新世纪高校机械工程规划教材

工　程　力　学　Ⅱ

主　编　许英姿　张培国
副主编　杨道斋
参　编　高惠瑛　李春凤
主　审　张维国

机 械 工 业 出 版 社

本书是新世纪高校机械工程规划教材之一。

本书为《工程力学Ⅱ》，和《工程力学Ⅰ》为一配套教材，要学习《工程力学Ⅱ》，必须先学习《工程力学Ⅰ》。《工程力学Ⅱ》内容包括运动学基础、点的合成运动、刚体的平面运动、刚体动力学普遍定理、动载荷、简单超静定问题，带“*”号者为选学内容。各章均附有思考题、习题，书末还附有习题答案。

本书可供高等工科院校机械类专科学生使用，也可供非机械类的本科、专科学生使用，还可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

工程力学．Ⅱ/许英姿，张培国主编．—北京：机械工业出版社，2003.6

新世纪高校机械工程规划教材

ISBN 7-111-12032-9

Ⅰ．工...　Ⅱ．①许...②张...　Ⅲ．工程力学—高等学校—教材　Ⅳ．TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 034292 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)

策划编辑：高文龙　王世刚

责任编辑：宋学敏　版式设计：霍永明　责任校对：李秋荣

封面设计：姚　毅　责任印制：路　琳

北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2003 年 6 月第 1 版·第 1 次印刷

1000mm×1400mm B5·3.75 印张·145 千字

定价：10.00 元

新世纪高校机械工程规划教材编审委员会

前　　言

本书是为适应当前教学改革的总体要求而编写的。在编写过程中力求增强改革和创新意识,旨在将教材建设与教学改革结合起来。具体体现在如下几个方面:

1)在体系的编排上,对传统的《理论力学》体系作了适当的调整,运动学部分以点的合成运动和刚体的平面运动为重点,将点的运动和刚体的简单运动作为一章来研究;动力学部分将动力学三大定理浓缩为一章来研究。

2)在内容的处理上强调基础、加强应用、注重物理概念、理论推导严谨明了。

本书为《工程力学Ⅱ》,和《工程力学Ⅰ》为一配套教材,适用课时数为30~40课时。

参加本书编写的有山东理工大学许英姿(第十三章),青岛大学张培国(第十一章),青岛大学杨道斋(第九、十章),中国海洋大学高惠瑛(第十二章),渤海船舶技术学院李春凤(第十四章)。全书由许英姿负责统稿;由青岛大学张维国教授主审,他对本书提出了许多宝贵的意见,在此致以衷心的感谢。

由于作者水平有限,书中难免会有错误和不妥之处,敬请给予批评指正,不胜感谢。

编　者

目　　录

第九章　运动学基础

运动学研究物体的空间位置随时间变化的规律，而不考虑引起运动变化的原因。要确定一个物体在空间的位置，只有选定另一个物体作为参考体。如果将以一组坐标系固连在参考体上，则该坐标系称为参考系。工程实践中，一般选择与地面相固连的坐标系为参考系。

运动学的主要研究对象为点和刚体，这里的点是指不计形状、大小、质量，但在空间占有确定位置的几何点；而刚体可看作是由无数个点组成的、在力的作用下不变形的系统。

第一节　点 的 运 动

以数学形式表示的点在空间的位置随时间变化的规律，称为点的运动方程。要建立点的运动方程，常见的有三种方法，其中矢量法和直角坐标法已在《高等数学》和《普通物理学》中作过介绍。下面除了复习以上两种方法外，还将介绍一种新的方法——自然法。

一、矢量法

设动点 M 在空间作曲线运动，如图 9-1 所示，任选一固定点 O 作为参考点，则点 M 在任一瞬时的位置可用其位置矢量，即点 O 到点 M 的矢径 $\boldsymbol{r}=\overline{OM}$惟一地确定。

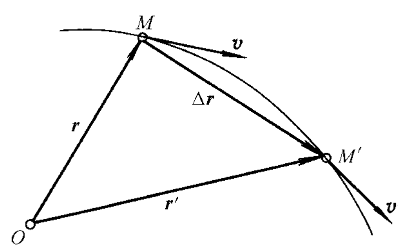

图 9-1　点的矢量形式

点 M 运动时，矢径 $\boldsymbol{r}$ 的大小和方向随时间 t 而变化，是时间 t 的单值连续函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\ (t) \tag{9-1}$$

