普通高等工科教育规划教材

工 程 力 学 II

通 用 部 分

哈尔滨工业大学国家工科力学基地　组编

主　编　程　靳

参　编　程燕平　李　涛

　　　　毕贤顺　王　刚

机 械 工 业 出 版 社

本书内容包括原国家教委颁布的高等工科院校理论力学及材料力学基本要求的内容。为满足21世纪教学改革的需要，本书引入了笛卡尔张量、连续介质力学基本理论及流体力学基础以及几种大型力学通用程序的介绍。增添这些内容的目的是使工科大学生对力学的基本概念、基础理论及力学中的物理量有更深入的理解，并能正确使用几种大型力学通用程序。

本书共三册，第Ⅰ册为基础部分，包括刚体静力学（原理论力学的静力学）及变形体静力学（原材料力学中杆、轴、梁等内容），适用于少学时类专业。第Ⅱ册为通用部分，含运动学、动力学、连续介质力学及组合变形等，适用于中学时类专业。第Ⅲ册为专题部分，含原理论力学、材料力学的专题及力学通用程序介绍，适用于多学时类专业。

本书可作为高等工科院校各专业理论力学、材料力学（统称工程力学）课程的教材，可作为夜大、电大、函授大学相应专业的自学和函授教材，也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

工程力学．Ⅱ．通用部分/程靳主编．—北京：机械工业出版社，2002.7

普通高等工科教育规划教材

ISBN 7-111-09997-4

Ⅰ．工…　Ⅱ．程…　Ⅲ．工程力学-高等学校-教材　Ⅳ．TB12

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第048762号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

责任编辑：季顺利　版式设计：张世琴　责任校对：李秋荣

封面设计：姚　毅　责任印制：路　琳

北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2002年8月第1版·第1次印刷

1000mm×1400mm B5·11.125印张·423千字

0 001—4 000册

定价：25.00元

序

高等学校工科（这里“工科”特指机械、建筑、交通、航空航天等类型专业）的力学课程在传统上由“理论力学”及“材料力学”组成。然而高等学校工科力学课程究竟应包含哪些内容，多年来一直是教育界和力学界讨论的话题之一。应该说，力学课程的内容是随着时间、时代而改变的。由于科学技术的不断发展，力学课程的内容也应不断变化。

在20世纪70年代之前，由于计算机很少，在力学计算上大量采用手算，当时设置的“理论力学”及“材料力学”课程内容适应并满足了当时的需要。比如压力机机身的刚度计算就简化为曲梁的计算，用材料力学方法就可解决。而现在由于计算机的大量采用，对这一问题可采用有限元法计算，或者使用通用程序。这表明，以前的力学课程强调手算（这部分内容一般要求学生熟练掌握，并占用大量学时）是适应当时的需要的，但不满足21世纪的需要。

在21世纪，高等工科院校学生掌握坚实而宽广的力学基础是最重要的。例如，大量构件的强度、刚度计算，机构的运动学、动力学分析等，虽然有多种大型通用程序，但在使用时必先将实际问题化为力学模型，而这一工作要求使用者有较强的力学基础。要善于进行受力分析及运动分析，要清楚地理解有限运动与无穷小变形之区别，要善于将实际材料化为某些理想材料的本构方程，要正确理解力学中的各类物理量，如应力张量、应变张量等。这其中许多内容属连续介质力学范畴，在过去的“理论力学”、“材料力学”中是欠缺的。

一些先进国家工科力学的内容与20世纪70年代前相比已经有很大的不同。其内容虽然包括我国现有“理论力学”、“材料力学”内容，但手算内容要求很浅（学生了解即可），甚至删去。大量增添了连续介质力学（含流体力学）内容，且较详细，这些内容是我国现有“理论力学”、“材料力学”中所没有的。多数力学课程中都包含笛卡尔张量（少数学校甚至讲述普遍张量），学生只有具备张量概念才能正确理解应力张量、应变张量等力学概念，这些都是使用通用程序时必须具备的知识，无法依靠计算机。

基于这些想法，我们编写了“工程力学”教材，以替代原有的“理论力学”、“材料力学”教材。

本书可供高等工科院校各类型专业作为力学教材（替代“理论力学”、“材料力学”）使用。

本书分第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ册出版。第Ⅰ册为基础部分，包括刚体静力学（原理论

