工　程　力　学

顾惠琳　徐烈烜　王斌耀　编

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书分两部分。第一部分为刚体静力学，内容包括：力的特性与基本力系的简化、空间一般力系的简化和约束的基本类型、力系的平衡条件与构架的组成规律、滑动摩擦与滚动摩阻。第二部分为材料力学。内容包括：拉伸和压缩、剪切、扭转、弯曲内力、弯曲应力、弯曲变形、平面应力状态分析、强度理论、组合变形、压杆稳定。

书末有两个附录，即平面图形的几何性质、型钢表。每章末有习题及习题答案。

本书可作为高等学校的采暖通风、给排水、建筑材料、建筑工程管理等相关专业的教材，也可作为相关专业教师及自学者的参考书。

前　　言

按照高等学校工科相关专业(采暖通风、给排水、建筑材料、建筑工程管理等)的教学要求,为了适应现行的教学时数,根据编者在同济大学长期从事理论力学、材料力学、工程力学等课程的教学经验,我们编写了这本工程力学教材。

我们在编写教材时,在内容安排上,注意力学系统的完整性和严密性,同时结合相关专业对工程力学的知识要求,力求打下良好的力学基础;在内容叙述中,注意表达的简练、通顺,力求讲透要点、抓住关键、破解难点、总结规律。

本书可供全日制大学同类专业的师生和一般工程技术人员的使用和参考。

本书由顾惠琳主编。其中,第一章、第二章、第三章、第四章由王斌耀编写;第五章、第六章、第十二章、第十三章由徐烈烜编写;第七章、第八章、第九章、第十章、第十一章及附录Ⅰ由顾惠琳编写;全书由顾惠琳统稿。

在编写中,同济大学基础力学教研室的吴永生老师对全书作了认真、细致的审阅,提出了许多宝贵意见,徐妙新老师对书中的部分章节也进行了认真、细致的审阅,在此一并致以深切的感谢。

编　者

2000 年 11 月于同济大学

目　　录

第一部分　刚体静力学

第二部分　材　料　力　学

第一部分　刚体静力学

绪　言

静力学是人类在自身进化、生存繁衍中最先认识、最先完善的一门学科。在现代，静力学仍然是与工程紧密结合的学科之一。

在浩瀚的宇宙中，不存在静止的物质。静力学的“静”，是相对于息息相存的地球而言的。静力学主要研究两类问题：其一，力系的简化；其二，力系的平衡条件。所谓力系的简化，就是以简单的力系去替代工程问题中繁杂的力系，使原力系对物体的作用更加明确，当然这种力系的替代必须是等效的，也就是等效替换。所谓平衡，是指物体相对地球保持静止或作匀速直线运动，这种可使物体保持平衡的条件被称为力系的平衡条件。

为了使学生对物体系统的平衡作更深入的分析，因此在静力学中引入了一些静定构架形成的基本知识，以便加深读者对静力分析的理解。

第一部分所叙述的方法，是建立在力的矢量特性的数学基础上的方法，被称为矢量静力学。

第一章　力的特性与基本力系的简化

第一节　力的作用效应

一、力的定义

人类在与自然的抗争中，通过自身的肌肉伸缩最先感觉到力的存在，在生产、生活的实践中，又不断地加深了对它的认识，发现了力是物体之间的相互作用，这种机械性（接触式）的相互作用，其结果使物体产生运动状态的改变或者使物体产生形状的改变。

力使物体的形状发生改变，这将在本书的第二部分材料力学加以阐述。力使物体发生运动状态的改变，既可能是移动，也可能是转动，或者是两种运动兼而有之的复杂运动。物体受力后发生的运动状态的改变，取决于力是怎样地作用在物体上的，这就是说作用在物体上的力，其大小、方向、作用点三者中只要有一个一旦改变，物体可能发生的运动也随之而改变。

在图 1-1 中，图(a)所示的力 $\boldsymbol{F}$，若其方位正好通过物体的质量中心，此力只能使物体产生移动（平动），图(b)所示的力 $\boldsymbol{F}$，作用

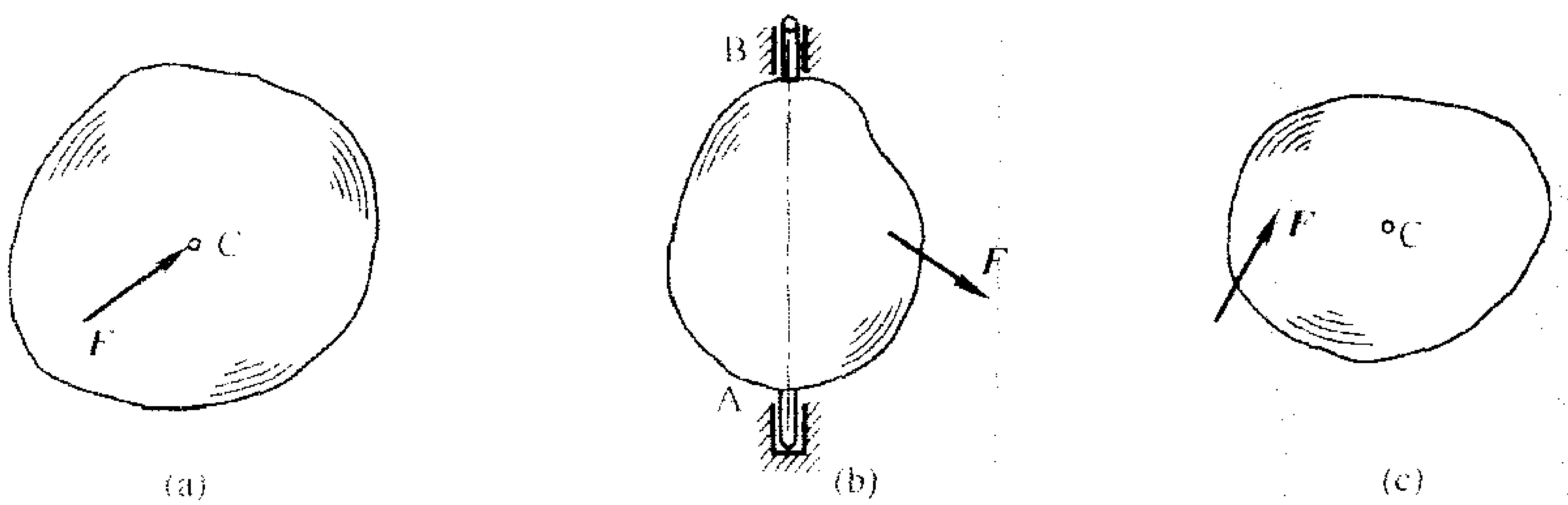


图 1-1

在有轴承制约的物体上，若力的方位不交于也不平行于轴线 AB，仅能使物体产生定轴转动；图(c)所示的力 $\boldsymbol{F}$，若其方位不通过质量中心，就能使物体产生一般运动，既有移动又有转动。

