机类高职高专教育系列教材

工 程 力 学

主　　编　陈传胜　蔡宗福
副主编　何晓皖　王贤虎
参编人员　王刘宾　王苏玉　郭　薇
主　　审　杜兰萍

安徽科学技术出版社

前　　言

本书是根据机类高职高专职业技术教育系列教材《工程力学》教学大纲编写而成，适合作为高职高专机类和近机类相关专业 70～90 学时的工程力学课程的教学用书。

本书在编写过程中，充分汲取了高等职业技术院校近几年来的教学改革经验，力求体现高职高专培养技术应用型专门人才的特色，在理论阐述上以“必需、够用”为度，简化理论推导，强化应用，加强理论与工程实际的联系。每章附有思考题与习题，适应高职高专生源多样化的教学需求。

参加本书编写的有：安徽职业技术学院何晓皖（第一章、附录），安徽职业技术学院蔡宗福（第二章），安徽机电职业技术学院王苏玉（第三章），安徽水利水电职业技术学院王贤虎（第四章），安徽职业技术学院陈传胜（前言、绪论、第五、七章、第八章第一节），安庆职业技术学院王刘宾（第六、十章），安徽水利水电职业技术学院郭薇（第八章第二、三、四、五、六节，第九章）。全书由安徽职业技术学院陈传胜、蔡宗福任主编，何晓皖、王贤虎任副主编。

本书由安徽职业技术学院杜兰萍和安徽工业经济职业技术学院王业生两位副教授担任主审，两位同志为本书的编写提出了很多宝贵的意见，谨此致谢！

由于编写时间仓促，加之编者水平有限，书中缺点与错误在所难免，殷切希望广大读者提出批评和指正。

编　者

目　　录

第二篇 材料力学

绪　论

一、工程力学的研究对象

本教材是针对高职高专教育机类和近机类专业相关编写的，主要内容包括静力学、材料力学两个部分。

静力学是研究物体系统的平衡问题，平衡是机械运动的特殊形式，所以在工程力学中首先要研究物体受力后的平衡条件以及它在工程中的应用，这是静力学部分的主要任务。

材料力学部分的主要任务是研究构件在外力作用下的变形、受力和破坏的规律，为合理设计构件提供有关强度、刚度和稳定性分析的基本理论和方法。

二、工程力学的研究方法

工程力学和其他学科一样，其研究方法离不开认识过程的客观规律。工程力学的研究方法是：从实践中发现问题，经过抽象、综合和归纳，建立公理或提出合理的假设，再用数学演绎和逻辑推理的方法获得定理和结论，然后再通过实践来验证理论的正确性。

观察和实验是认识力学规律的重要实践环节。人们通过观察生活和生产实践中的各种现象，并通过实验抓住主要因素，忽略次要因素，经过分析、综合和归纳，总结出力学的最基本规律。比如力矩和力偶的概念、二力平衡公理、力的平行四边形法则等。

在观察和实验的基础上，用抽象化的方法建立理想的力学模型。抽象化就是在客观事物的复杂现象中，抓住主要因素，忽略次要的、偶然性的因素，深入事物本质，明确事物间的内在联系。但是抽象化的方法是有条件的、相对的，随着研究问题条件的改变，原来抽象的力学模型就不一定适用了。

在建立力学模型的基础上，根据公理、定律和基本假设，借助数学的方法，通过演绎、推理，得到各种形式正确的具有物理意义和实用价值的定理和结论。

工程力学是前人经过无数次“实践—理论—实践”的循环反复过程，使认识不断深化和提高，逐步总结和归纳出一整套关于物体机械运动的一般规律及构件强度、刚度和稳定性计算的合理方法。因此，作为当代的学生学习并接受工程力学的知识是完全必要的，并要在生产实践中应用、验证和发展工程力学。

三、学习工程力学的目的

工程力学是现代工程技术的重要基本理论之一，无论是工程结构、机械与电气设备、控制与自动化、生产工艺等科学技术都需要工程力学。因此，工程技术人员必须掌握一定的工程力学知识，以便在生产实践中应用这些规律，探索与专业结合的技术改革的途径，促进科学技术的发展。

工程力学是工程类专业教学计划中一门重要的技术基础课，它是其他技术课和专业课的基础。此外，由于工程力学本身的特点，学习工程力学也有助于学生树立辩证唯物主义的世界观，培养正确的分析问题和解决问题的能力，为今后解决生产实际问题打下一定的基础。

第一篇 静力学

静力学是研究物体在力系作用下的平衡规律的科学。

所谓力系，是指作用于物体上的一群力。静力学中的平衡是指物体相对于地面保持静止或做匀速直线运动的状态。物体的平衡总是暂时的和相对的。例如地面上的建筑物，相对地面是静止的，但它要随着地球的自转和公转不断地运动，所以平衡是相对的。还比如在直线轨道上运行的列车，当牵引力和摩擦力等阻力相等时做匀速直线运动，但这种受力关系很难时刻维持平衡，所以平衡是暂时的。

工程实际中的许多物体，在力的作用下，它们的变形一般很微小，对平衡问题影响也很小，为了简化分析，我们把物体视为刚体。所谓刚体，是指在任何外力的作用下，物体的大小和形状始终保持不变的物体。静力学的研究对象仅限于刚体，所以又称之为刚体静力学。