力学的静力学）及变形体静力学（原材料力学的杆、轴、梁等基本内容），适用于少学时类专业，即第Ⅰ册相当于传统教材中少学时类使用的《工程力学》教材。第Ⅱ册为通用部分，包括运动学、动力学、连续介质力学（含笛卡尔张量及流体力学）及组合变形、强度理论等，适用于中学时类专业，即第Ⅱ册涵盖了近机类中学时专业使用的传统理论力学、材料力学教材内容。对于一般院校中学时类专业，仅使用第Ⅰ、Ⅱ两册即可。第Ⅲ册为专题部分，其内容包括原理论力学、材料力学的专题部分及若干大型力学通用程序介绍，适用于多学时类专业。带* 的内容各专业可根据需要，选取其中的若干章、节讲授。为便于老师讲授本教材，我们编辑印刷了与本书配套的教学参考书，每个学校可免费提供 2 套。有需要者请向哈尔滨工业大学理论力学教研室函索。

本书由博士生导师程靳教授主编，参加编写的有程燕平（第一、二、三、四、十九、二十、二十一、二十二、二十三、二十四、二十八章），李涛（第五、六、七、八、九、二十五、二十六、二十七章），程靳（第十、十一、十二、十三、十四、二十九、三十、三十一、三十二、三十三章），毕贤顺（第十五、十六、十七、十八章），王刚（第三十四章），全书由程靳、程燕平统稿。

哈尔滨工程大学朱加铭教授审阅了书稿，并提出了许多宝贵意见，特此致谢。

本书是国内首次在高等工科院校基础力学课程中加入连续介质力学内容。由于我们水平和条件所限，一定有许多缺点和错误，衷心希望大家提出批评和指正。

编者

2002 年 4 月

目　　录

序

第三篇　连续介质力学

引言 …… 1
第十章　笛卡尔张量 …… 3
　第一节　指标记法 …… 3

　第四节　张量的梯度　散度　旋度 …… 21
　第五节　二阶张量 …… 24
　习题 …… 28
第十一章　连续介质的运动学 …… 30
　第一节　连续介质运动的两种描述 …… 30
　第二节　连续介质的有限运动 …… 34
　第三节　小变形 …… 37
　习题 …… 40
第十二章　连续介质的基本定律 …… 42
　第一节　应力张量 …… 42
　第二节　一点应力状态 …… 44
　第三节　质量守恒与连续性方程 …… 52
　第四节　动量定理与运动方程 …… 54
　习题 …… 57
第十三章　本构方程 …… 60
　第一节　本构方程原理 …… 60
　第二节　线弹性物质 …… 62
　第三节　其他物质的本构方程 …… 66
　习题 …… 69
第十四章　流体 …… 70
　第一节　流体的本构方程 …… 70
　第二节　流体的基本方程 …… 72
　第三节　不可压缩流体 …… 74
　第四节　理想流体 …… 76
　习题 …… 79

第四篇　运　动　学

引言 …… 81
第十五章　点的运动学 …… 83
　第一节　矢量法 …… 83
　第二节　直角坐标法 …… 84
　第三节　自然法 …… 89
　*第四节　点的速度和加速度在柱坐标和极坐标中的投影 …… 95
　*第五节　点的速度和加速度在球坐标中的投影 …… 97
　习题 …… 99
第十六章　刚体的简单运动 …… 102
　第一节　刚体的平行移动 …… 102
　第二节　刚体绕定轴的转动 …… 103
　第三节　转动刚体内各点的速度和加速度 …… 104
　第四节　轮系的传动比 …… 106
　第五节　以矢量表示角速度和角加速度　以矢积表示点的速度和加速度 …… 108
　习题 …… 110
第十七章　点的合成运动 …… 114
　第一节　相对运动　牵连运动　绝对运动 …… 114
　第二节　点的速度合成定理 …… 118
　第三节　点的加速度合成定理 …… 122
　习题 …… 132
第十八章　刚体的平面运动 …… 138
　第一节　刚体平面运动的概述和运动分解 …… 138
　第二节　求平面图形内各点速度的基点法 …… 140

第三节 求平面图形内各点速度的瞬心法 …… 146
第四节 用基点法求平面图形内各点的加速度 …… 151
第五节 运动学综合应用举例 …… 155
习题 …… 162