由此可见，力对物体的作用，将同时取决于力的大小、方向、作用点，将这称为力对物体作用的三要素。能同时反映这三个要素的量，在数学上称为矢量(向量)，用 $\boldsymbol{F}$ 表示。

力的单位，在国际单位制中，一般用牛[顿](N)、千牛[顿](kN)表示。

二、力在轴上的投影

力在轴上的投影，就是矢量在轴上的投影，是力学计算中的基本运算之一。

力矢量 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{AB}$，如图 1-2 所示。在矢量 $\boldsymbol{F}$ 的始端 A 和终端 B 分别作平面Ⅰ，Ⅱ，且这两平面与 x 轴垂直。根据矢量在任何两根指向相同的平行轴上的投影值相等的原理，在矢量的始点 A 作平行 x 轴的 x' 轴，那么，力 $\boldsymbol{F}$ 在 x 轴上的投影，就是平面Ⅰ和平面Ⅱ在 x 轴上所截取的线段，以 X 表示力 $\boldsymbol{F}$ 在 x 轴上的投影值，若设 α 为力 $\boldsymbol{F}$ 与 x 正向间的夹角，则投影值由下式给出：

$$X = \overline{A_1B_1} = \overline{AC} = F\cos\alpha \tag{1-1}$$

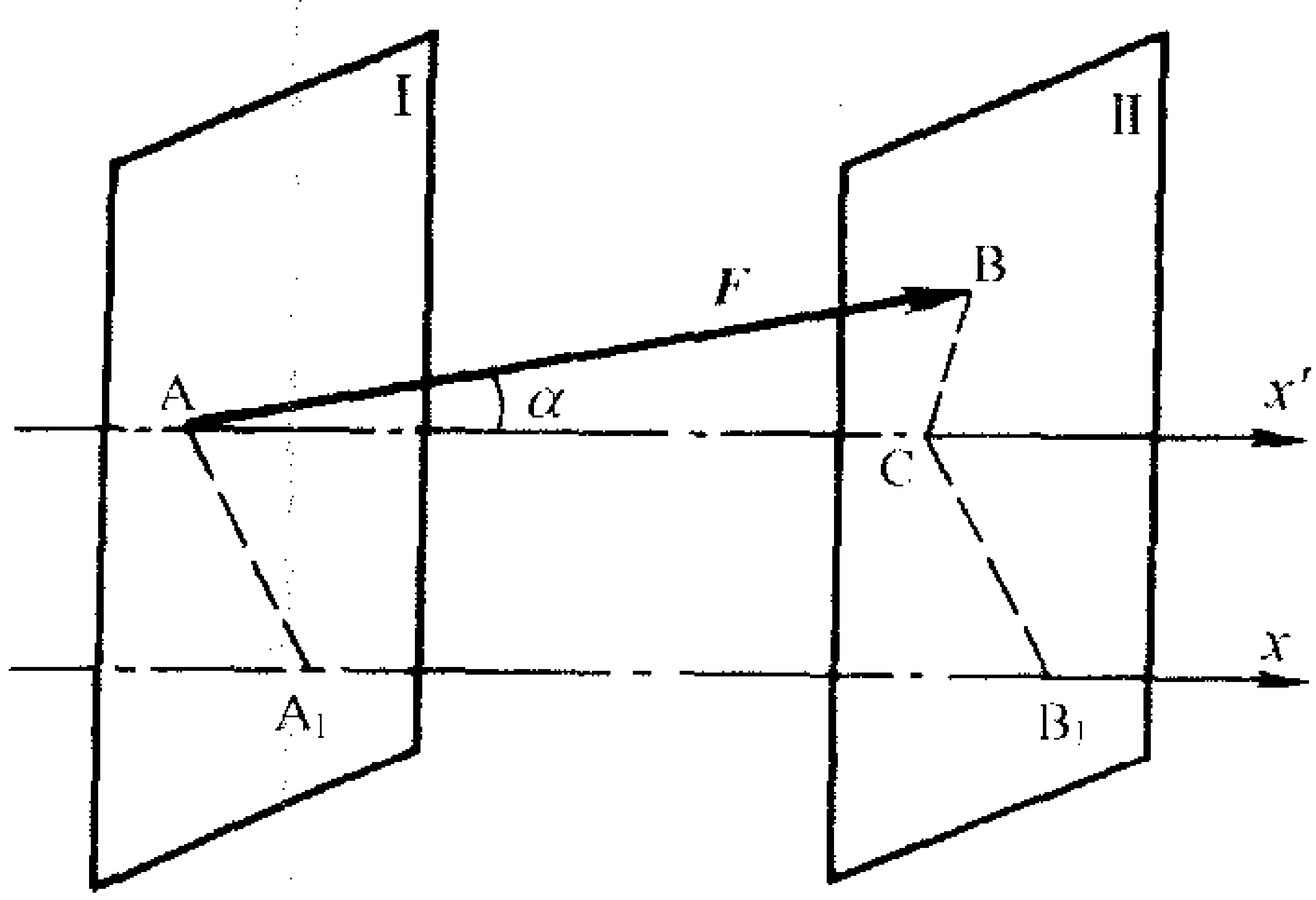


图 1-2

由式(1-1)可见，投影是个代数值，我们约定：垂足 A_1 到 B_1 或 A 到 C 的顺序与 x 轴一致时为正，反之为负。

可以看出,(力)矢量投影后,其量纲保持不变。

力在正交的三维坐标轴上的投影有两种投影法。

(1) 一次投影法

如图 1-3 所示,已知力 $\boldsymbol{F}$ 及力 $\boldsymbol{F}$ 与 x,y,z 轴正向间的夹角 α,β,γ,则力 $\boldsymbol{F}$ 在各坐标轴上的投影为

$$\left.\begin{aligned} X &= F\cos\alpha \\ Y &= F\cos\beta \\ Z &= F\cos\gamma \end{aligned}\right\} \qquad (1-2)$$