上式就是点的矢量形式的运动方程。

根据速度的定义，点的速度等于矢径对时间的变化率，即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{9-2}$$

类似地，点的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{9-3}$$

二、直角坐标法

设动点 M 在空间运动，通过固定点 O 建立一直角坐标系 $Oxyz$，如图 9-2 所

示，则点 M 在任一瞬间的位置可以用它的坐标（x，y，z）惟一地确定。点 M 运动时，其坐标值 x，y，z 都随时间 t 而变化，是时间 t 的单值连续函数，即

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(t)\\ y&=f_2(t)\\ z&=f_3(t) \end{aligned}\right\} \tag{9-4}$$

这就是点的直角坐标形式的运动方程

由图 9-2 知，点 M 的矢径可表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

再利用式（9-2）及式（9-3），可得动点 M 的直角坐标形式的速度和加速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{9-5}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} \tag{9-6}$$

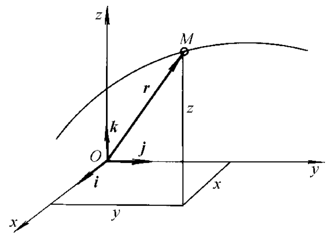

图 9-2　点的直角坐标系

三、自然法

在点的运动中，如果点的运动轨迹已知，则它的位置可由轨迹上某一点到这一位置的轨迹弧长来确定。这种以点的轨迹作为曲线坐标来确定点的位置的方法称为自然法。

设点的轨迹已知，在轨迹上任选一点 O 为原点，并沿轨迹规定正负方向，如图 9-3 所示，则点在任一瞬时 t 的位置 M 可由具有正负号的弧长 s 来确定。s 称为弧坐标，它是时间 t 的单值连续函数

$$s=f(t) \tag{9-7}$$

上式称为点的自然形式（或称弧坐标形式）的运动方程。

用自然法描述点的运动时，速度和加速度的表示与轨迹曲线的几何性质有密切的关系。为此，先将关于空间曲线的某些几何性质介绍如下：

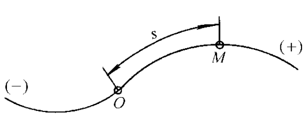

图 9-3　自然法

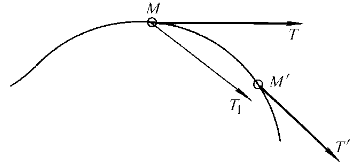

图 9-4　密切面

1．密切面

设有一空间曲线，如图 9-4 所示。在曲线上点 M 的邻近处取点 M'，曲线在点 M 和点 M' 的切线分别用 MT 和 $M'T'$ 表示。现过点 M 作一直线 MT_1 平行于切线

$M'T'$，则两相交线 MT 和 MT_1 决定一个平面。当点 M' 向点 M 移动时，该平面将随着 $M'T'$ 的变化而变化，并绕着切线 MT 转动。当点 M' 无限趋近点 M 时，该平面将趋向一极限位置，这个极限位置处的平面称为曲线在点 M 的密切面。

2. 自然轴系

在空间曲线上的任一点 M 可以作一切线 MT，通过切线 MT 作空间曲线在该点的密切面，如图 9-5 所示。通过点 M 作一垂直于切线的平面，称为曲线在点 M 的法平面。密切面与法平面 N 的交线 MN，称为曲线在点 M 的主法线。再过点 M 在法平面内作一垂直于密切面的直线 MB，称之为空间曲线在点 M 的副法线（又称次法线）。曲线在点 M 的切线、主法线、副法线组成一正交轴系，称为曲线的自然轴系。

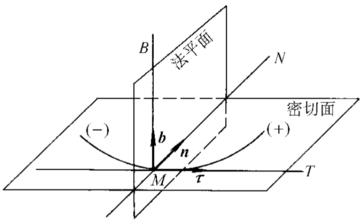

图 9-5　自然轴系

下面规定各轴的正方向，并用三个单位矢量表示自然轴系：

1）切线单位矢量 τ 沿切线 MT，并指向弧坐标的正方向。

2）主法线单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 沿主法线 MN，指向曲线在该点处的曲率中心。

3）次法线单位矢量 $\boldsymbol{b}$ 的方向按右手法则确定，即

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$$

需要指出的是，自然轴系与固定的坐标轴系不同，它是随动点在轨迹曲线上的位置而变化的，因此，单位矢量 τ、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{b}$ 是方向随动点的位置而变化的变矢量。