第五篇 动 力 学

引言 …… 171
第十九章 质点动力学的基本方程 …… 173
第一节 动力学的基本定律 …… 173
第二节 质点运动微分方程 …… 174
第三节 质点动力学的两类基本问题 …… 175
习题 …… 181
第二十章 动量定理 …… 184
第一节 动量与冲量 …… 184
第二节 动量定理 …… 186
第三节 质心运动定理 …… 189
习题 …… 192
第二十一章 动量矩定理 …… 196
第一节 质点和质点系的动量矩 …… 196
第二节 动量矩定理 …… 198
第三节 刚体绕定轴转动微分方程 …… 201
第四节 刚体对轴的转动惯量 …… 203
第五节 质点系相对于质心的动量矩定理 …… 208
第六节 刚体平面运动微分方程 …… 210
习题 …… 213
第二十二章 动能定理 …… 218
第一节 力的功 …… 218
第二节 质点和质点系的动能 …… 221
第三节 动能定理 …… 223
第四节 功率 功率方程 机械效率 …… 229
第五节 普遍定理的综合应用举例 …… 232
习题 …… 238
第二十三章 达朗贝尔原理 …… 246
第一节 惯性力 质点的达朗贝尔原理 …… 246
第二节 质点系的达朗贝尔原理 …… 247
第三节 刚体惯性力系的简化 …… 249
第四节 绕定轴转动刚体的轴承动约束力 …… 255
第五节 用动静法分析常加速度下杆件的动应力 …… 259
习题 …… 261
第二十四章 虚位移原理 …… 265
第一节 约束 虚位移 虚功 …… 265
第二节 虚位移原理 …… 268
习题 …… 275

附录 D 习题答案 …… 332

第三篇　连续介质力学

引　言

物质由分子组成，分子由原子组成，物质是不连续的。连续介质模型不考虑微观上的不连续，认为物质是连续且无限可分的，物质的任何一个无限小的体积可以认为是一个质点，每个质点周围都有物质存在且与之连续。利用这种连续介质模型有利于使用各种数学工具，由此建立的大量理论和方程可以相当准确地反映物质宏观力学行为的规律。

连续介质力学描述物质宏观现象间的关系，而不考虑微观尺度上的物理结构。连续介质力学研究物质在各种载荷下的响应，它主要由两部分组成：

(1) 各种物质都必须遵循的普遍原理，如物质运动时的几何关系(运动学关系)以及质量守恒、动量及动量矩守恒、能量守恒等等。

(2) 物质的本构关系，即研究理想化物质与变形、载荷等有关的物理属性。一般用方程来描述这种关系，称之为本构方程。

任何物理定律，如果是正确的，那就必然是客观的，与观察者无关，即与坐标系(参照系)无关。只有张量方程能满足这一要求，因为用张量表达的方程与坐标系无关。因此为了描述连续介质力学的各种规律，应该使用张量来建立方程。

本书不使用一般的张量，因为一般的张量对于工科低年级学生来讲可能是稍难一些。本书引入了笛卡尔张量，并用之描述连续介质力学的各种方程。对于大学生，笛卡尔张量是很容易理解和接受的。

第十章　笛卡尔张量

由于连续介质力学的基本方程一般用张量来表达，因此本章是学习连续介质力学的重要数学基础。由于笛卡尔坐标系是很简单的坐标系，因此在这样坐标系中成立的张量——笛卡尔张量也是很简单的张量。笛卡尔张量的概念和理论是很容易接受的。

第一节　指 标 记 法

一、哑指标与自由指标

考察下式

证明: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i=(a_j\boldsymbol{e}_j)\cdot\boldsymbol{e}_i=a_j\delta_{ji}=a_i$ 证毕。

例 10-9 设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶对称张量, $\boldsymbol{B}$ 为二阶反对称张量, 则 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}=0$。

证明: $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}=(A_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j):(B_{mn}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_n)=A_{ij}B_{mn}\delta_{jm}\delta_{in}=A_{ij}B_{ji}$ (a)

由 $A_{ij}=A_{ji}$, 因此

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}=A_{ij}B_{ji}=A_{ji}B_{ji}=A_{ij}B_{ij} \tag{b}$$

后一等式是将哑指标 ij 换成 ji 而得。由于 $B_{ij}=-B_{ji}$ 因此式(a)变成

$$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}=A_{ij}B_{ji}=-A_{ij}B_{ij} \tag{c}$$

由(b)(c)两式得

$$A_{ij}B_{ij}=-A_{ij}B_{ij}$$

因此必有 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}=0$。

例 10-10 试证明欲求二阶张量的任意分量, 只需用同名基矢量点积即可, 即

$$T_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_j$$

此式在求张量的分量时很有用。

证明: $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_i\cdot(T_{kl}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l)\cdot\boldsymbol{e}_j=T_{kl}\delta_{ik}\delta_{lj}=T_{ij}$ 证毕。

例 10-11 试将张量 $[A_{ij}]=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&1\\3&1&0\end{bmatrix}$ 分解为对称与反对称二部分。

解 对称部分为

$$\frac{1}{2}([A_{ij}]+[A_{ji}])=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&3&1\\2&1&0\end{bmatrix}$$

反对称部分为 $$\frac{1}{2}([A_{ij}]-[A_{ji}])=\begin{bmatrix}0&1&-1\\-1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