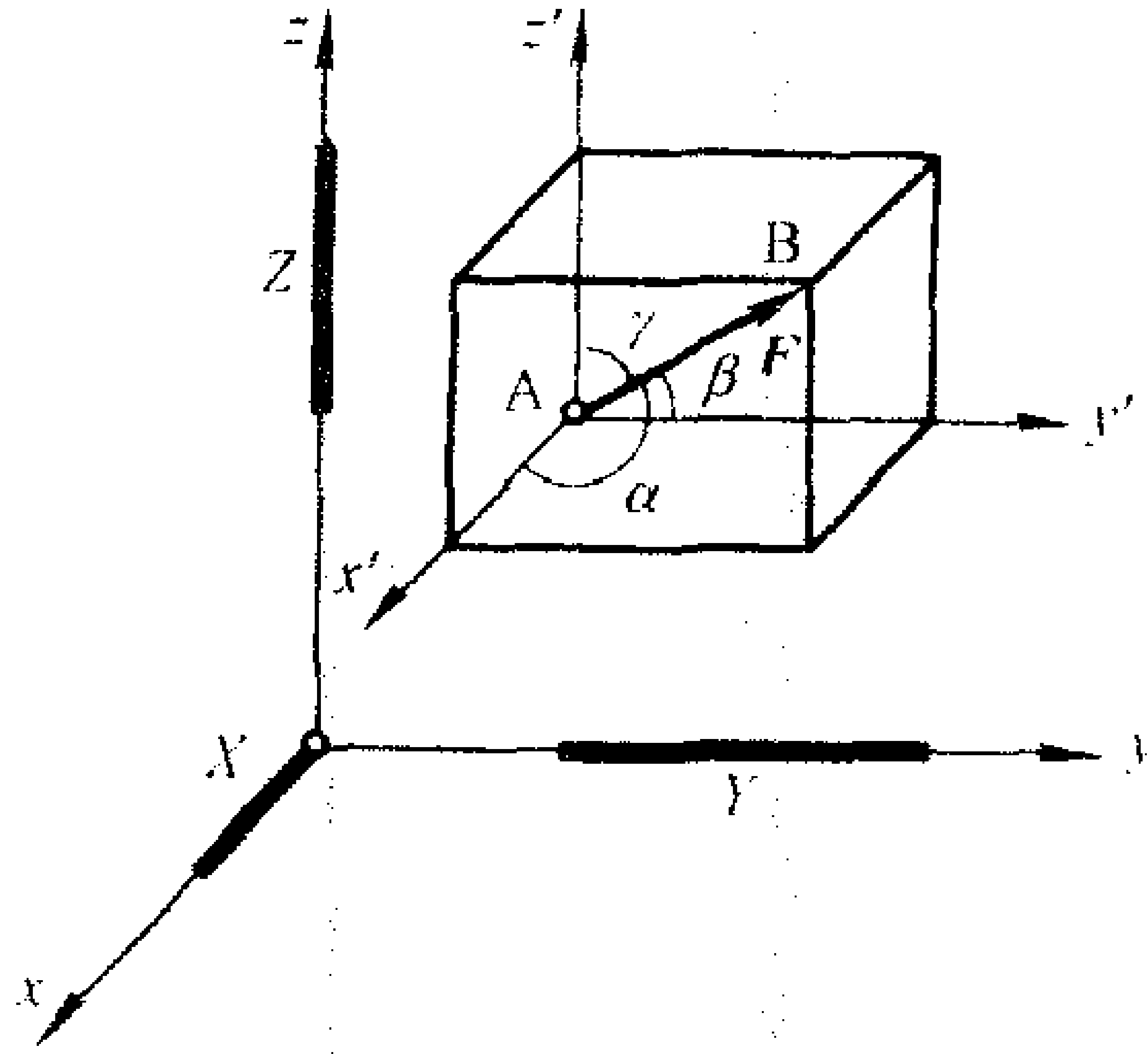


图 1-3

(2) 二次投影法

过力 $\boldsymbol{F}$ 作一平面与 Axy 平面正交(图 1-4),已知力 $\boldsymbol{F}$,力与 Axy 平面的交角为 θ,力所在平面与 x 轴的交角为 φ。先将力 $\boldsymbol{F}$ 投影到 Axy 平面上,得矢量 $\boldsymbol{F}_{xy}$,其模为 $F_{xy} = F\cos\theta$。