物体在力系作用下处于平衡状态时，称该力系为平衡力系。作用于物体上的力系若使物体处于平衡状态，必须满足一定的条件，这些条件称为力系的平衡条件。如果作用于物体上的某一力系可以用另一力系来代替，而不改变原有的状态，这两个力系互称等效力系。如果一个力与一个力系等效，则称此力为该力系的合力，这个过程称为力的合成；而力系中的各个力称此合力的分力，将合力代换成分力的过程称为力的分解。在研究力学问题时，为方便地显示各种力系对物体作用的总体效应，用一个简单的等效力系（或一个力）代替一个复杂力系的过程称为力系的简化。力系的简化是刚体静力学的基本问题之一。

在静力学中主要研究两个问题：

1. 力系的简化

将一些比较复杂的力系用作用效果完全相同的简单力系或一个力来代替，称为力系的简化。

2. 力系的平衡

在设计构件时，必须先分析构件的受力情况，然后应用力系的平衡条件计算出所受的未知力，最后才能根据材料的性能确定构件的几何尺寸。

静力学在工程实践中应用广泛，而且也为材料力学的学习和后续课程的学习做好了准备，所以学好静力学非常重要。

第一章　静力学的基本概念

第一节　力 的 概 念

一、力的定义

力的概念是人们在长期的生产劳动和生活实践中逐步形成的，通过归纳、概括和科学的抽象而建立的。力是物体之间相互的机械作用，这种作用使物体的机械运动状态发生改变，或使物体产生变形。力使物体的运动状态发生改变的效应称为外效应，而使物体产生变形的效应称为内效应。刚体只考虑外效应；变形固体还要研究内效应。经验表明，力对物体作用的效应完全决定于以下力的三要素：

(1)力的大小。是物体相互作用的强弱程度。在国际单位制中，力的单位用牛顿(N)或千牛(kN)，1 kN=10^3 N。

(2)力的方向。包含力的方位和指向两方面的涵义。如重力的方向是“竖直向下”。“竖直”是力作用线的方位，“向下”是力的指向。

(3)力的作用位置。是指物体上承受力的部位。一般来说力的作用位置是一块面积或体积，称为分布力；而有些分布力分布的面积很小，可以近似看做一个点时，这样的力称为集中力。

如果改变了力的三要素中的任一要素，也就改变了力对物体的作用效应。

既然力是有大小和方向的量，所以力是矢量。可以用一带箭头的线段来表示，如图 1-1 所示，线段 AB 长度按一定的比例尺表示力 F 的大小，线段的方位和箭头的指向表示力的方向。线段的起点 A 或终点 B 表示力的作用点。线段 AB 的延长线(图中虚线)表示力的作用线。

本教材中，用黑体字母表示矢量，如 $\boldsymbol{F}$，用对应字母表示矢量的大小，如 F。

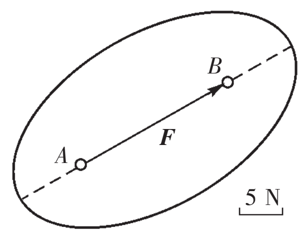

图 1-1　力的表示方法

(一) 力在直角坐标轴上的投影

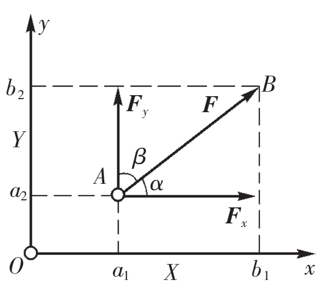

图 1-2　力的投影与分量

如图 1-2 所示，设力 $\boldsymbol{F}$ 作用于刚体上的 A 点，在力作用的平面内建立坐标系 Oxy，由力 $\boldsymbol{F}$ 的始端和末端分别向 x 轴作垂线，得垂足 a_1 和 b_1，则线段 a_1b_1 冠以相应的正负号称为力 $\boldsymbol{F}$ 在 x 轴上的投影，用 F_x 表示。即 $F_x=X= a_1b_1$；同理，力 $\boldsymbol{F}$ 在 y 轴上的投影用 F_y 表示，即$F_y=Y=a_2b_2$。

力在坐标轴上的投影是代数量，它的正负号规定是：力的投影由始端 a_1 到末端 b_1a_1(或始端 a_2 到末端 b_2)与坐标轴正向一致其投影取正号，反之取负号。投影与力的大小及方向有关，若已知力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为 F(恒为正值)，它与 x 轴的夹角为 α(取锐

角)，则力在轴上的投影 F_x、F_y 可按下式计算：

$$F_x = a_1b_1 = \pm F\cos\alpha$$

$$F_y = a_2b_2 = \pm F\sin\alpha$$

式中 α 为 $\boldsymbol{F}$ 与 x 轴正向所夹的锐角。

应当注意，力的投影和力的分量是两个不同的概念。投影是代数量，而分力是矢量；投影无所谓作用点，而分力作用点必须作用在原力的作用点上。另外仅在直角坐标系中在坐标轴上的投影的绝对值和力沿该轴的分量的大小相等。所以我们在求力的投影量时，只要解出力在直角坐标系中的 x 和 y 轴的正交分力即可。

(二) 合力投影定理

延伸：当物体上作用四个力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_4$ 时，用合力投影定理求合力：

