatrix} a_{il} & a_{im} & a_{in}\\ a_{jl} & a_{jm} & a_{jn}\\ a_{kl} & a_{km} & a_{kn}\end{vmatrix} \tag{10-8b}$$

用克罗奈克符号组成的行列式为

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

因此有

$$e_{ijk}e_{lmn}=\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}$$

将上式展开，若令 $i=l$，有

$$e_{ijk}e_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

若令 $i=l$，$j=m$，有

$$e_{ijk}e_{ijn} = 2\delta_{kn}$$

最后，若令 $i=l$，$j=m$，$k=n$，则有

$$e_{ijk}e_{ijk} = 2\delta_{kk} = 6$$

五、指标记法的运算

若

$$a_i = A_{ij}b_j \tag{a}$$

$$b_i = B_{ij}c_j \tag{b}$$

为了要把后一式代入前式，就要变换指标。先把式（b）中的自由指标 i 换成 j，这时原来（b）式中的哑指标 j 也必换成其他指标，因为 $B_{jj}c_j$ 是没有意义的。可将（b）式改写为

$$b_j = B_{jk}c_k \tag{c}$$

将式（c）代入式（a），得

$$a_i = A_{ij}B_{jk}c_k \tag{d}$$

式（d）代表三个方程，每个方程右端有 9 项。

若 $p=a_ib_i$，$q=c_id_i$，则

$$pq = a_ib_ic_jd_j$$

注意，上式不能写为 $pq=a_ib_ic_id_i$，因为一项中有 4 个相同的指标是没有意义的。

第二节　笛卡尔张量

张量不依赖于坐标系，用张量表达的方程与坐标系无关，在什么坐标系下都成立。一个物理定律如果是正确的，那么就是客观的，与观察者无关，也就是与坐标系无关。只有张量能满足这一条件，这是张量能够有越来越广泛的应用的重要原因。

张量最初是在 19 世纪后期由高斯（Gauss）、黎曼（Riemann）、克里斯托弗（Christoffel）等人在发展微分几何过程中引入的，后来由李奇（Ricci）和他的学生列维-奇维塔（Levi-Civita）发展了张量分析。但直到 1916 年爱因斯坦用张量来阐述他的广义相对论，张量才引起人们的重视，并从而发展成一个独立的数学分支。从 20 世纪 30 年代开始，张量在连续介质力学中开始应用，并且应用得越来越广泛。现在，应用张量最多的领域，就是连续介质力学。如果不懂得张量，几乎就无法理解力学中的物理量，如应力张量、应变张量等等，也几乎无法看懂力学文献。

能够在任意坐标系间变换的张量理论称为普遍张量理论。由于普遍张量理论比较复杂，这里仅介绍笛卡尔张量。笛卡尔张量是指仅在笛卡尔直角坐标系中变换的张量，其理论远比普遍张量理论简单。掌握了笛卡尔张量，就可以理解和应用连续介质力学的基本概念和理论。

一、笛卡尔坐标变换

设有一笛卡尔直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$，记为 $\{O-x_i\}$，其三个坐标轴上的基矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 都是单位矢量，而且相互正交，因此有

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{10-9}$$

另有一笛卡尔直角坐标系 $Ox_{1'}x_{2'}x_{3'}$，记为 $\{O-x_{i'}\}$，其三个坐标轴的基矢量为 $\boldsymbol{e}_{1'}$，$\boldsymbol{e}_{2'}$，$\boldsymbol{e}_{3'}$，当然它们之间也有关系 $\boldsymbol{e}_{i'} \cdot \boldsymbol{e}_{j'} = \delta_{i'j'}$。

任一矢量 $\boldsymbol{OP}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{OP} = x_i\boldsymbol{e}_i = x_{i'}\boldsymbol{e}_{i'}$$