下面再介绍用自然法表示的点的速度和加速度。

设已知动点 M 的运动轨迹，如图 9-6 所示，其运动方程由式（9-7）表示。在瞬时 t，点的位置在 M，其弧坐标为 s，对在空间中任选的固定点 O' 的矢径为 $\boldsymbol{r}$；在瞬时 $t+\Delta t$，点的位置在 M'，其弧线坐标为 $s+\Delta s$，对 O' 的矢径为 $\boldsymbol{r}'$，根据用矢量法推导的点的速度公式（9-2）得

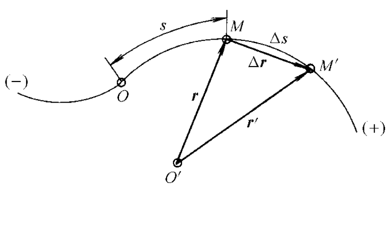

图 9-6　自然法表示点的速度和加速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

可以证明
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{\tau}$$

故
$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}=\dot{s}\boldsymbol{\tau}=v\boldsymbol{\tau} \tag{9-8}$$
上式表明:点的速度沿轨迹的切线方向。式中的 v 可理解为速度$\boldsymbol{v}$ 在切线方向的投影。

同样,根据加速度的定义,得
$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\boldsymbol{\tau})=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+v\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} \tag{9-9}$$
可以证明
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=\frac{\dot{s}}{\rho}\boldsymbol{n}$$

式(9-9)右端中的第一项表示速度方向不变,仅由于速度大小变化引起的速度变化率。它是加速度沿切线方向的一个分量,称为切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$,$\boldsymbol{a}_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\tau}$。

式(9-9)右端中的第二项表示速度大小不变,仅由于速度方向改变所引起的速度变化率,它是加速度沿法线方向的一个分量,称为法向加速度 $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$,$\boldsymbol{a}_\mathrm{n}=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}=\frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{n}$。

概括起来,点的加速度在其曲线自然轴系中的表示式为
$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_\mathrm{n}=\ddot{s}\boldsymbol{\tau}+\frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{n} \tag{9-10}$$
如果点的切向加速度的代数值保持不变,即 $a_\tau=\dot{v}=\ddot{s}=$常数,则点的运动称为曲线匀变速运动。将此式在初始条件下($t=0$ 时,$v=v_0$,$s=s_0$)积分,即可得到其运动学关系式
$$\begin{gathered} v=v_0+a_\tau t \\ s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}a_\tau t^2 \\ v^2-v_0^2=2a_\tau(s-s_0) \end{gathered} \tag{9-11}$$

例 9-1 设动点 M 沿螺旋线 $x=2\sin 4t$,$y=2\cos 4t$,$z=4t$ 运动。试求在任一瞬时的速度、加速度的大小及轨迹的曲率半径。(x、y、z 的单位为 m,时间 t 的单位为 s。)

解 已知动点 M 的直角坐标形式运动方程,可求出点 M 的速度在各坐标轴上的投影为
$$\left.\begin{aligned} \dot{x}&=8\cos 4t \\ \dot{y}&=-8\sin 4t \\ \dot{z}&=4 \end{aligned}\right\}$$
点 M 的速度大小为
$$\begin{aligned} v&=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} \\ &=\sqrt{(8\cos 4t)^2+(-8\sin 4t)^2+4^2}\,\mathrm{m/s} \\ &=4\sqrt{5}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

点 M 的加速度在各坐标轴上的投影为

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} &= -\ 32\sin 4t \\ \ddot{y} &= -\ 32\cos 4t \\ \ddot{z} &= 0\end{aligned}\right\}$$

点 M 的加速度的大小为

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2} \\ &= \sqrt{(-32\sin 4t)^2+(-32\cos 4t)^2}\mathrm{m/s^2} \\ &=32\mathrm{m/s^2}\end{aligned}$$

又因为
$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$$

则有
$$a_{\mathrm{n}}=a=32\mathrm{m/s^2}$$

所以
$$\rho=\frac{v^2}{a_{\mathrm{n}}}=\frac{(4\sqrt{5})^2}{32}\mathrm{m}=2.5\mathrm{m}$$

第二节　刚体的基本运动

刚体的基本运动，按其特征可分为平行移动（平动）、定轴转动、平面平行运动（平面运动）及定点转动和一般运动。本节简要讲述刚体的两种基本运动，即平动和定轴转动。刚体的其他运动，则可看作是这两种基本运动以不同形式的合成。