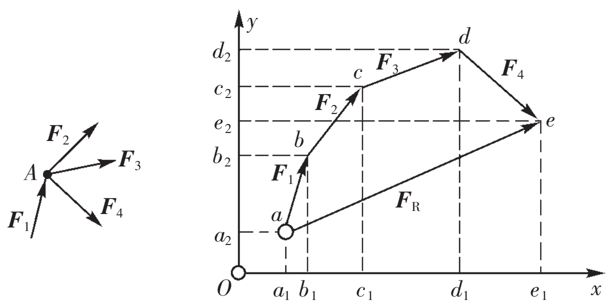

图 1-3

①当刚体作用 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、$\boldsymbol{F}_4$ 四个力时，其力的多边形 $abcde$ 如图 1-3 所示，封闭边 ae 表示该力系的合力矢 $\boldsymbol{F}_R$，在力的多边形所在平面内取一坐标系 Oxy，将所有的力矢都投影到 x 轴和 y 轴上。由图 1-3 可知：

$$a_1e_1 = a_1b_1 + b_1c_1 + c_1d_1 + d_1e_1$$

即
$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$$

同理
$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}$$

②将上述关系式推广到任意平面汇交力系的情形，当物体上作用 n 个力 F_1、F_2、…、F_n，用上述方法可得：

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \sum F_x$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \sum F_y$$

即合力在任一轴上的投影，等于各分力在同一轴上投影的代数和，这就是合力投影定理。

二、静力学公理

所谓公理就是无需证明就为大家在长期生活和生产实践中所公认的真理。静力学公理是静力学全部理论的基础。

公理 1　二力平衡公理

作用于同一刚体上的两个力，其平衡的必要与充分条件是：力的大小相等，方向相反，作用在同一直线上。如图 1-4(a)所示，物体置于水平面上，受到重力 $\boldsymbol{G}$ 和水平面上的作用力 $\boldsymbol{F}_N$ 作用而处于平衡状态，这两个力必须等值、反向、共线。反之，如图 1-4(b)所示，若作用于刚

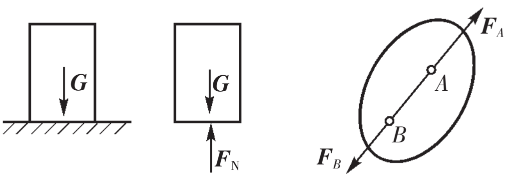

图 1-4　二力平衡公理

体上的两个力 F_A 和 F_B 等值、反向、共线，则该刚体必处于平衡状态。

此公理给出了作用于刚体上的最简力系平衡时所必须满足的条件，是推证其他力系平衡条件的基础。

二力构件　在两个力作用下处于平衡的构件一般称为二力构件，若二力构件的形状为杆状则称之为二力杆。工程实际中一些构件的重力和它所承受的载荷相比小得多，可以忽略不计，若它们只受两个外力作用而平衡，则可简化为二力构件。

如图 1-5(a)所示托架中，杆 AB 不计自重，在 A 端和 B 端分别受到力 $\boldsymbol{F}_A$、$\boldsymbol{F}_B$ 的作用而处于平衡，此两个力必过这两个力的作用点 A、B 的连线。再如图 1-5(b)所示的三铰拱桥结构中，不计拱桥自重时，在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，BC 半拱 $\boldsymbol{F}_B$、$\boldsymbol{F}_C$ 作用处于平衡，则这两个力的作用线与两个力的作用点 B、C 的连线重合[见图 1-5(c)]。

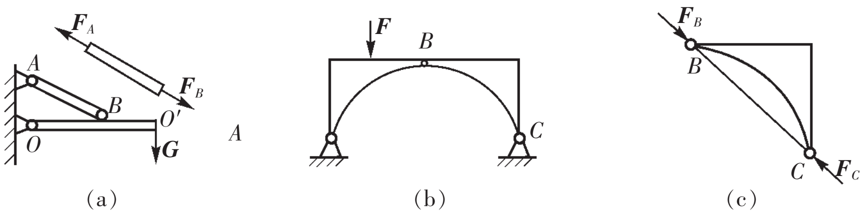

图 1-5　二力构件和二力杆

公理 2　加减平衡力系公理

在作用于刚体上的任意力系中，加上或减去一个或多个平衡力系，并不改变原力系对刚体的作用效应，此即加减平衡力系公理。

由上述公理可引申出力的可传性原理：

推论 1　力的可传性原理

作用于刚体上某点的力，可沿其作用线滑移到该刚体上的任何位置而不会改变原力对刚体的作用效应。如图 1-6 所示，刚体上 A 点受力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，在 $\boldsymbol{F}$ 的作用线上的 B 点加上一对平衡力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$，且 $F=F_1=F_2$，则 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 又形成一对平衡力，根据公理 2，减去 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}_2$ 不会影响原有力的作用效应，则剩下的 $\boldsymbol{F}_1$ 与原先的力 $\boldsymbol{F}$ 等效。这也就证明了力的可传性原理。