必须指出,力在平面上的投影是矢量,因为它不仅有大小,而且还要表示其在平面上的方向。这就是第一次投影。

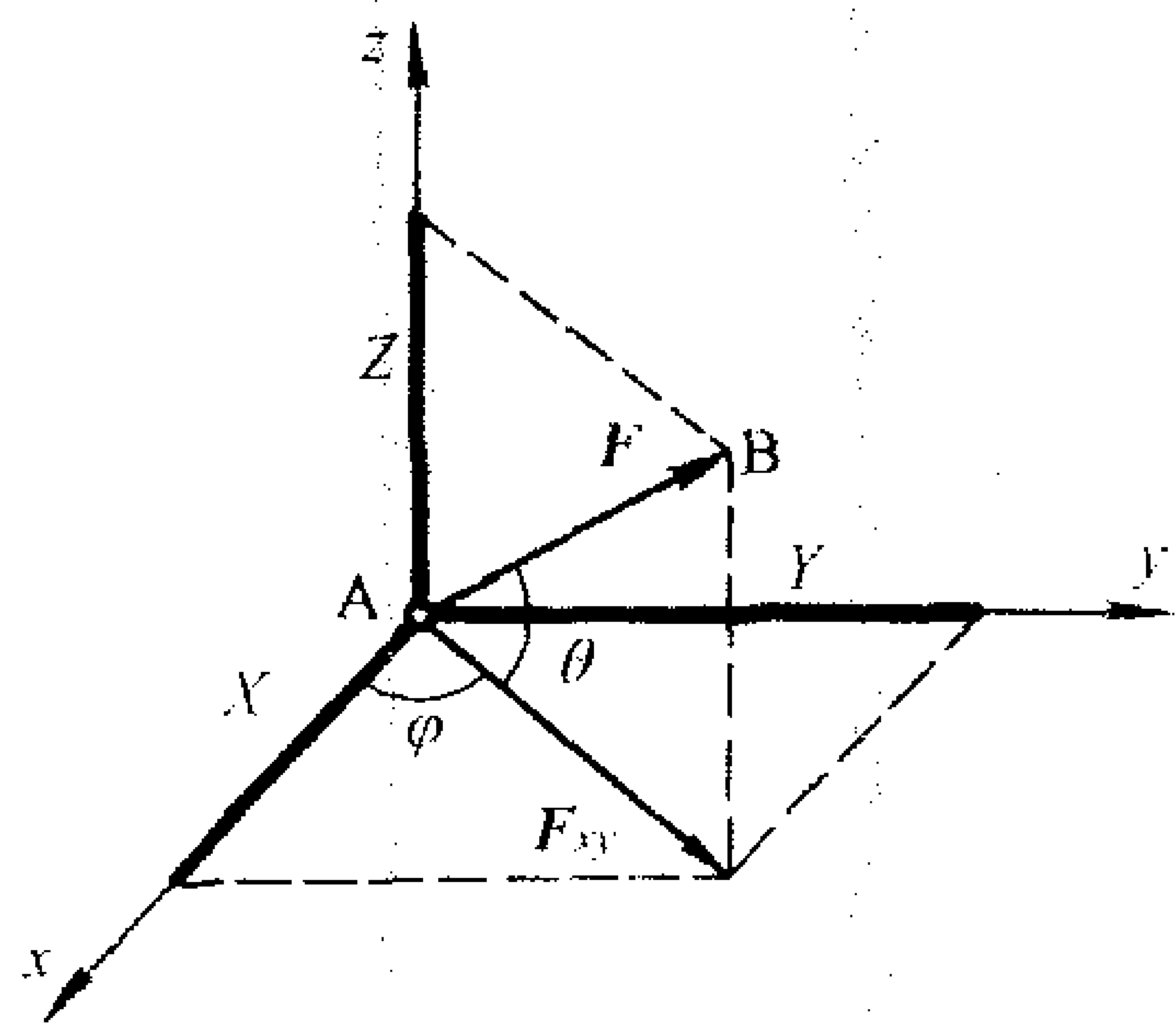


图 1-4

再将力 $\boldsymbol{F}_{xy}$投影到 x,y 轴上,将 $\boldsymbol{F}$ 直接投影到 z 轴上,就得到力 $\boldsymbol{F}$ 在三个坐标轴上的投影为

$$\left.\begin{aligned} X &= F\cos\theta\cos\varphi \\ Y &= F\cos\theta\sin\varphi \\ Z &= F\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad (1-3)$$

作为逆运算,设各坐标的单位矢量(基矢量)为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,则力矢

量可用其在各轴上的投影 X,Y,Z 表示为

$$\boldsymbol{F} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k} \tag{1-4}$$

其模和方向余弦为

$$\left.\begin{aligned} F &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ \cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{i}) &= \frac{X}{F} \\ \cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{j}) &= \frac{Y}{F} \\ \cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{k}) &= \frac{Z}{F} \end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

三、力对点的矩

力对点的矩也是力学的基本运算之一。现用电视机上的拉杆天线来说明其意义。如图 1－5 所示。当在天线上作用一力 $\boldsymbol{F}$ 时，拉杆天线就有了绕天线底座中心转动的可能。由实践体验到，这种转动，不仅取决于力 $\boldsymbol{F}$ 的大小，而且还取决于力 $\boldsymbol{F}$ 作用线到 O 点的垂直距离 h。