设坐标系由 $\{O-x_i\}$ 变换为 $\{O-x_{i'}\}$，称 $\{O-x_i\}$ 为旧系，$\{O-x_{i'}\}$ 为新系。

引入变换系数，其定义为

$$\beta_{i'j} = \boldsymbol{e}_{i'} \cdot \boldsymbol{e}_j \quad \beta_{ij'} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_{j'} \tag{10-10}$$

显然，变换系数 $\beta_{i'j}$ 表示 $Ox_{i'}$ 轴与 Ox_j 轴之间夹角的方向余弦，$\beta_{ij'}$ 表示 Ox_i 轴与 $Ox_{j'}$ 轴之间夹角的方向余弦。

当坐标系由旧系 $\{O-x_i\}$ 变换为新系 $\{O-x_{i'}\}$ 时，由解析几何知道，新、旧坐标之间有关系

$$\begin{Bmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \\ x_{3'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1'1} & \beta_{1'2} & \beta_{1'3} \\ \beta_{2'1} & \beta_{2'2} & \beta_{2'3} \\ \beta_{3'1} & \beta_{3'2} & \beta_{3'3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11'} & \beta_{12'} & \beta_{13'} \\ \beta_{21'} & \beta_{22'} & \beta_{23'} \\ \beta_{31'} & \beta_{32'} & \beta_{33'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{1'} \\ x_{2'} \\ x_{3'} \end{Bmatrix}$$

用指标记法，上两式可写为

$$\left.\begin{aligned} x_{i'} &= \beta_{i'j}x_j \\ x_i &= \beta_{ij'}x_{j'} \end{aligned}\right\} \tag{10-11}$$

旧系 $\{O-x_i\}$ 与新系 $\{O-x_{i'}\}$ 的单位矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 及 $\boldsymbol{e}_{i'}$ 之间的变换关系为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{i'} &= \beta_{i'j}\boldsymbol{e}_j \\ \boldsymbol{e}_i &= \beta_{ij'}\boldsymbol{e}_{j'} \end{aligned}\right\} \tag{10-12}$$

由式（10-11）可以得到

$$\beta_{i'j} = \frac{\partial x_{i'}}{\partial x_j} \quad \beta_{ij'} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{j'}} \tag{10-13}$$

式（10-13）也可以作为变换系数的定义。实际上，在普遍张量理论中就是用式（10-13）来作为变换系数的定义的。

容易证明，变换系数的行列式的值等于1，即

$$|\beta_{i'j}| = 1$$

由求导的链式法则，有

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x_{k'}} \cdot \frac{\partial x_{k'}}{\partial x_i} = \delta_{ij}$$

因此
$$\beta_{jk'}\beta_{k'i} = \delta_{ij} \tag{10-14}$$

同理
$$\beta_{k'j}\beta_{ji'} = \delta_{k'i'} \tag{10-15}$$

这两式表明变换系数 $\beta_{ij'}$ 与 $\beta_{j'i}$ 是互逆的，因此知道任意一组即可求得另一组变换系数。它们的关系可用矩阵表示为

$$[\beta_{jk'}] = [\beta_{k'j}]^{-1}$$

由于点积可以交换次序，由式（10-10）可知 $\beta_{i'j} = \beta_{ji'}$，因此变换系数的矩阵是以对角线为对称的，即

$$[\beta_{jk'}] = [\beta_{k'j}]^{\mathrm{T}}$$

因此
$$[\beta_{i'j}]^{\mathrm{T}} = [\beta_{i'j}]^{-1} \tag{10-16}$$

这表明，笛卡尔直角坐标系之间变换时，其变换系数的矩阵是正交矩阵。正交矩阵代表刚体旋转，因此式（10-11）、式（10-12）所表达的变换是刚体旋转变换，也只有这种变换才能使一个笛卡尔直角坐标系变换为另一新的笛卡尔直角坐标系。