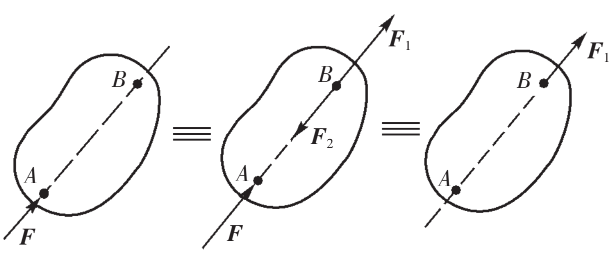

图 1-6　加减平衡力系公理

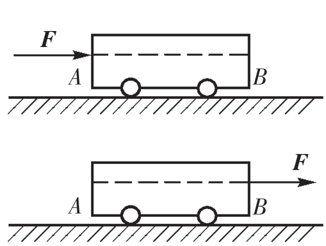

图 1-7　力的可传性原理

图 1-7 所示的小车，A 点的作用力 $\boldsymbol{F}$ 和 B 点的作用力 $\boldsymbol{F}$ 对小车的作用效应完全相同。

由此原理可知：力对刚体的作用效应，取决于力的大小、方向、作用线。必须指出，力的可传性原理只适用于刚体。

公理 3　力的平行四边形公理

作用于物体上同一点的两个力，可以合成为一个合力，合力也作用于该点，其大小和方向可用此两力为邻边所构成的平行四边形的对角线来表示，此即力的平行四边形公理。如图 1－8所示，$\boldsymbol{F}_R$ 是 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 的合力，其运算也应按矢量运算法则进行，其矢量合成式为

$$\boldsymbol{F}_R=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$$

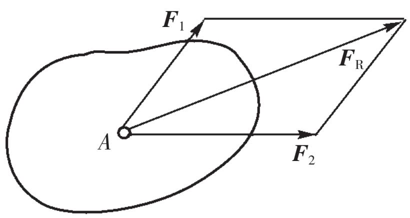

图 1－8　力的平行四边形公理

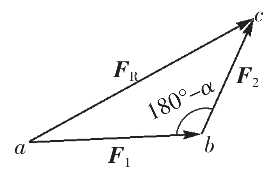

图 1－9　力的三角形法则

在求共点两个力的合力时，我们常采用力的三角形法则：如图 1－9 所示，从刚体外任选一点 a 作矢量 ab 代表力 $\boldsymbol{F}_1$，然后从 ab 的终点作 bc 代表力 $\boldsymbol{F}_2$，最后连起点 a 与终点 c 得到矢量 ac，则 ac 就代表合力矢 $\boldsymbol{F}_R$。分力矢与合力矢所构成的三角形 abc 称为力的三角形。这种合成方法称为力的三角形法则。

一个力也可以分解为两个分力，分解也按力的平行四边形公理来进行。显然，由已知力为对角线可作无穷多个平行四边形，如图 1－10 所示，故必须附加一定的条件，才可能得到确切的结果。附加的条件可能为：①规定两个分力的方向；②规定其中一个分力的大小和方向；③规定两个分力的大小。

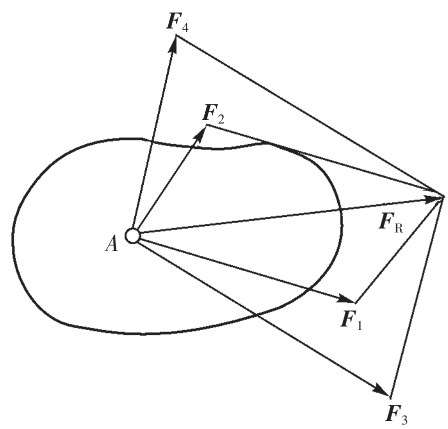

图 1－10　力的分解

推论 2　三力平衡汇交原理

刚体受同一平面内互不平行的三个力作用而平衡时，则此三力的作用线必然汇交于一点。

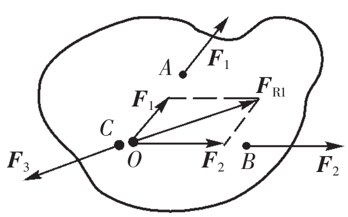

图 1－11　三力平衡汇交原理

证明：设在刚体上三点 A、B、C 分别作用有力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$，它们互不平行，且为平衡力系，如图 1－11 所示，根据力的可传性原理，将力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 移至汇交点 O，根据力的平行四边形公理，得合力 $\boldsymbol{F}_{R1}$，则力 $\boldsymbol{F}_3$ 与 $\boldsymbol{F}_{R1}$ 平衡，由公理 1 知，$\boldsymbol{F}_3$ 与 $\boldsymbol{F}_{R1}$ 必共线，所以力 $\boldsymbol{F}_3$ 的作用线必过点 O。

公理 4　作用力与反作用力公理

两物体间的作用力与反作用力，总是大小相等、方向相反，沿同一作用线，分别同时作用于两个相互作用的物体上，此即作用力与反作用力公理。

物体间的作用力与反作用力总是同时出现，同时消失。可见，自然界中的力总是成对地存在，而且同时分别作用在相互作用的两个物体上。这个公理概括了任何两个物体间的相互作用的关系，不论对刚体或变形体，不管物体是静止的还是运动的都适用。应该注意，作用力与反作用力虽然等值、反向、共线，但它们不能平衡，因为二者分别作用在两个物体上，不可与二力平衡公理混淆起来。