一、刚体的平行移动

刚体在运动过程中，如果其体内任一直线始终保持与初始位置平行，这种运动就称为平行移动，简称平动或移动。例如在直道上行驶的汽车的运动，电梯的运动，刨床滑枕的运动，振动筛筛体的运动。刚体平动时，若其上各点的轨迹为直线，称为直线平动，如图 9-7 所示沿直线轨道行驶的汽车的运动；若其上各点的轨迹为曲线，则称为曲线平动，如图 9-8 所示平板的运动。

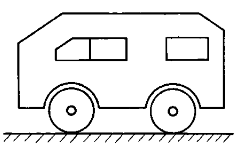

图 9-7　直线平动

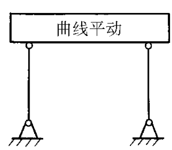

图 9-8　曲线平动

下面研究刚体作平动时，其上各点的轨迹、速度和加速度之间的关系。

在作平动的刚体上任选两点 A、B，设其矢径分别为 $\boldsymbol{r}_A$、$\boldsymbol{r}_B$，如图 9-9 所示。矢径 $\boldsymbol{r}_A$、$\boldsymbol{r}_B$ 和矢量 $\boldsymbol{r}_{AB}$ 的关系为

$$\boldsymbol{r}_B=\boldsymbol{r}_A+\boldsymbol{r}_{AB} \tag{9-12a}$$

因为刚体作平动，矢径 r_{AB} 为常矢量，故点 A 的轨迹沿 r_{AB} 方向平移一段距离，就能与点 B 的轨迹重合。

将式(9-12a)对时间 t 求一次导数，并考虑到 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{AB}}{\mathrm{d}t}=0$，得

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A \tag{9-12b}$$

再对时间 t 求一次导数，即得

$$\boldsymbol{a}_A=\boldsymbol{a}_B \tag{9-12c}$$

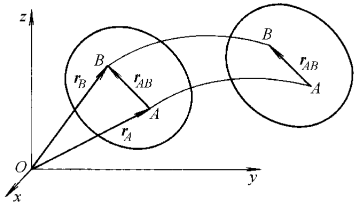

图 9-9　平动刚体

由于 A、B 是在刚体上任意选取的两点，所以由以上分析可知：刚体平动时，其上各点的轨迹形状完全相同，且在同一瞬时，其上各点具有相同的速度和加速度。

由于平动刚体上各点的运动相同，只要知道刚体上任一点的运动就能知道整个刚体的运动，因此刚体平动的问题可以归结为点的运动问题来研究。

二、刚体的定轴转动

刚体运动时，若其体内或其延拓部分有两点始终保持不动，这种运动就称为定轴转动，简称转动。过这两点的固定直线称为转轴。定轴转动是工程中常见的一种刚体运动，例如，安置在固定基础上的发电机的转子、电动机的输出轴等的运动都是定轴转动。

设有一刚体绕定轴 z 转动，现先选一通过转轴 z 并与地面参考系相固连的固定平面 Ⅰ，再选一通过转轴并与转动刚体相固连的平面 Ⅱ，如图 9-10 所示，因刚体上各点相对平面 Ⅱ 的位置是一定的，所以只要知道平面 Ⅱ 的位置就能确定刚体上各点的位置。于是，刚体的位置可由平面 Ⅱ 与平面 Ⅰ 间的夹角 φ 来确定。刚体转动时，φ 随时间 t 变化，是时间 t 的单值连续函数，可用一数学式表示为

$$\varphi=\varphi(t) \tag{9-13}$$

上式称为刚体定轴转动的运动方程。φ 的单位为 rad，其正负符号通常规定如下：从 z 轴的正向看，沿逆时针方向量取为正值；反之为负值。

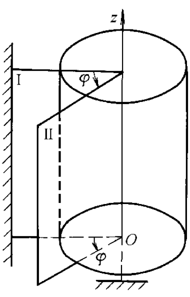

图 9-10　定轴转动

刚体作定轴转动的运动方程与点作直线运动方程 $x=x(t)$ 完全相似。设由瞬时 t 到瞬时 $t+\Delta t$，位置由 φ 增加到 $\varphi+\Delta\varphi$，增量 $\Delta\varphi$ 称为角位移。下面引出角速度来度量刚体转动的快慢和转向。比值 $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ 称为在 Δt 时间内刚体转动的平均角速度。当 $\Delta t\to 0$ 时，$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ 的极限称刚体在瞬时 t 的角速度，用 ω 表示。