二、笛卡尔张量

1. 一阶张量

任一矢量 $\boldsymbol{a}$，在坐标系 $\{O-x_i\}$ 中可写为

$$\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i$$

当坐标系由 $\{O-x_i\}$ 变换为 $\{O-x_{i'}\}$ 时，其分量按规律

$$a_{i'} = \beta_{i'j}a_j$$

变换。有许多物理量或几何量具有这样的变换规律。我们定义，凡是分量按这一规律变换的量都称为“矢量”，显然这是矢量定义的推广。这一类的量具有特殊规律，必须单独加以研究，于是就有了一阶张量。

定义 若 n 维空间中有一组 n 个数 T_i，当笛卡尔直角坐标系由 $\{O-x_i\}$ 变换为 $\{O-x_{i'}\}$ 时，它们按规律

$$T_{i'}=\beta_{i'j}T_j \tag{10-17}$$

变为 $T_{i'}$，则称 T_i 为 n 维空间中的一阶笛卡尔张量的分量，这 n 个分量的集合称为一阶笛卡尔张量。

显然，一阶张量是矢量概念的推广，而矢量就是一阶张量。在三维空间中，一阶张量共有 3 个分量。

2. 二阶张量

定义 若 n 维空间中有一组 n^2 个数 T_{ij}，当笛卡尔直角坐标系由 $\{O-x_i\}$ 变换为 $\{O-x_{i'}\}$ 时，它们按规律

$$T_{i'j'}=\beta_{i'i}\beta_{j'j}T_{ij} \tag{10-18}$$

变换，则称 T_{ij} 为 n 维空间中的二阶笛卡尔张量的分量，这 n^2 个分量的集合称二阶笛卡尔张量。

在三维空间中，二阶张量共有 9 个分量。

3. 高阶张量

定义：若 n 维空间中有一组 n^S 个数 $T_{ij\cdots k}$（这里 $ij\cdots k$ 共有 S 个指标）所确定的物理量、几何量或其他量，当笛卡尔直角坐标系由 $\{O-x_i\}$ 变换为 $\{O-x_{i'}\}$ 时，它们按规律

$$T_{i'j'\cdots k'}=\beta_{i'i}\beta_{j'j}\cdots\beta_{k'k}T_{ij\cdots k} \tag{10-19}$$

变换，则称 $T_{ij\cdots k}$ 为 n 维空间中的 S 阶笛卡尔张量的分量，这 n^S 个分量的集合称为 S 阶笛卡尔张量。

张量还有其他定义方法，这里从略。

按照上面的定义，显然标量是零阶张量。

4. 张量的不变性记法及并矢记法

上面介绍的张量是用 $T_{ij\cdots k}$ 表示的，称为张量的分量记法。张量还有两种很重要的记法：不变性记法及并矢记法。

矢量的点积、矢积是大家所熟悉的，矢量还可以有并积。两矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的并积为

$$\boldsymbol{ab}=(a_i\boldsymbol{e}_i)(a_j\boldsymbol{e}_j)=a_ia_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

当坐标变换时，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ab}&=a_{i'}b_{j'}\boldsymbol{e}_{i'}\boldsymbol{e}_{j'}=(\beta_{i'i}a_i)(\beta_{j'j}b_j)(\beta_{i'k}\boldsymbol{e}_k)(\beta_{j'l}\boldsymbol{e}_l)\\&=\delta_{ik}\delta_{jl}a_ib_j\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l=a_ib_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=a_ib_j(\beta_{ii'}\boldsymbol{e}_{i'})(\beta_{jj'}\boldsymbol{e}_{j'})\\&=a_ib_j\beta_{ii'}\beta_{jj'}\boldsymbol{e}_{i'}\boldsymbol{e}_{j'}\end{aligned}$$

于是有

$$a_{i'}b_{j'}\boldsymbol{e}_{i'}\boldsymbol{e}_{j'}=a_ib_j\beta_{ii'}\beta_{jj'}\boldsymbol{e}_{i'}\boldsymbol{e}_{j'} \tag{a}$$