第二节　力对点之矩

一、力矩的概念

力不仅可以改变物体的移动状态，而且还能改变物体的转动状态。力使物体绕某点转动的力学效应，称为力对该点之矩。以扳手旋转螺母为例，如图 1－12 所示，设螺母能绕点 O 转动。由经验可知，螺母能否旋动，不仅取决于作用在扳手上的力 $\boldsymbol{F}$ 的大小，而且还与点 O 到 $\boldsymbol{F}$ 的作用线的垂直距离 d 有关。因此，用 $\boldsymbol{F}$ 与 d 的乘积作为力 $\boldsymbol{F}$ 使螺母绕点 O 转动效应的量度。其中距离 d 称为 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点的力臂，点 O 称为矩心。由于转动有逆时针和顺时针两个转向，则力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点之矩定义为：力的大小 F 与力臂 d 的乘积冠以适当的正负号，以符号 $M_O(\boldsymbol{F})$ 表示，记为

$$M_O(\boldsymbol{F}) = \pm Fd \tag{1-1}$$

通常规定：力使物体绕矩心逆时针方向转动时，力矩为正，反之为负。

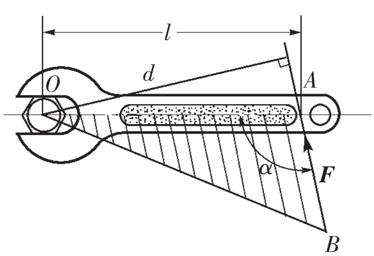

图 1－12　力对点之矩

由图 1－12 可见，力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点之矩的大小，也可以用三角形 OAB 的面积的两倍表示，即

$$M_O(\boldsymbol{F}) = \pm 2S_{\triangle ABO} \tag{1-2}$$

在国际单位制中，力矩的单位是牛顿·米（N·m）或千牛·米（kN·m）。

由上述分析可得力矩的性质：

(1) 力对点之矩，不仅取决于力的大小，还与矩心的位置有关。力矩随矩心的位置变化而变化。

(2) 力对任一点之矩，不因该力的作用点沿其作用线移动而改变，再次说明力是滑移矢量。

(3) 力的大小等于零或其作用线通过矩心时，力矩等于零。

二、合力矩定理

定理：平面汇交力系的合力对其平面内任一点的矩等于所有各分力对同一点之矩的代数和

证明：设刚体上的 A 点作用着一平面汇交力系，力系的合力为 $\boldsymbol{F}_R$。在力系所在的平面内任选一点 O，过 O 作 Oy 轴，且垂直于 OA，如图 1－13所示。则图中 $Ob_1, Ob_2, \cdots, Ob_n$ 分别等于力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 和 $\boldsymbol{F}_R$ 在 Oy 轴上的投影 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 和 Y_R。现分别计算 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 和

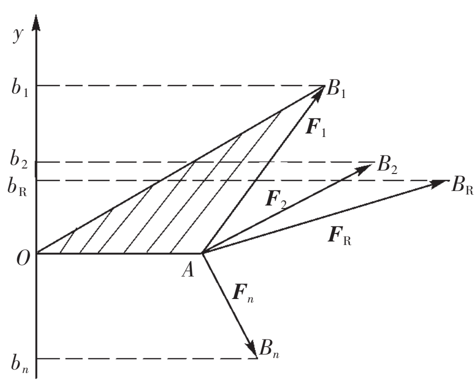

图 1－13　合力矩定理

$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 各分力对点 O 的力矩。

由图 1-11 可以看出：

$$\left.\begin{aligned} M_O(\boldsymbol{F}_1) &= Ob_1 \cdot OA = Y_1 \cdot OA \\ M_O(\boldsymbol{F}_2) &= Ob_2 \cdot OA = Y_2 \cdot OA \\ &\vdots \\ M_O(\boldsymbol{F}_n) &= Ob_n \cdot OA = Y_n \cdot OA \\ M_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}) &= Ob_{\mathrm{R}} \cdot OA = Y_{\mathrm{R}} \cdot OA \end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

根据合力投影定理

$$Y_{\mathrm{R}} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

两端乘以 OA 得

$$Y_{\mathrm{R}} \cdot OA = Y_1 \cdot OA + Y_2 \cdot OA + \cdots + Y_n \cdot OA$$

将式(1-3)代入得

$$M_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}) = M_O(\boldsymbol{F}_1) + M_O(\boldsymbol{F}_2) + \cdots + M_O(\boldsymbol{F}_n)$$

即

$$M_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}) = \sum M_O(\boldsymbol{F}) \tag{1-4}$$

上式称为合力矩定理。合力矩定理建立了合力对点之矩与分力对同一点之矩的关系。这个定理也适用于有合力的其他力系。

【例 1-1】 试计算图 1-14 中力 $\boldsymbol{F}$ 对 A 点之矩。

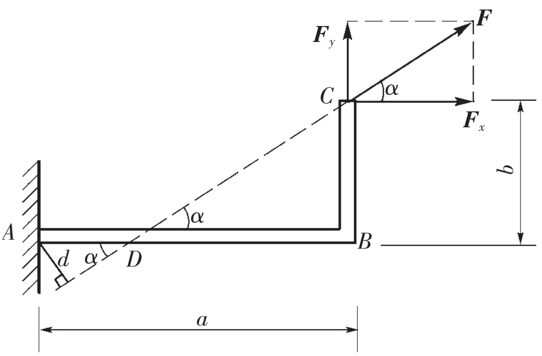

图 1-14

解 本题有两种解法。

(1) 由力矩的定义计算力 $\boldsymbol{F}$ 对 A 点之矩。

先求力臂 d。由图中几何关系有：

$d = AD\sin\alpha = (AB - DB)\sin\alpha = (AB - BC\cot\alpha)\sin\alpha = (a - b\cot\alpha)\sin\alpha = a\sin\alpha - b\cos\alpha$