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\dot{\varphi} \tag{9-14}$$

角速度的单位是 rad/s。在工程上常用每分钟内的转数 n(r/min)表示刚体转动的快慢。角速度 ω 与转速 n 之间的关系为

$$\omega=\frac{2\pi n}{60}=\frac{\pi n}{30} \tag{9-15}$$

同样地,可以引出角加速度的概念,用 α 表示角加速度

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{\varphi} \tag{9-16}$$

当 α 为正时,角速度 ω 的代数值随时间增大,反之减小。若 α 与 ω 符号相同,刚体作加速转动;若相反,刚体作减速转动。角加速度的单位是 rad/s^2。

对于匀变速转动,$\alpha=$常量,则有

$$\left.\begin{aligned}\omega&=\omega_0+\alpha t\\ \varphi&=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2\end{aligned}\right\} \tag{9-17}$$

式中　ω_0,φ_0——分别是 $x=0$ 时的角速度和转角。

下面讨论转动刚体内各点的速度和加速度。

在转动刚体内任取一点 M,它到转轴的距离为 R,它的运动轨迹即为半径为 R 的圆,如图 9-11 所示。取此圆与固定平面 Ⅰ 的交点为弧坐标原点,则点 M 的运动方程为

$$s=R\varphi$$

任一瞬时,点 M 的速度 v 的大小为

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=R\omega \tag{9-18}$$

其方向沿轨迹的切线,即垂直于半径 OM,指向与 ω 转向一致。

任一瞬时,点 M 的切向加速度 $\boldsymbol{a}_\tau$ 的大小为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=R\alpha \tag{9-19}$$

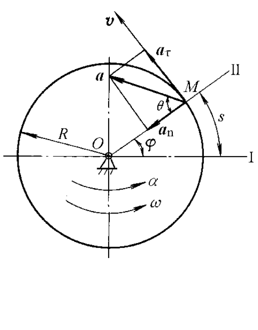

图 9-11　转动刚体的速度和加速度

其方向也沿轨迹的切线,指向与 α 的转向一致。

点 M 的法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 的大小为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2 \tag{9-20}$$

其方向指向圆心 O。

点 M 的全加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小为

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=R\sqrt{\alpha^2+\omega^4} \tag{9-21}$$

其方向由加速度 a 与 OM 的夹角 θ 确定，其中

$$\tan\theta=\frac{|a_\tau|}{a_n}=\frac{|\alpha|}{\omega^2} \tag{9-22}$$

由于点 M 是在刚体上任意选取的，根据式(9-18)及式(9-21)可知：在任一瞬时，刚体内各点的速度和加速度的大小与各点到转轴的距离成正比。

例 9-2 图 9-12 所示搅拌机的主动轮 Ⅰ 同时带动齿轮 Ⅱ、Ⅲ 转动，搅杆 BAC 用销钉 A、B 与齿轮 Ⅱ、Ⅲ 连接。设主动轮的转速 $n=950\text{r/min}$，$AB=O_2O_3$，$O_2A=O_3B=25\text{cm}$，各轮的齿数分别为 $z_1=20$，$z_2=z_3=50$。试求搅杆上点 C 的运动轨迹和速度大小。

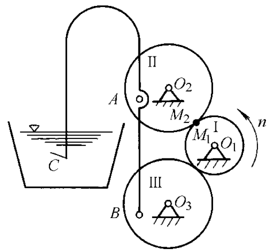

图 9-12 例 9-2 图

解 据题意，$AB=O_2O_3$，$O_2A=O_3B$，这说明：AB 与 O_2O_3 相平行，搅杆 BAC 在工作过程中将始终与其初始位置平行，其运动为平动。因此搅杆上点 C 的轨迹和速度应与点 A 的相同。点 A 的轨迹是一半径为 25cm 的圆。

齿轮 Ⅰ、Ⅱ 分别绕定轴转动，假设其半径分别为 R_1、R_2，角速度分别为 ω_1、ω_2，M_1、M_2 分别是两个齿轮啮合圆的接触点，因两圆之间没有相对滑动，所以它们的速度必定相同，即

$$v_{M1}=v_{M2}$$

由于 $$v_{M1}=\omega_1R_1\quad,\quad v_{M2}=\omega_2R_2$$

因此 $$\omega_1R_1=\omega_2R_2\quad\text{或}\quad\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{R_2}{R_1}$$