例 10-12 试用分量记法证明: $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$

证明: 令 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{v}$

则 $v_i=e_{ijk}b_jc_k$

$$u_m=e_{mni}a_ne_{ijk}b_jc_k=(\delta_{mj}\delta_{nk}-\delta_{mk}\delta_{nj})a_nb_jc_k$$
$$=(a_nb_mc_n-a_nb_nc_m)=(a_nc_n)b_m-(a_nb_n)c_m$$

故 $$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$ 证毕。

例 10-13 $\boldsymbol{B}$ 为二阶张量, $\boldsymbol{a}$ 为矢量, 试证: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{T}\cdot\boldsymbol{a}$

证明: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{B}=a_i\boldsymbol{e}_i\cdot B_{jk}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k=a_iB_{jk}\delta_{ij}\boldsymbol{e}_k=a_iB_{ik}\boldsymbol{e}_k$

$\boldsymbol{B}^{T}\cdot\boldsymbol{a}=B_{kj}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k\cdot a_i\boldsymbol{e}_i=a_iB_{kj}\delta_{ki}\boldsymbol{e}_j=a_iB_{ij}\boldsymbol{e}_j=a_iB_{jk}\boldsymbol{e}_k$ 证毕。

第四节　张量的梯度　散度　旋度

一、张量函数的导数和微分

若张量 $T(t)$ 是某个标量参数 t 的函数, 即 T 的每个分量都是参数 t 的函数, 则导数 $dT(t)/dt$ 表示张量 T 的每一个分量分别对 t 求导数, 运算结果得到与 T 同阶的张量, 求导数的法则与普通导数相同。

若张量 $T(x_1、x_2、x_3)$ 是坐标的函数, 即张量的每个分量都是坐标 $x_1、x_2、x_3$ 的函数, 则张量 T 对坐标 x_i 的导数就是把张量的每个分量分别对坐标求导数, 其运算结果仍然是张量, 阶数比原张量高一阶。

设张量 $T_{ij\cdots k}$ 为 S 阶张量, 在新坐标系中的导数为

$$\frac{\partial T_{i'j'\cdots k'}}{\partial x_{m'}}=\frac{\partial T_{i'j'\cdots k'}}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial x_{m'}}=\frac{\partial T_{i'j'\cdots k'}}{\partial x_m}\beta_{mm'}$$

由于变换系数 β_{ij} 与坐标参数无关, 因此上式变为

$$\frac{\partial T_{i'j'\cdots k'}}{\partial x_{m'}}=\beta_{i'i}\beta_{j'j}\cdots\beta_{k'k}\beta_{mm'}\frac{\partial T_{ij\cdots k}}{\partial x_m}$$

这表明 $\frac{\partial T_{ij\cdots k}}{\partial x_m}$ 是 $S+1$ 阶张量。

二、哈密顿(Hamilton) 算子

定义: 哈密顿算子为

$$\nabla=e_i\partial_i \tag{10-27}$$

式中

$$\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{10-28}$$

三、梯度(Gradient)

设张量 $T=T_{ijk}e_ie_je_k$, 定义 T 的梯度为

$$\mathrm{grad}T=\nabla T=e_s\partial_s(T_{ijk}e_ie_je_k)=T_{ijk,s}e_se_ie_je_k \tag{10-29}$$

式中左端 $\mathrm{grad}T$ 或 ∇T 为梯度的不变性记法, 右端为并矢记法, 其中的 $T_{ijk,s}$ 为分量记法。

梯度也可以用分量记法写为

$$\partial_s T_{ijk}=T_{ijk,s} \tag{10-30}$$

上面的记法可推广至任意阶张量。

张量梯度运算的结果仍为张量, 其阶数比原张量高一阶, 即 n 阶张量的梯度为 $n+1$ 阶。

标量 $\varphi(x_i)$ 的梯度为一阶张量(矢量), 其方向指向标量场 $\varphi(x_i)$ 中变化最大的方向。

grad = è = ${}_{,i}e_i$

矢量的梯度为二阶张量。例如 $v = v_i e_i$, 有

gradv = $v_{i,j}\, e_i e_j$

四、散度(Divergence)

张量 $T = T_{ijk} e_i e_j e_k$ 的散度定义为

divT = è ¡¤T = e_s ${}_s$ ¡¤($T_{ijk} e_i e_j e_k$) = $T_{ijk,s}\,\delta_{si} e_j e_k$ = $T_{ijk,i}\, e_j e_k$ (10-31)

式中左端为散度的不变性记法, 右端为并矢记法, 其中的 $T_{ijk,i}$ 为分量记法。

散度也可以用分量记法写为

è ${}_i T_{ijk}$ = $T_{ijk,i}$ (10-32)