所以

$$M_A(\boldsymbol{F}) = F \cdot d = F(a\sin\alpha - b\cos\alpha)$$

(2) 根据合力矩定理计算力 $\boldsymbol{F}$ 对 A 点之矩。

将力 $\boldsymbol{F}$ 在 C 点分解为两个正交的分力和，由合力矩定理可得

$$\begin{aligned} M_A(\boldsymbol{F}) &= M_A(\boldsymbol{F}_x) + M_A(\boldsymbol{F}_y) = -F_x \cdot b + F_y \cdot a \\ &= -F(b\cos\alpha + a\sin\alpha) = F(a\sin\alpha - b\cos\alpha) \end{aligned}$$

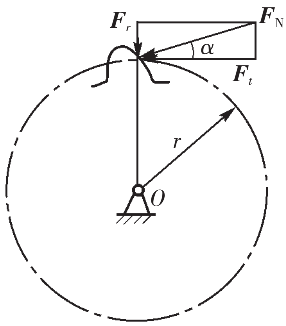

图 1-15　力矩的计算

本例两种解法的计算结果是相同的，当力臂不易确定时，用后一种方法较为简便。

【例 1-2】　在图 1-15 所示的直齿圆柱齿轮，已知齿面所受的法向力 $F_N = 1000$ N，压力角 $\alpha = 20°$，分度圆半径 $r = 60$ mm。试求齿面法向力 $\boldsymbol{F}_N$ 对轴心 O 的力矩。

解　齿面法向力 $\boldsymbol{F}_N$ 到轴心的距离（即力臂）没有直接给出，可将 $\boldsymbol{F}_N$ 正交分解为圆周力 $\boldsymbol{F}_t$ 和径向力 $\boldsymbol{F}_r$，应用合力矩定理得

$$
\begin{aligned}
M_O(\boldsymbol{F}_N) &= M_O(\boldsymbol{F}_t) + M_O(\boldsymbol{F}_r) = F_N\cos\alpha \times r + F_N\sin\alpha \times 0 \\
&= 1\,000 \times \cos 20° \times 0.06 \\
&= 56.4(\mathrm{N \cdot m})
\end{aligned}
$$

第三节　力　　偶

一、力偶　力偶矩

在日常生活和工程实际中经常见到物体受到两个大小相等、方向相反，但不在同一直线上的平行力作用的情况。例如，司机驾驶汽车时两手作用在方向盘上的力[图 1-16(a)]；工人用丝锥攻螺纹时两手加在扳手上的力[图 1-16(b)]；以及用两个手指拧动水龙头所加的力[图 1-16(c)]等。在力学中把这样一对等值、反向而不共线的平行力称为力偶，用符号（$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}'$）表示。两个力作用线之间的垂直距离称为力偶臂，两个力作用线所决定的平面称为力偶的作用面。

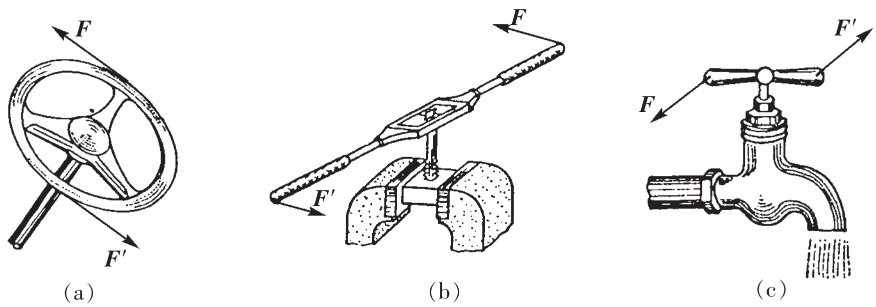

图 1-16　力偶的实例

实验表明，力偶对物体只能产生转动效应，且当力愈大或力偶臂愈大时，力偶使刚体转动效应就愈显著。在平面问题中，将力偶中的一个力的大小和力偶臂的乘积冠以正负号，作为力偶对物体转动效应的量度，称为力偶矩，用 M 或 $M(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}')$ 表示，如图 1-17 所示，即

$$M(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}') = F \cdot d = \pm 2S_{\triangle ABC} \quad (1-5)$$

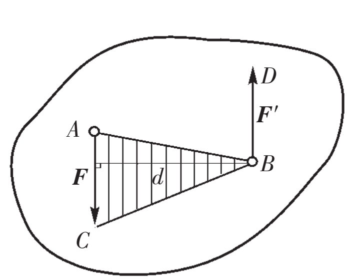

图 1-17

通常规定：力偶使物体逆时针方向转动时，力偶矩为正，反之为负。在国际单位制中，力偶矩的单位是牛顿·米(N·m)或千牛顿·米(kN·m)。

因此，力偶对物体的转动效应取决于力偶的三要素：力偶矩的大小、力偶的转向以及力偶作用面的方位。

物体上有两个或两个以上力偶作用时，这些力偶组成力偶系。

二、力偶的性质

根据力偶的定义，力偶具有以下性质。

（1）力偶无合力。由于力偶在任意坐标轴上的投影代数和为零，所以力偶无合力。力偶不能与一个力等效，也不能用一个力来平衡，力偶只能用力偶来平衡。

力偶对物体的作用效应与一个力对物体的作用效应是不相同的。一个力对物体有移动和转动两种效应；而一个力偶对物体只有转动效应，没有移动效应。因此力与力偶不能相互替代，也不能相互平衡。为此将力与力偶同时看成力系的两种基本元素。