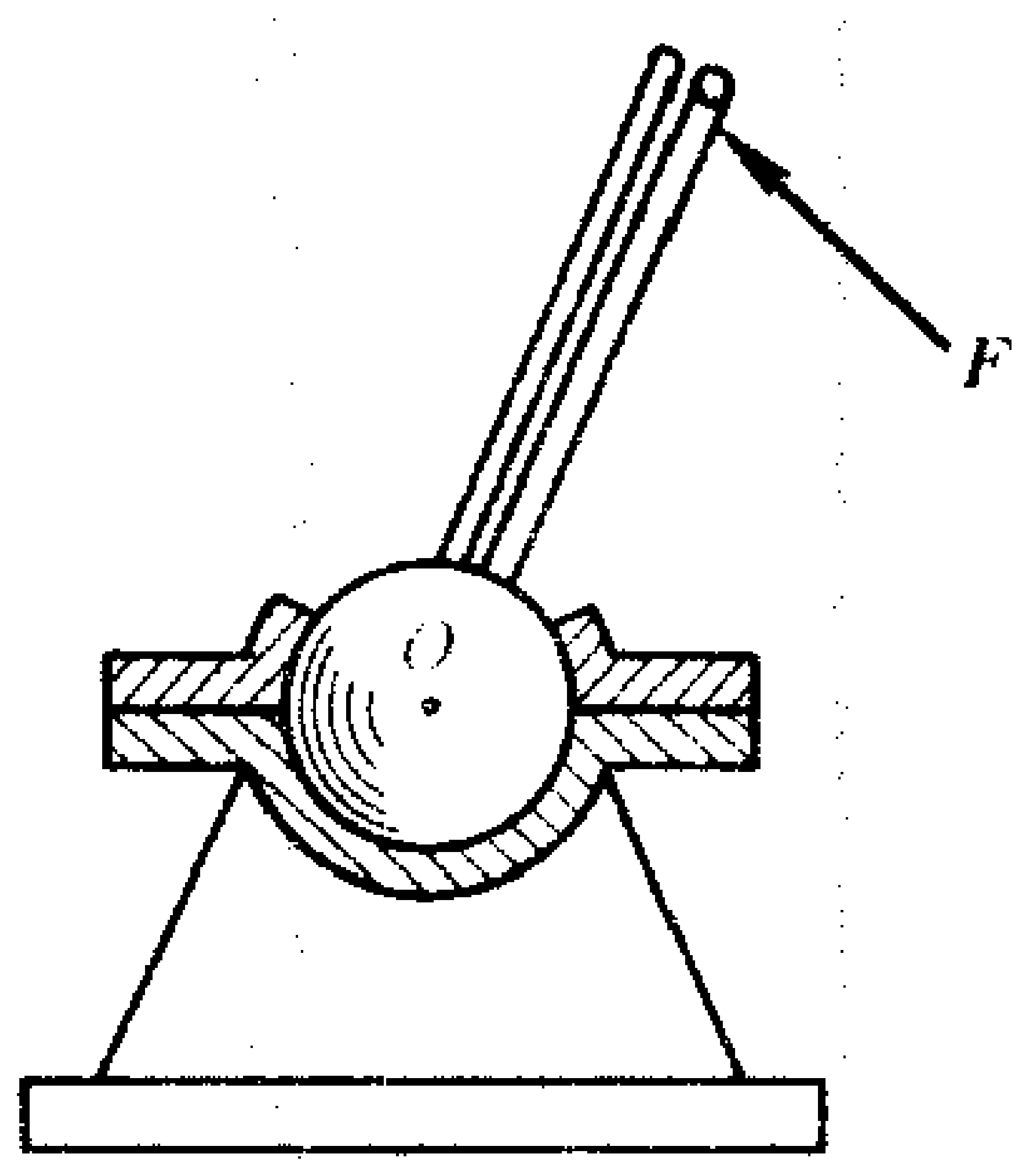


图 1－5

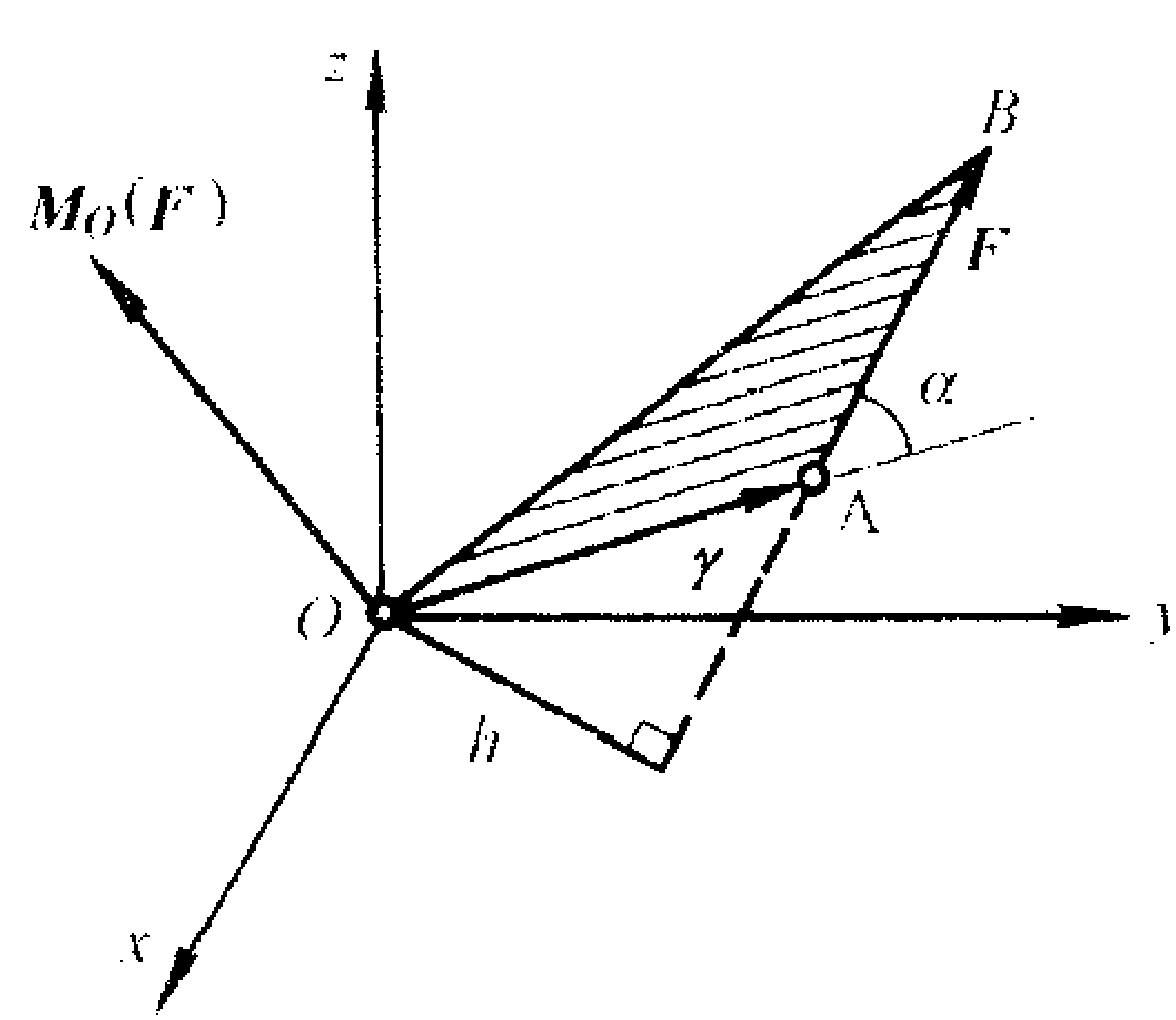


图 1－6

在力学计算中，力对点的矩不仅局限于对实际的转动点取矩，而且对物体上任一点都可以取矩，为此，必须建立力对点的矩的抽象概念：设力 $\boldsymbol{F}$ 对空间中的任一点 O 取矩，称 O 为矩心，用位置

矢径 $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{r}$ 来描述力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点(图 1-6),力 $\boldsymbol{F}$ 与位置矢径 $\boldsymbol{r}$ 组成力矩平面,不同的力与位置矢径形成不同的力矩平面。能同时表达力矩平面的方位、力矩的大小与转向的量是矢量。因此,力对点的矩必须用矢量来表示。可用 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 的矢积来表达力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点的矩,记作 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$,即

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{1-6}$$

力矩的方向即矢积 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 的方向。由于同一个力对不同的点,有不同的力矩,所以力矩矢量是定位矢量。必须指出的是,力矩记号中一定要有下标才能恰当地表达出力矩的转动效应,力矩矢量只能画在矩心上。我们把力矩的大小、方向和矩心称为力矩的三要素。

力矩 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 的模为

$$|\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})|=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}|=Fr\sin\alpha=Fh \tag{1-7}$$

其中,h 为力 $\boldsymbol{F}$ 到矩心 O 的垂直距离,被称为力臂。

当力沿其作用线移动时,因为力臂不变,所以其矩也不变。

力矩的量纲是[力]·[长度],在国际单位制中,用牛[顿]米(N·m)表示。

力矩既然是矢量,就可以运用投影定理。过矩心 O 建立坐标系 $Oxyz$,力 $\boldsymbol{F}$ 用式(1-4)表示,位置矢径 $\boldsymbol{r}$ 用下式表示:

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

根据矢量的算法,则力矩 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 可表示成如下行列式:

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x&y&z\\X&Y&Z\end{vmatrix} \tag{1-8}$$

将行列式展开,有

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})=(yZ-zY)\boldsymbol{i}+(zX-xZ)\boldsymbol{j}+(xY-yX)\boldsymbol{k}$$

其基矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 前的系数，分别表示力矩矢量 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 在相应轴上的投影，即