由于齿轮在啮合圆上的齿距相等，它们的齿数与半径成正比，故

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{z_2}{z_1} \tag{9-23}$$

这说明：两个啮合的定轴转动齿轮的角速度与两齿轮的齿数成反比(或与两轮的啮合圆半径成反比)。这一结论也适用于圆锥齿轮、带轮、链轮以及摩擦轮的传动中。

在机械传动中，常把主动轮和从动轮的角速度的比值称为传动比，记为 i_{12}，即

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{9-24}$$

将式(9-15)及式(9-23)代入上式，得

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{z_2}{z_1} \tag{9-25}$$

根据上式可得点 A 的速度大小为

$$v_A=O_2A\omega_2=O_2A\frac{z_1}{z_2}\omega_1=O_2A\frac{z_1}{z_2}\frac{n\pi}{30}=9.95\text{m/s}$$

故点 C 的速度大小为 $v_C=9.95\text{m/s}$，轨迹为半径 25cm 的圆。

例 9-3 圆轮绕定点 O 转动，并在此轮缘上绕一柔软而不可伸长的绳子，绳子下端悬一物体 A。设该轮半径 $R=0.2\text{m}$，其转动方程为 $\varphi=-t^2+4t$，φ 的单位为 rad，时间 t 的单位为 s。求当 $t=1\text{s}$ 时，轮缘上任一点 M 的速度和加速度及物体 A 的速度和加速度。

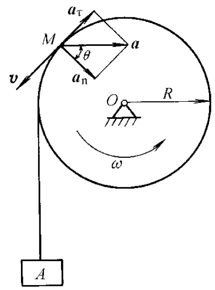

图 9-13 例 9-3 图

解 由转动方程求出圆轮在任一瞬时的角速度和角加速度

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=-2t+4$$

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=-2$$

当 $t=1\text{s}$ 时，则有

$$\omega=(-2\times1+4)\text{rad/s}=2\text{rad/s}$$

$$\alpha=-2\text{rad/s}^2$$

因此轮缘上任一点 M 的速度和加速度为

$$v=R\omega=0.2\text{m}\times2\text{rad/s}=0.4\text{m/s}$$

$$a_\tau=R\alpha=0.2\text{m}\times(-2)\text{rad/s}^2=-0.4\text{m/s}^2$$

$$a_n=R\omega^2=0.2\text{m}\times(-2\text{rad/s})^2=0.8\text{m/s}^2$$

它们的方向如图 9-13 所示。

M 点的全加速度及其偏角为

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{(-0.4\text{m/s}^2)^2+(0.8\text{m/s}^2)^2}=0.894\text{m/s}^2$$

$$\theta=\arctan\frac{|\alpha|}{\omega^2}=\arctan\frac{2}{2^2}=26°34'$$

因为 ω 与 α 的正负号相反，于是 v 与 a_τ 的指向也相反，圆轮此时作匀减速运动，故知：全加速度 a 偏向与圆轮转向相反的一边。

现在求物体 A 的速度和加速度。因为绳子不可伸长，故知物体 A 沿铅垂线移动的距离 s_A 与点 M 在同一时间内所走过的弧长 s_M 相等，且方向一致，即 $s_A(t)=s_M(t)$，此式两边对时间求一阶和二阶导数，得

$$v_A=v_M$$

$$a_A=a_{M\tau}$$

这就是说，物体 A 的速度和加速度的代数值与轮缘上点 M 的速度和切向加速度的代数值分别相等，因此

$$v_A=0.4\text{m/s}$$

$$a_A=-0.4\text{m/s}^2$$

这表明物体 A 的速度方向是向下的，而加速度的方向是向上的。

思 考 题

9-1 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$和$\dfrac{dr}{dt}$、$\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$和$\dfrac{dv}{dt}$有何不同？