（2）力偶对其作用面内任意点的力矩恒等于此力偶的力偶矩，而与矩心的位置无关。

图 1－18 所示一力偶的力偶矩 $M(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')=Fd$，对其作用面内任意点 O 的力矩，用组成力偶的两个力分别对 O 点力矩的代数和度量，即

$$M_O(\boldsymbol{F}')+M_O(\boldsymbol{F})=F'(d+x)-Fx=Fd=M(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$$

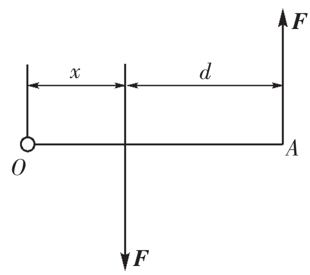

图 1－18

由此可见：力偶对作用平面上任意点 O 的力矩，等于其力偶矩，与矩心到力作用线的距离 x 无关，即与矩心的位置无关。

从力偶的上述性质可知，同一平面内的两个力偶，如果它们的力偶矩大小相等，转向相同，则此两力偶彼此等效，且可以相互替代，此即为力偶的等效性。由力偶的等效性，可以得出力偶的等效代换特性：

（1）力偶在它的作用面内可任意转移位置，而不会改变它对刚体的转动效应。

（2）力偶在不改变其三要素的条件下，可以同时改变力偶中力的大小和力偶臂的大小，不会改变力偶对刚体的转动效应。

值得注意的是，以上等效代换特性仅适用于刚体，不适用于变形体。

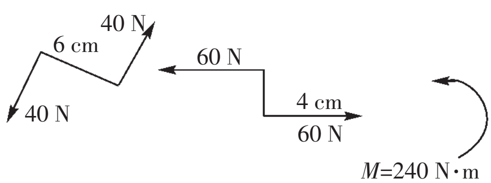

图 1－19　力偶的几种等效代换

由力偶的性质及其等效代换特性可见，力偶对刚体的转动效应完全取决于其三要素。因此，在表示平面力偶时，可以不标明力偶在平面上的具体位置以及组成力偶的力和力偶臂的大小，仅用一带箭头的弧线表示，并标出力偶矩的大小即可。图1－19所示是力偶的几种等效代换表示法。

三、平面力偶系的合成与平衡

（一）平面力偶系的合成

作用在物体同一平面内的各力偶组成平面力偶系。

设在刚体的同一平面内作用三个力偶（$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_1'$）（$\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_2'$）和（$\boldsymbol{F}_3,\boldsymbol{F}_3'$），如图 1－20(a)所示。各力偶矩分别为：

$$M_1 = F_1 \cdot d_1,\ M_2 = F_2 \cdot d_2,\ M_3 = -F_3 \cdot d_3$$

在力偶作用面内任取一线段 $AB=d$，按力偶等效条件，将这三个力偶都等效地改为以 d 为力偶臂的力偶($\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_1'$)（$\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_2'$）和($\boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_3'$)。如图 1-18(b)所示。由等效条件可知：

$$P_1 \cdot d = F_1 \cdot d_1,\quad P_2 \cdot d = F_2 \cdot d_2,\quad -P_3 \cdot d = -F_3 \cdot d_3$$

则等效变换后的三个力偶的力的大小可求出。然后移转各力偶，使它们的力偶臂都与 AB 重合，则原平面力偶系变换为作用于点 A、B 的两个共线力系[图 1-20(b)]。将这两个共线力系分别合成，得

$$\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_3$$

$$\boldsymbol{F}_R' = \boldsymbol{P}_1' + \boldsymbol{P}_2' - \boldsymbol{P}_3'$$

可见，力 $\boldsymbol{F}_R$ 与 $\boldsymbol{F}_R'$ 等值、反向、作用线平行但不共线，构成一新的力偶($\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{F}_R'$)，如图 1-20(c)所示。力偶($\boldsymbol{F}_R, \boldsymbol{F}_R'$)称为原来的三个力偶的合力偶。用 M 表示此合力偶矩，则

$$M = F_R\, d = (P_1 + P_2 - P_3)d = P_1 \cdot d + P_2 \cdot d - P_3 \cdot d = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 - F_3 \cdot d_3$$

所以 $$M = M_1 + M_2 + M_3$$

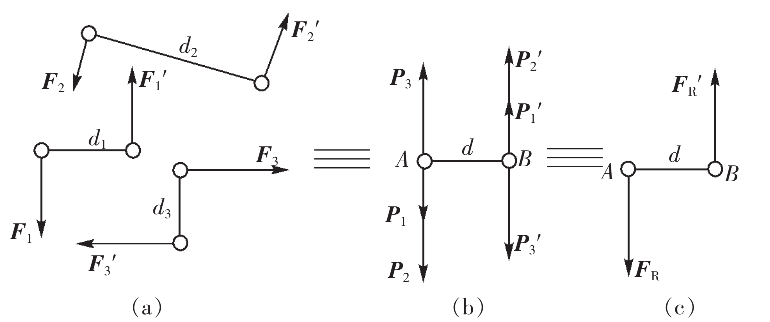

图 1-20　平面力偶系的合成

若作用在同一平面内有 n 个力偶，则上式可以推广为：

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum M \tag{1-6}$$

由此可得到如下结论：平面力偶系可以合成为一合力偶，此合力偶的力偶矩等于力偶系中各力偶的力偶矩的代数和。

(二) 平面力偶系的平衡条件

平面力偶系中可以用它的合力偶等效代替，因此，若合力偶矩等于零，则原力偶系必定平衡；反之若原力偶系平衡，则合力偶矩必等于零。由此可得到平面力偶系平衡的必要与充分条件：平面力偶系中所有各力偶的力偶矩的代数和等于零。即：

$$\sum M = 0 \tag{1-7}$$

平面力偶系有一个平衡方程，可以求解一个未知量。

【例 1-3】 如图 1-21 所示，电动机轴通过联轴器与工作轴相连，联轴器上 4 个螺栓 A、B、C、D 的孔心均匀地分布在同一圆周上，此圆的直径 $d=150$ mm，电动机轴传给联轴器的力偶矩$M=2.5$ kN·m，试求每个螺栓所受的力为多少？