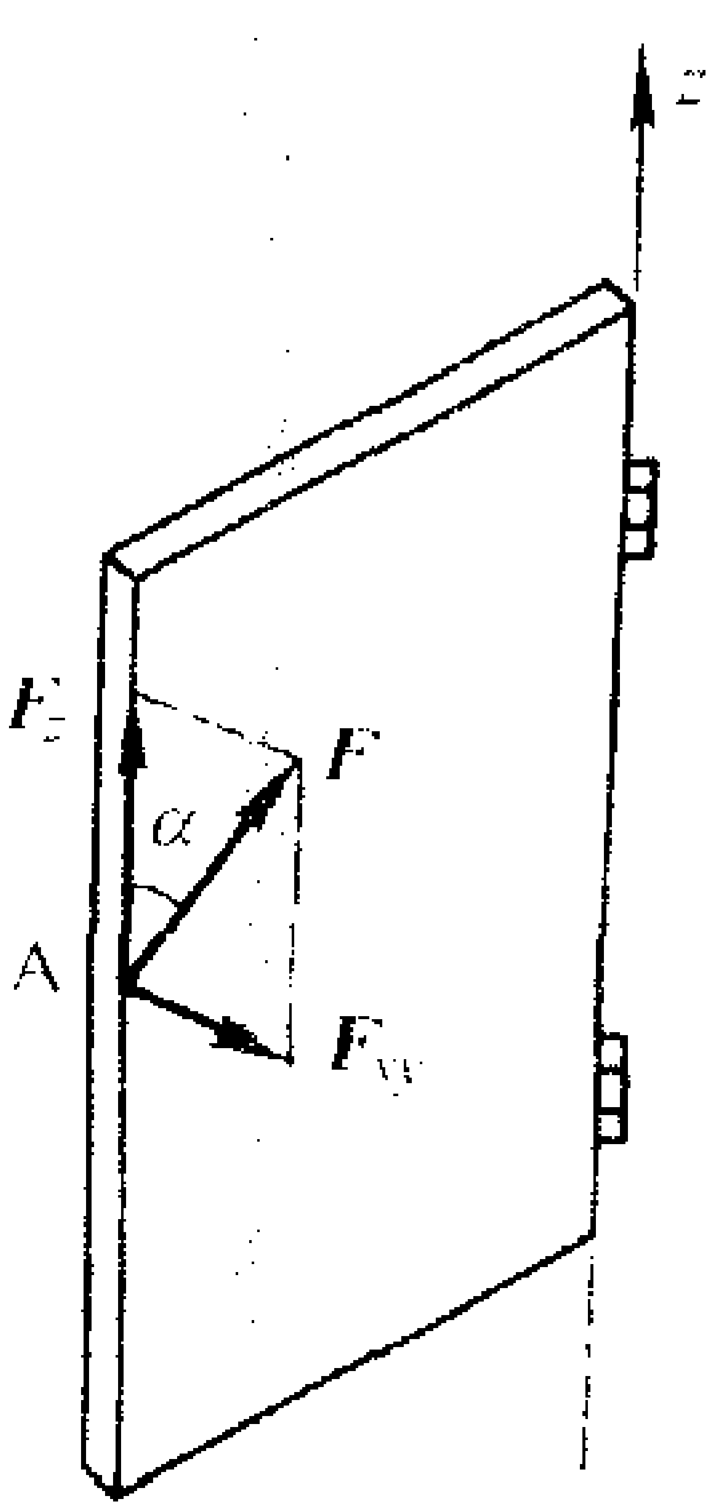
$$\begin{aligned} M_{Ox} &= yZ - zY \\ M_{Oy} &= zX - xZ \\ M_{Oz} &= xY - yX \end{aligned} \tag{1-9}$$

四、力对轴的矩

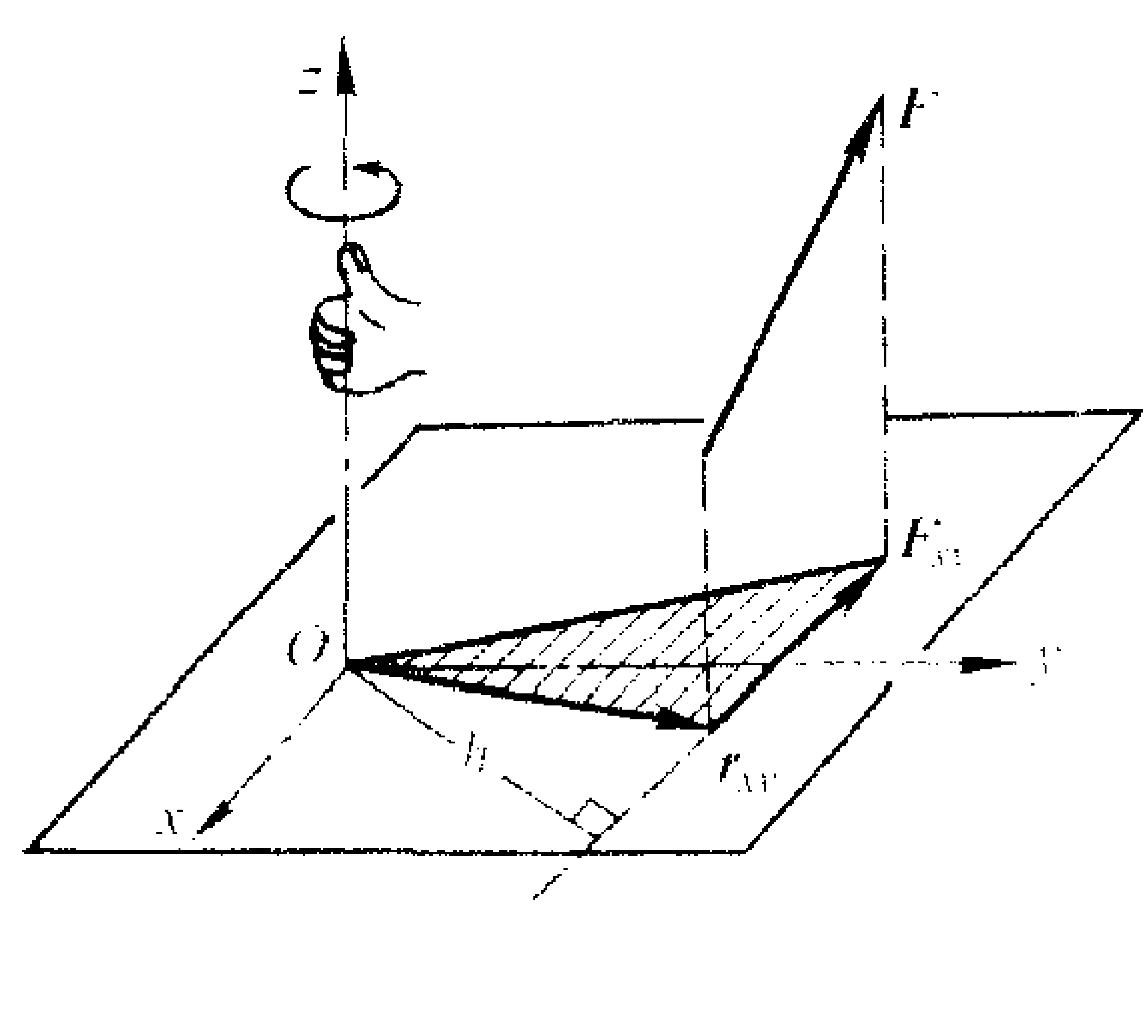
在日常生活和工程实际中，都存在着一个物体绕一特定的轴线转动的问题。例如，门窗的启闭，轮轴机构的传动，等等。我们用力对轴的矩来度量力使物体绕轴转动的效应。

现以门的启闭为实例。设有一力 $\boldsymbol{F}$ 作用在门的 A 点上，其作用线与竖直线成 α 角。为了确定力 $\boldsymbol{F}$ 使门绕 z 轴转动的效应，将力 $\boldsymbol{F}$ 分解为两个分力 $\boldsymbol{F}_z$ 与 $\boldsymbol{F}_{xy}$（图 1－7(a)）。由实践经验知，平行于 z 轴的分力 $\boldsymbol{F}_z$ 不可能使门绕 z 轴转动，即 $\boldsymbol{F}_z$ 对 z 轴的力矩为零，只有 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 才能使门绕 z 轴转动，也就是说，只有 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 对 z 轴有力矩作用。