上面的记法可推广至任意阶张量, 显然, 0 阶张量(标量)没有散度运算。

散度运算出现了哑指标, 因此它是张量的缩并。n 阶张量的散度为 n- 1 阶张量。

矢量的散度为标量

divv = è ¡¤v = $v_{i,j}$

五、拉普拉斯(Laplace)算子

称 è ^{2}= è ·è 为拉普拉斯算子。设 为标量, 则

è ^{2} = div grad = è ¡¤(è) (10-33)

或更具体的写为

è ^{2} = div ${}_{,i}$ = ${}_{,i}$

六、旋度(Curl)

设张量 $T = T_{ijk} e_i e_j e_k$, 定义张量 T 的旋度为

CurlT = è × T = e_s ${}_s$× ($T_{ijk} e_i e_j e_k$) = $T_{ijk,s}\, e_{sip}\, e_p e_j e_k$ (10-34)

张量经旋度运算后, 其阶数不变。由于旋度是 è 与张量的叉乘, 因此只有一阶及一阶以上的张量才有旋度运算。

设 v 为一矢量, 矢量 v 的旋度有时亦可记为 rotv 。

Curlv = è × v = $v_{i,k}\, e_{kij}\, e_j$

七、高斯(Gauss)散度定理

高斯散度定理又称高斯积分定理, 该定理可写为

$$\int_V \text{divu}\,dV = \int_S u\ \text{¡¤}dA \qquad (10\text{-}35)$$

或用算子记为

$$\int_V \text{è ¡¤u}\,dV = \int_S u\ \text{¡¤}dA \qquad (10\text{-}36)$$

式中 V 为区域的体积, S 为其表面, u 为 v 中的矢量场, dA 为区域表面 S 上的面元矢量。该定理表明: 在任何矢量场 u 中, 它的散度遍及整个闭区域的积分, 等于其垂

直边界的分量遍及边界的积分。

由于

$$\mathrm{div}u = u_{l,l},\ dV = e_{ijk}dr^i ds^j dt^k$$

$$u = u_l e_l,\ dA = dA_k e_k$$

因此 Gauss 定理可写为

$$\int_V u_{l,l} e_{ijk} dr^i ds^j dt^k = \int_S u_l dA_l \qquad (10\text{-}37)$$

对二维情况, Gauss 定理可写为

$$\int_A \mathrm{div}u dA = \oint_C u ¡¤ dn \qquad (10\text{-}38)$$

式中 A 为闭合曲线 c 所围区域, dn 是曲线 c 的外法线矢量。

八、斯托克斯(Stokes) 定理

该定理又称斯托克斯旋度定理, 该定理可写为

$$\oint_C u ¡¤ ds = \int_A (\mathrm{Curl}\ u) ¡¤ dA = \int_A è \times u ¡¤ dA \qquad (10\text{-}39)$$

式中 A 是闭合曲线 c 所围之区域, ds 是 c 上的线元矢量, dA 是曲面 A 上的面元矢量, 由

$$dA = dr_m dt_n e_{mnl} e_l \qquad \mathrm{Curl}u = u_{j,i} e_{ijk} e_k$$

可将斯托克斯定理用分量记法写为

$$\oint_c u_i ds_i = e_{ijk} e_{mnk} \int_A u_{j,i} dr_m dt_n \qquad (10\text{-}40)$$

左端的积分称为 u 沿曲线 c 的环量。

例 10-14　试证: è　· dr= d　, 式中 $dr = dx_j e_j$ 为线元矢量,　为标量。

证明: è　· dr = ($_{,i}e_i$) · ($dx_j e_j$) = $_{,i}dx_j \delta_{ij}$ = $_{,i}dx_i$ = d

例 10-15　试证梯度场没有旋度。

设　为标量场,　的梯度的旋度为

$$\mathrm{Curl\ grad} \quad = è \times è \quad = \quad _{,ji} e_{ijk} e_k = 0$$

上式所以等于零, 是由于 $_{,ji}$ = $_{,ij}$, 即 $_{,ji}$ 关于 j i 是对称的, 但 e_{ijk} 关于 j i 是反对称的, 因此连并后必为零, 即梯度场的旋度为零。

例 10-16　试证旋度场没有散度。

设v 为矢量场, 其旋度的散度为

$$\mathrm{div\ Curl}v = è ¡¤ è \times v = \mathrm{div}(v_{j,i} e_{ijk} e_k) = (v_{j,i} e_{ijk})_{,k} = v_{j,ik} e_{ijk} = 0$$

上面应用了 $e_{ijk,k} = 0$(由 e_{ijk}的定义知, 它与坐标无关)。上式之所以等于零, 是因为 $v_{j\cdot ik}$关于 ik 是对称的(即 $v_{j\cdot ik} = v_{j\cdot ki}$), 而 e_{ijk} 关于 ik 是反对称的。