9-2 刚体作平动时，其上的某一点 M 的轨迹是否一定在一个平面内？

9-3 定轴转动刚体上哪些点的加速度：①大小相等；②方向相同；③大小相等，方向也相同？

9-4 钻头钻孔时，它的运动是不是定轴转动？为什么？

9-5 在直线轨道上行驶的火车，其车轮是否作定轴转动？

9-6 如果刚体上每一点的轨迹都是圆，这刚体是否一定作定轴转动？为什么？

9-7 有人说："刚体绕定轴转动时，角加速度为正，表示加速转动，角加速度为负，表示减速运动。"这种说法正确吗？

习 题

9-1 机车以等速 $v_0=20\text{m/s}$ 沿直线轨道行驶，机车车轮的半径为 1m。设车轮只滚动而不滑动，将轮缘上的点 M 在轨道上起始位置取为坐标原点，并沿轨道取 x 轴。求点 M 的运动方程和加速度。

9-2 如图 9-14 所示，摇杆机构的滑杆 AB 以等速 u 向上运动，试分别用直角坐标法和自然法建立摇杆上点 C 的运动方程，并求此点在 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$时的速度。假定初瞬时 $\varphi=0$，摇杆长 $OC=a$，$OD=L$。

9-3 半径为 $R=0.5\text{m}$ 的飞轮以等加速度由静止开始转动，经过 10s 后轮缘上各点获得速度 $v=100\text{m/s}$。求当 $t=15\text{s}$ 时，轮缘上一点的速度、切向加速度和法向加速度的大小。

9-4 如图 9-15 所示，动点在半径 $R=1\text{m}$ 的圆周上按 $v=20-Ct$ 的规律运动，其中 v 以 m/s 计，时间 t 以 s 计，C 为待定常数。设动点经过 A、B 两点时的速度分别为 $v_A=10\text{m/s}$，$v_B=5\text{m/s}$，A、B 两点的位置如图所示。试求动点由点 A 经过点 B 所需时间以及到达点 B 时的加速度。

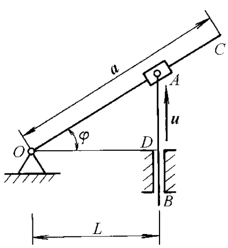

图 9-14 题 9-2 图

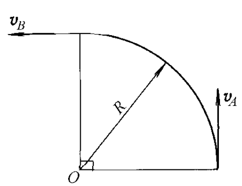

图 9-15 题 9-4 图

9-5 如图 9-16 所示，小环 M 在铅垂面内沿半径为 R 的半圆形曲杆 $ABCD$ 从点 A 由静止开始运动。已知在小环的运动过程中其切向加速度 $a_\tau=b\cos\varphi$，b 为常数。试求小环在点 B、点 C

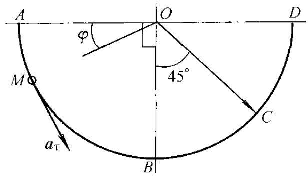

图 9-16　题 9-5 图

两处的速度和加速度。

9-6　一点在 Oxy 平面内以等加速度 a 运动。已知 $a=2\text{m/s}$，方向平行于 Ox 轴。试求当 $t=1\text{s}$ 时，该点轨迹的曲率半径。假设在初瞬时点的速度 $v_0=2\text{m/s}$，方向与 Oy 轴之间的夹角 $\alpha=30°$。

9-7　直角三角形板 ABM 由 AA' 杆带动在铅垂平面内运动。已知 AA' 杆和 BB' 杆的长度都等于 l，且有 $AB=A'B'$，如图 9-17 所示。设图示瞬时 AA' 杆的角速度为 ω，且角加速度 $\alpha=\omega^2$，试求板上点 M 的速度和加速度，并在图上画出它们的方向。

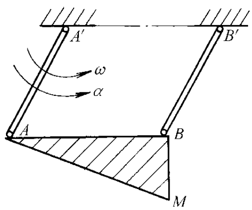

图 9-17　题 9-7 图

9-8　如图 9-18 所示，$AB=O_1O_2$，曲柄 O_1A 和 O_2B 的长度均等于 $2r$，且均以匀角速度 ω_0 分别绕 O_1 和 O_2 轴转动。固连于连杆 AB 上的齿轮 Ⅰ 带动齿轮 Ⅱ 绕轴 O 转动，两轮半径均为 r。求轮 Ⅰ 和轮 Ⅱ 轮缘上任一点的法向加速度。

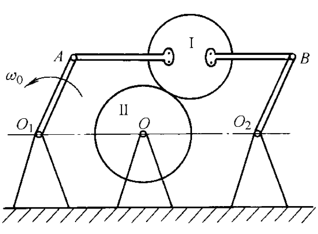

图 9-18　题 9-8 图