至此，我们可以建立力对轴之矩的一般模型。设有任一空间力 $\boldsymbol{F}$（图 1－7(b)），计算该力 $\boldsymbol{F}$ 对轴 z 的矩时，可任取一平面（xOy）垂直于 z 轴，则平面与 z 轴就有交点 O。现将力 $\boldsymbol{F}$ 投影到该平面



(a)



(b)

图 1－7

上，得 $\boldsymbol{F}_{xy}$，则力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴的矩，就等于 $\boldsymbol{F}_{xy}$对 O 点的矩。于是得到力对轴的矩的定义如下：

一个力对某一轴的矩，等于这个力在垂直于该轴的平面上的投影对于该轴与该平面交点的矩。

若以 $M_z(\boldsymbol{F})$表示力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴的矩，则

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_O(\boldsymbol{F}_{xy}) = \pm F_{xy}h \qquad (1-10)$$

式中的正负号表示力 $\boldsymbol{F}$ 使物体绕 z 轴转动的转向，通常用右手法则来确定，即以右手四指握起的方向表示力 $\boldsymbol{F}$ 使物体绕 z 轴转动的方向；若大拇指伸开所指的方向与 z 轴的正向相同，则取正号，反之取负号。力对轴的矩是代数量。

五、力矩关系定理

力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴的矩也可用矢积 $\boldsymbol{r}_{xy} \times \boldsymbol{F}_{xy}$ 在 z 轴上的投影来表示，利用矢量在 x 轴和 y 轴上的投影式，即 $\boldsymbol{r}_{xy} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{F}_{xy} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j}$，得力对轴之矩的解析式：

$$M_z(\boldsymbol{F}) = xY - yX$$

将上式与式(1-9)中的第三式对照，可看出 $M_z(\boldsymbol{F})$与 M_{Oz}完全相同，即

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_{Oz} = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k} \qquad (1-11)$$

这两者之间的关系，可以从图 1-8 中直观得出。$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$和 $M_z(\boldsymbol{F})$的大小分别等于△OAB 和△Oab 面积的两倍，后者恰好等于前者在 Oxy 平面上的投影，而两个三角形所在平面的夹角，就是矢量 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$与 z 轴的夹角。

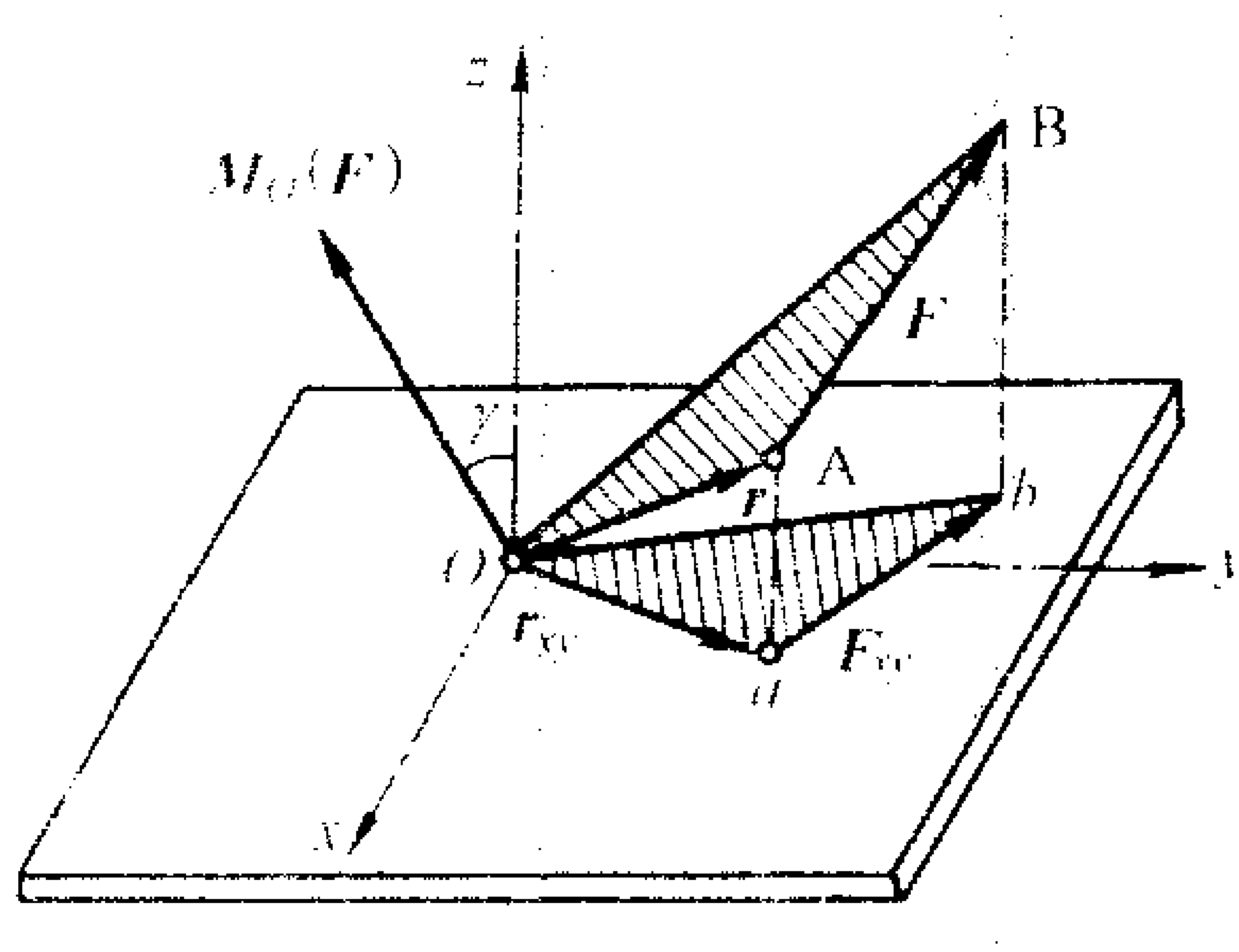
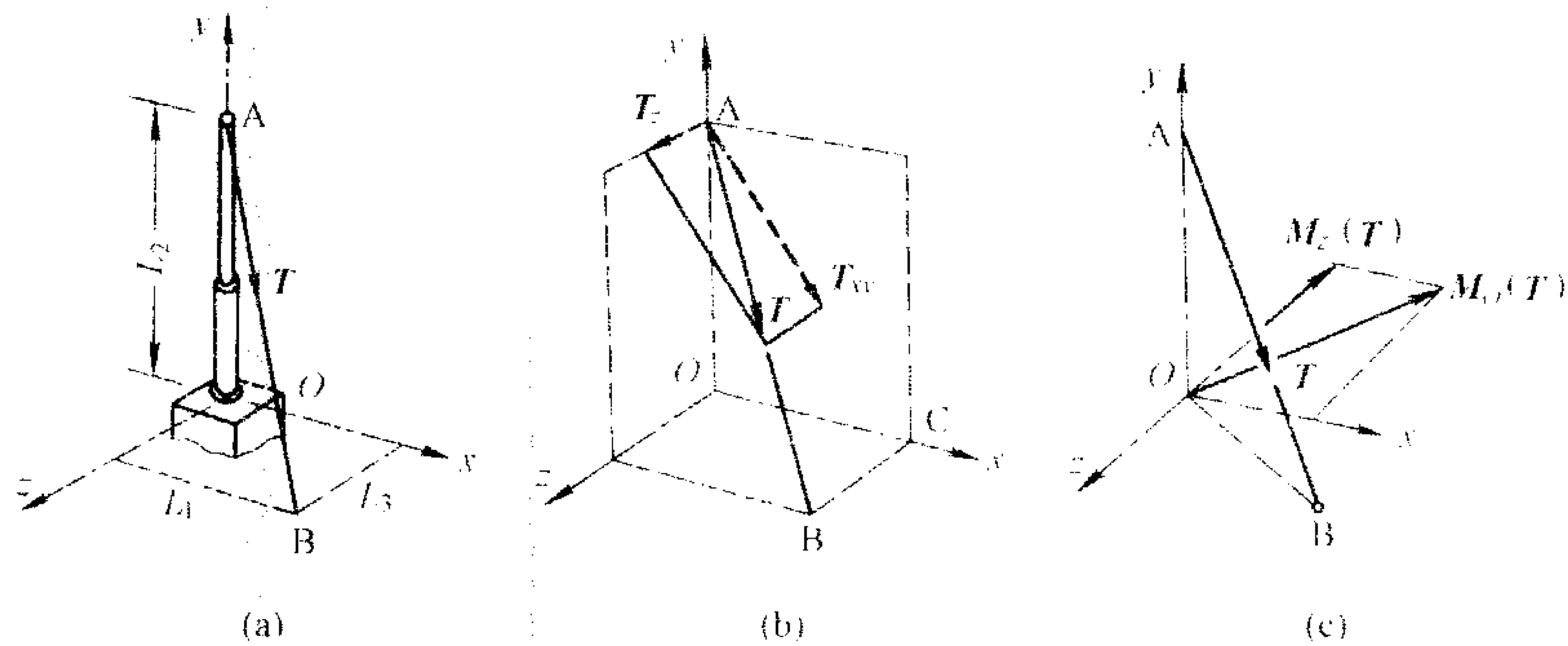