解　取联轴器为研究对象，作用于联轴器上的力有电动机传给联轴器的力偶、每个螺栓的反力，受力图如图所示。设 4 个螺栓的受力均匀，即 $F_1=F_2=F_3=F_4=F$，则组成两个力偶

并与电动机传给联轴器的力偶平衡。

由 $\sum M=0$， $M-F\times AC-F\times BD=0$

解得 $F=\dfrac{M}{2d}=\dfrac{2.5}{2\times0.15}=8.33(\mathrm{kN})$

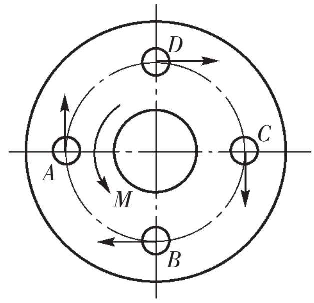

图 1－21

【例 1－4】 横梁 AB 长 l，A 端为固定铰支座，B 端用杆 BC 支撑［图 1－22(a)］。梁上作用一力偶，其力偶矩为 M。梁和杆自重均不计。试求铰链 A 的约束力和杆 BC 的受力。

解 取梁 AB 为研究对象。梁 AB 上作用有力偶矩为 M 的力偶及铰链 A 处的约束力 $\boldsymbol{F}_A$ 与杆 BC 的约束力 $\boldsymbol{F}_B$ 而处于平衡。由于力偶必须由力偶平衡，$\boldsymbol{F}_A$ 与 $\boldsymbol{F}_B$ 必组成一力偶，其转向与 M 相反，由此可确定 $\boldsymbol{F}_A$、$\boldsymbol{F}_B$ 的指向［图 1－22(b)］。由力偶系平衡条件

$$\sum M=0, M-F_B l\cos45^\circ=0$$

得 $$F_A=F_B=\sqrt{2}M/l$$

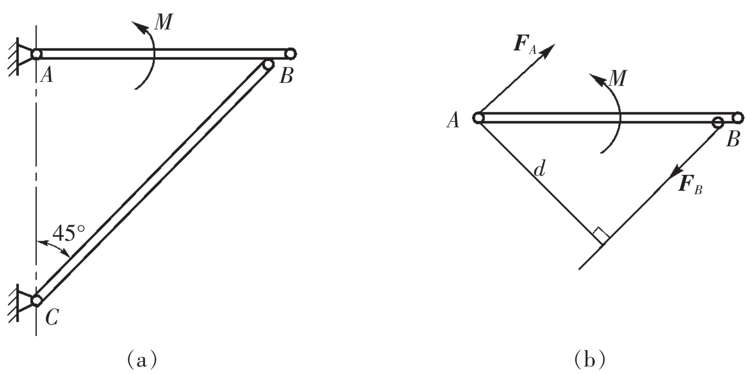

图 1－22 平面力偶系的平衡例题

第四节 力的平移定理

由力的可传性原理可知，力可以沿其作用线滑移到刚体上任意一点，而不改变力对刚体的作用效应。但当力平行于原来的作用线移动到刚体上任意一点时，力对刚体的作用效应便会改变，为了进行力系的简化，将力等效地平行移动，给出如下定理：

力的平移定理：作用于刚体上的力可以平行移动到刚体上的任意一指定点，但必须同时在该力与指定点所决定的平面内附加一力偶，其力偶矩等于原力对指定点之矩

证明：设力 $\boldsymbol{F}$ 作用于刚体上 A 点，如图 1－23 所示。为将力 $\boldsymbol{F}$ 等效地平行移动到刚体上任意一点 B，根据加减平衡力系公理，在 B 点加上两个等值、反向的力 $\boldsymbol{F}'$ 和 $\boldsymbol{F}''$，并使它们与力 $\boldsymbol{F}$ 平行且大小相等，如图 1－23(b)所示。显然，力 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$ 和 $\boldsymbol{F}''$ 组成的力系与原力 $\boldsymbol{F}$ 等效。由于在力系 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}'$ 和 $\boldsymbol{F}''$ 中，力 $\boldsymbol{F}$ 与力 $\boldsymbol{F}''$ 等值、反向且作用线平行，它们组成力偶($\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}''$)。于是作用在 $\boldsymbol{B}$ 点的力 $\boldsymbol{F}'$ 和力偶($\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}''$)与原力 $\boldsymbol{F}$ 等效。亦即把作用于 A 点的力 $\boldsymbol{F}$ 平行移动到任意一点 B，但同时附加了一个力偶，如图 1－23(c)所示。由图可见，附加力偶的力偶矩为：

$$m=F\cdot d=M_B(\boldsymbol{F})$$