例 10-17　试证 Curl(　u)=　Curlu-　u× grad

证 明: $\mathrm{Curl}(\ u) = e_i e_{ijk}\ _{,j}(\ u_k) = e_i e_{ijk} u_{k,j} + e_i e_{ijk} u_k\ _{,j} = \ e_i e_{ijk} u_{k,j} - e_i e_{ijk} u_j\ _{,k}$ =

Curlu-　u× grad

例 10-18　**试证** $\mathrm{div}(\ u) = u\cdot \mathrm{grad}\ + \ \mathrm{divu}$

证明: $\mathrm{div}(\ u) = \grave{e}\ \cdot(\ u) = e_i\ _i\cdot(\ u_k e_k) = \delta_{ik}(\ u_k)_{,i} = (\ u_k)_{,k} = \ _{,k}u_k + \ u_{k,k} = u\cdot \mathrm{grad}\ + \ \mathrm{divu}$

第五节　二 阶 张 量

一、二阶张量与矢量的点积

设 B **为二阶张量**, a **为矢量**, **其点积为**

$$B\ ¡¤a = (B_{ij}e_ie_j)\ ¡¤(a_ke_k) = B_{ij}a_ke_i\delta_{jk} = B_{ij}a_je_i = u_ie_i = u \qquad (10\text{-}41)$$

显然, **二阶张量与任一矢量的点积结果为一个新的矢量**, **称矢量** u **为矢量** a **为“象”。可见**, <u>**二阶张量可以看作为一个算子**, **它可以把一个矢量映射为另一个矢量**,</u> **这是二阶张量的极为重要的性质。**

上面的不变性记法 $B\cdot a = u$ **也可以用分量记法写为**

$$u_i = B_{ij}a_j \qquad (10\text{-}42)$$

称 u_i **为以** a_j **为分量的矢量的象的分量。**

二、二阶张量的特征矢　特征值　特征方程

前面已指出, **二阶张量如同一个算子**, **用它点乘任一矢量**, **可以得到一个新的矢量。图** 10-1 **所示为某二阶张量** T, **当它点乘任一矢量** a **时**, **得到一个新的矢量** $b = T\cdot a$**。一般情况**, **矢量** b **的大小、方向都与** a **不同。**

如果能找到一个矢量 v, **它的象与** v **仅大小不同**, **而方向不变**, **如图** 10-1 **所示**, **即**

$$T\cdot v = \lambda v \qquad (10\text{-}43)$$

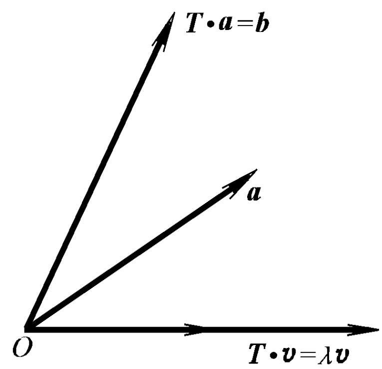

图　10-1

其中 λ**为标量**, **上式的分量形式为**

$$T_{ij}v_j = \lambda_j = \lambda\delta_{ij}v_j \qquad (10\text{-}44)$$

则称<u>v **为二阶张量** T **的特征矢量**, λ**称特征值**, **矢量** v **的方向称为二阶张量** T **的主方向或主轴**</u>**。显然**, **若** v **是** T **的特征矢量**, **则与** v **平行的任何矢量不论其模的大小如何**, **也都是** T **的特征矢量。**

式(10-44)**可以写为**

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij})v_j = 0 \qquad (10\text{-}45)$$

该式是关于 v_j **的齐次方程组成的方程组**, **它有非零解的条件是系数行列式为零**

$$\det(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0 \qquad (10\text{-}46)$$

即:

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

式(10-46)也可以用置换符号表示为

$$\frac{1}{6}(T_{il}-\lambda\delta_{il})(T_{jm}-\lambda\delta_{jm})(T_{kn}-\lambda\delta_{kn})e_{lmn}e_{ijk}=0$$

将其展开,得

$$\lambda^3 - T_{ii}\lambda^2 + \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji})\lambda - \det T_{ij} = 0 \qquad (10\text{-}47)$$

此式称为<u>二阶张量 T_{ij} 的特征方程式</u>。

式(10-47)是关于特征值 λ 的三次代数方程,它有三个根 λ_1、λ_2、λ_3。由于 λ 是 T 的特征值,而特征值是与坐标系的选择无关的,如图 10-1,$T \cdot v$ 中的 λ 是客观的,与坐标系无关,即方程式的根不随坐标系的变换而改变,因此,当坐标轴旋转变换时,三个根 λ_1、λ_2、λ_3 是不变的。