图 1-8

于是得到力矩关系定理：力对任一点的力矩矢在过此点

的任一轴上的投影，等于此力对该轴的矩。

例 1-1 一刚性桅杆的顶端受绳索拉力如图所示。已知：绳的张力 $T=10\,\text{kN}$，位置尺寸 $L_1=12\,\text{m}$，$L_2=15\,\text{m}$，$L_3=9\,\text{m}$。试求力 $\boldsymbol{T}$ 对 z 轴的力矩 $M_z(\boldsymbol{T})$。



例 1-1 图

解法一 利用式(1-10)，将力 $\boldsymbol{T}$ 在 A 点分解成 $\boldsymbol{T}_z$ 与 $\boldsymbol{T}_{xy}$ 两个分力(例 1-1 图(b))，找出 $\boldsymbol{T}_{xy}$ 到 O 点的垂直距离，则问题即解决。

由
$$\overline{\text{AB}}=\sqrt{L_1^2+L_2^2+L_3^2}=\sqrt{12^2+15^2+9^2}=\sqrt{450}\ \text{m}$$
$$\overline{\text{OB}}=\sqrt{L_1^2+L_3^2}=\sqrt{12^2+9^2}=15\ \text{m}$$
$$\overline{\text{AC}}=\sqrt{L_1^2+L_2^2}=\sqrt{12^2+15^2}=\sqrt{369}\ \text{m}$$

则力 $\boldsymbol{T}$ 在 xOy 平面上的投影为

$$T_{xy}=T\frac{\overline{\text{AC}}}{\overline{\text{AB}}}=10\times\frac{\sqrt{369}}{\sqrt{450}}\approx 9.06\ \text{kN}$$

其力臂 h 为 $\quad h=L_2\dfrac{L_1}{\overline{\text{AC}}}=15\times\dfrac{12}{\sqrt{369}}\approx 9.37\ \text{m}$

因此 $\boldsymbol{T}$ 对 z 轴的力矩为

$$M_{Oz}=-T_{xy}h\approx-84.9\ \text{kN}\cdot\text{m}，向着\ z\ 轴的负向。$$

解法二 利用式(1-9)的第三式进行计算。将力 $\boldsymbol{T}$ 作用点的坐标 x,y 及力 $\boldsymbol{T}$ 在 x,y 坐标轴上的投影写出,代入式(1-9)即可。$x=0$,$y=L_2$,$X=T\dfrac{L_1}{AB}=10\times\dfrac{12}{\sqrt{450}}\approx 5.66\ \text{kN}$,因为 $x=0$,所以,不必再计算力在 y 向的投影。力 $\boldsymbol{T}$ 对 z 轴的力矩为

$$M_{Oz}=xY-yX=0-15\times 5.66\approx -84.9\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

解法三 利用力矩关系定理,先求出力对 O 点的矩(例1-1图(c)),再投影到 z 轴上即得。

因为力 $\boldsymbol{T}$ 到 O 点的垂直距离为

$$h_1=L_2\times\frac{\overline{\text{OB}}}{\text{AB}}=15\times\frac{15}{\sqrt{450}}\approx 10.61\ \text{m}$$

所以 $$M_O(\boldsymbol{T})=Th_1\approx 106.1\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

其投影 $$M_{Oz}=M_O(\boldsymbol{T})\frac{L_1}{\overline{OB}}=106.1\times\frac{12}{15}\approx 84.9\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

第二节 静力学基本规律及其推论

静力学的理论,源于静力学基本规律。所谓基本规律,就是定律,也可称为公理,是由人们在长期的生活、生产实践中总结出来的,也是大家一致公认并被实践证明的事实。

一、刚体与刚化公理

首先引入刚体的概念。刚体是受力后不变形的物体,换句话说,物体在力的作用下,体内任意两点之间的距离保持不变。这是一种理想化的模型,在宇宙中不存在这样的物体,引入这种理想化的模型,是因为在研究某种问题时,当物体变形微小,忽略它,对问题求解的精确度影响甚少;而求解的过程就变得非常简便。

力作用在刚体上,对刚体只有运动效应,而没有变形效应。

对于一般的变形体,若在已知力作用下保持平衡,可以把这样