这表明,特征方程式(10-47)的系数在坐标变换时是不变的,称它们是<u>不变量</u>。这三个不变量记为

$$T_{\mathrm{I}} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$T_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{12} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} \qquad (10\text{-}48)$$

$$T_{\mathrm{III}} = \det T_{ij}$$

T_{I}、T_{II}、T_{III} 分别称为张量 T_{ij} 的第一、第二及第三不变量。

利用这三个不变量,特征方程可写为

$$\lambda^3 - T_{\mathrm{I}}\lambda^2 + T_{\mathrm{II}}\lambda - T_{\mathrm{III}} = 0 \qquad (10\text{-}49)$$

由代数方程根与系数的关系,有

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{I}} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ T_{\mathrm{II}} &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \\ T_{\mathrm{III}} &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned} \qquad (10\text{-}50)$$

由于特征方程是实系数的三次方程,因此至少有一个实根。这表明,任何二阶张量都至少有一个主方向。

可以证明,二阶对称张量的特征值皆为实数,因此二阶对称张量至少有三个主方向,而且互相正交,即二阶对称张量至少存在三个相互正交的主方向。

三、二阶对称张量的正规形式

对于一阶张量,可利用 $a_i = a \cdot e_i$ 来求得其分量。对于二阶张量也可以用这一方法来求得其分量。设 T 为二阶张量,则有

$$T_{ij} = e_i \cdot T \cdot e_j \qquad (10\text{-}51)$$

证明:$e_i \cdot T \cdot e_j = e_i \cdot T_{kl}e_ke_l \cdot e_j = T_{kl}\delta_{ik}\delta_{lj} = T_{ij}$　证毕。

设以某二阶对称张量 T 的三个互相正交的主方向为坐标轴,以 n_1、n_2、n_3 表示坐标轴的单位矢量,则该张量可以写成

$$T = T_{ij} n_i n_j$$

其分量为
$$T_{ij} = n_i \cdot T \cdot n_j$$

由于 n_1、n_2、n_3 为主方向的矢量,即特征矢量,因此必有 $T \cdot n_k = \lambda_k n_k$

于是得
$$T_{11} = n_1 \cdot T \cdot n_1 = n_1 \cdot (\lambda_1 n_1) = \lambda_1$$

同理得:$T_{22} = \lambda_2$, $T_{33} = \lambda_3$, $T_{12} = T_{21} = T_{23} = T_{32} = T_{31} = T_{13} = 0$

写为矩阵形式,为
$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

这表明,若以二阶对称张量的三个主轴为坐标轴,则对称张量可简化为对角线形式,此形式称为二阶对称张量的正规形式。

例 10-19　已知某张量 T 在某坐标系$\{0-e_1, e_2, e_3\}$中的矩阵为

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

试求 T 的三个不变量、特征方程、特征值及特征矢量。

解:$T_{\mathrm{I}} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = 2 + 3 - 3 = 2$

$$T_{\mathrm{II}} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -25$$

$$T_{\mathrm{III}} = \det|T_{ij}| = -50$$

从而得特征方程:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 25\lambda + 50 = 0$$

此式因式分解:$(\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 5) = 0$

从而得特征值为 $\lambda_1 = 2$　$\lambda_2 = 5$　$\lambda_3 = -5$

实际上特征值一般可直接由式(10-46)求出,即

$$|T_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 25) = 0$$

从而求出 $\lambda_1 = 2$　$\lambda_2 = 5$　$\lambda_3 = -5$。

特征矢量可由式(10-45)求出。取主方向的单位矢量 n 为特征矢量,其分量为 n_1、n_2、n_3,则有

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}) n_j = 0$$

对 $\lambda_1 = 2$,可得如下方程组

$$0 \times n_1 = 0$$

$$n_2 + 4n_3 = 0$$
$$4n_2 - 5n_3 = 0$$

又有
$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

解得 $n_2 = n_3 = 0, n_1 = \pm e_1$ 即 $\pm e_1$ 为 T 的一个主方向。对 $\lambda = 5$, 可得如下方程组

$$-3n_1 = 0$$
$$-2n_2 + 4n_3 = 0$$
$$4n_2 - 8n_3 = 0$$

再由 $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, 可求得 $n_1 = 0, n_2 = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}, n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$。

则特征矢量为 $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_2 + e_3)$

对应 $\lambda = -5$ 同样得出, 特征矢量为 $\pm \frac{1}{\sqrt{5}}(-e_2 + 2e_3)$

例 10-20　在坐标系 $\{0, -e_i\}$ 中, 某二阶对称张量 T 的矩阵形式为

$$[T_{ij}] = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}$$

试求其特征值及特征矢量。

解: 由特征方程(10-46), 有

$$(2 - \lambda)^2 (3 - \lambda) = 0$$

解得 $\lambda = 3, \lambda = \lambda = 2$。由式(10-45), 对应 $\lambda = 3$, 可解得特征矢量为 $\pm e_3$。对应 $\lambda = \lambda = 2$, 由式(10-45) 得

$$0 \cdot n_1 = 0, 0 \cdot n_2 = 0, n_3 = 0$$

以及 $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 0$, 解得 $n_1^2 + n_2^2 = 1$。因此任意与 e_3 正交的单位矢量 $n = n_1 e_1 + n_2 e_2$ 都是特征矢量。

例 10-21　试证二阶对称张量的三个主方向互相正交。

证明: 设 $\lambda、\lambda、\lambda$ 不等, 令 $n_1、n_2$ 是 $\lambda、\lambda$ 对应的特征矢量, 由

$$T \cdot n_1 = \lambda n_1 \qquad T \cdot n_2 = \lambda n_2$$

两端分别点乘 n_2 和 n_1, 有

$$n_2 \cdot T \cdot n_1 = n_2 \cdot (\lambda n_1) = \lambda n_1 \cdot n_2$$
$$n_1 \cdot T \cdot n_2 = n_1 \cdot (\lambda n_2) = \lambda n_1 \cdot n_2$$

由于 T 是对称张量, 有

$$n_1 \cdot T \cdot n_2 = n_2 \cdot T^T \cdot n_1 = n_2 \cdot T \cdot n_1$$

因此 $$\lambda n_1 \cdot n_2 = \lambda n_2 \cdot n_1$$
即 $$(\lambda - \lambda) n_1 \cdot n_2 = 0$$
由于 $\lambda \neq \lambda$，故必有 $n_1 \cdot n_2 = 0$，即 n_1 与 n_2 必正交。

同理可证 n_1、n_2、n_3 必互相正交。

若 $\lambda = \lambda = \lambda$，由

$$T \cdot n_1 = \lambda n_1 \qquad T \cdot n_2 = \lambda n_2$$

对任意标量 α 和 β 必有

$$T \cdot (\alpha n_1 + \beta n_2) = \lambda(\alpha n_1 + \beta n_2)$$

可见，$\alpha n_1 + \beta n_2$ 也是特征矢量，特征值也是 λ。显然，在 n_1、n_2 所确定的平面上的任意矢量都是 T 的特征矢量，且特征值皆为 λ。由于 $\lambda \neq \lambda$，显然与特征值 λ 对应的特征矢量 n_3 与该平面垂直。因而必存在三个互相正交的主方向。

当 $\lambda = \lambda = \lambda = \lambda$ 时，有

$$T \cdot n_1 = \lambda n_1 \qquad T \cdot n_2 = \lambda n_2 \qquad T \cdot n_3 = \lambda n_3$$

对任意标量 α、β、γ 必有

$$T \cdot (\alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3) = \lambda(\alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma n_3)$$

因此任一矢量都是特征矢量，且特征值皆为 λ。当然必存在三个相互正交的主方向。

习　题

10-1　用指标记法简写下列各式:

(1) $dy = \frac{y}{x_1}dx_1 + \frac{y}{x_2}dx_2 + \frac{y}{x_3}dx_3$

(2) $\frac{dx_k}{dt} = \frac{x_k}{x_1}\frac{x_1}{t} + \frac{x_k}{x_2}\frac{x_2}{t} + \frac{x_k}{x_3}\frac{x_3}{t}$

(3) $ds^2 = g_{11}dx_1dx_1 + g_{12}dx_1dx_2 + g_{13}dx_1dx_3 + g_{21}dx_2dx_1 + g_{22}dx_2dx_2 + g_{23}dx_2dx_3 + g_{31}dx_3dx_1 + g_{32}dx_3dx_2 + g_{33}dx_3dx_3$

10-2　将下列各式展开

(1) $y_i = a_{ijk}b_jc_k$　　(2) $a_{ij}x_j = c_i + b_i$

(3) $B_{ij} = A_{ijkl}B_{kl}$　　(4) $\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} - K^2(\theta) = 0$

10-3　已知 $[A_{ij}] = \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{matrix}$ 计算 A_{ii}，$A_{ij}A_{ij}$，$A_{ij}A_{ji}$

10-4　证明下列带指标的方程与相应的矩阵方程的等价性:

(1) $D_{ji} = B_{ij}$　　$[D] = [B]^T$

(2) $b_i = B_{ij}a_j$　　$[b] = [B][a]$

(3) $S = B_{ij}a_ia_j$　　$[S] = [a]^T[B][a]$

(4) $D_{ik} = B_{ij}c_{jk}$　　$[D] = [B][C]$