

周生国 编

工程检测技术

北京理工大学出版社

工程检测技术

周生国编

北京理工大学出版社

前 言

本书是为北京广播电视大学电气与机械工程类专业编写的专业基础课教材。在制定本教材大纲时，参考了北京电大前两届讲授的《仪表与检测技术》和1985年中央电大讲授的《工程检测技术》教学大纲的内容，并征求北京高校部分检测与自动化仪表专业教师的意见，最后于1985年6月在北京工业学院讨论定稿。

本书共三篇十一章：第一篇是检测技术中的基础知识，主要包括测量技术的基本概念和误差理论基础两章；第二篇是测量系统，包括组成电气测量系统的三个主要环节：传感器、中间变换器和记录仪器，以及测量数据的处理共四章；第三篇是非电参量的电测量，包括温度测量、压力测量、流量测量、力的测量和机械振动测量共五章。

本书在各章节的阐述中，着重于基本概念、基本工作原理和测量方法，并密切结合非电参量电测量的实际。但电测仪器的电子线路方面不属于本教材内容，没有加以分析。学完本课程后，读者能对工程检测的内容有一个完整的概念；能对一般被测参数的测量系统进行设计或选择一个合理的测量系统；能对常用仪表（包括传感器）正确使用、检验和性能分析；能对测量的参数进行数据处理和误差分析。

本书在内容的广度、深度和篇幅上都充分考虑到广播电视大学学员的程度和要求。本书不仅可当作电大学员的教材，对从事检测技术工作的工程技术人员也有一定的参考价值。

本书由北京工业学院周生国同志编写，张如洲副教授主审。在编写过程中，参考了许多作者的著作（见参考资料）并引用了部分内容和图表；北京工业学院喷气推进实验室的全体同志对编审工作给予了大力支持和帮助；韩广荣同志对全部书稿进行了审阅并提出了宝贵意见，特在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，错误与不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者 1986.1

目 录

第一篇 基础知识

第一章 测量技术的基本概念

§1-1	测量的基本概念	1
§1-2	测量系统的静态特性	1
§1-3	测量系统的动态特性	3

第二章 误差理论基础

§2-1	误差的基本概念及定义	12
§2-2	随机误差理论基础	15
§2-3	标准误差的计算方法	18
§2-4	间接测量误差的传递	23
§2-5	系统误差	26
§2-6	误差的合成	33

第二篇 测量系统

第三章 传感器

§3-1	电阻应变式传感器	38
§3-2	电感式传感器	45
§3-3	电容式传感器	51
§3-4	压电式传感器	57
§3-5	固态压阻式传感器	60
§3-6	霍尔式传感器	63
§3-7	传感器静态校准与特性指标	71

第四章 中间变换器

§4-1	电桥	77
§4-2	电阻应变仪	83
§4-3	电压放大器与电荷放大器	90
§4-4	模-数与数-模转换器	93

第五章 记录仪

§5-1	笔式记录仪	105
§5-2	X-Y 函数记录仪	106
§5-3	光线示波器	107
§5-4	磁带记录仪	120

第六章 测量数据处理

§6-1	有效数字与运算法则	128
§6-2	测量数据处理方法	129
§6-3	一元线性与非线性回归	132

第三篇 非电参量的电测量

第七章 温度测量

§7-1	温度的概念及温标	141
§7-2	温度计的种类和特点	143
§7-3	热电偶	144
§7-4	电阻温度计	171
§7-5	辐射式温度计	176

第八章 压力测量

§8-1	概述	189
§8-2	压力传感器	190
§8-3	测压系统的标定	201

第九章 流量测量

§9-1	差压式流量计	208
§9-2	靶式流量计	211
§9-3	涡轮流量计	212
§9-4	转子流量计	213
§9-5	椭圆齿轮流量计	215
§9-6	超声波流量计	217
§9-7	流量计的标定	219

第十章 力的测量

§10-1	力值传递标准	222
§10-2	测力传感器	226
§10-3	测力系统的标定	244

第十一章 机械振动测量

§11-1	概述	245
§11-2	振动基本理论知识	246
§11-3	测振传感器	255
§11-4	振动传感器的标定	263
§11-5	振动测量记录与分析仪器	267

附录 1	铂铑 ₁₀ -铂热电偶分度表	269
------	---------------------------------	-----

附录 2	镍铬-镍硅(镍铝)热电偶分度表	272
------	-----------------------	-----

附录 3	镍铬-考铜热电偶分度表	275
------	-------------------	-----

附录 4	铂铑 ₃₀ -铂铑 ₆ 热电偶分度表	277
------	--	-----

附录 5	铜-康铜热电偶分度表	281
------	------------------	-----

附录 6	铂热电阻分度表 ($R_0=46\Omega$)	282
------	----------------------------------	-----

附录 7	铂热电阻分度表 ($R_0=100\Omega$)	284
------	-----------------------------------	-----

附录 8	铜热电阻分度表 ($R_0=50\Omega$)	286
------	----------------------------------	-----

附录 9	铜热电阻分度表 ($R_0=100\Omega$)	287
------	-----------------------------------	-----

参考资料	288
------	-------	-----

第一篇 基础知识

第一章 测量技术的基本概念

§1-1 测量的基本概念

测量,是利用某种仪表或设备,通过实验的方法确定被测量的数量概念(数值大小)的认识过程,即测量是为确定被测对象的量值而进行的实验过程。实际上,测量过程是把被测量与同性质的标准量进行比较,而获得被测量为标准量的倍数。如测量某物体的质量,可通过天平或磅秤的砝码(性质相同)来与被测物进行直接比较。但在大多数场合下,无法将标准量直接与被测量进行比较,都需要进行某种变换后才能进行比较。例如:测量某容器中气体的压力,是无法用标准压力源直接与被测压力进行比较的。早期的测量方法是将标准压力(标准量)变换成压力表表盘上的刻度值,而被测压力变换成压力表指针的角位移,通过指针的角位移来与刻度值进行比较,从而获得被测压力的大小。这种测量方法,虽然标准量与被测量都经过变换,通常仍把这种测量方法称为直接测量,即直接从压力表的表盘上读出被测压力的数值。但是,这种测量方法必须在现场观测,而且只能测量稳态压力。如要检测容器中压力的变化过程,尤其是压力急剧变化的过程,用压力表来直接测量就不能满足要求了。

电子技术的发展,尤其是仪表与计算机技术的迅速发展,大大促进了测量技术的发展。目前,对绝大多数物理量、化学量、几何量,甚至生物医学参量的测量,都突破了原先用简单的仪表来进行直接测量的传统方法,新的方法就是非电参量电测法。这种方法是把被测非电参量通过各种相应的传感器变换成电参量,有时还需对变换后的电参量进行电量到电量的转换或放大,最后送入显示或记录仪表或计算机,进行数据的显示、记录和处理。这种被称为广义的测量,它包含了参量的感受、变换、传输、处理、显示与记录全部过程,是一种间接测量方法。

非电参量电测法具有以下一些优点:

- 1) 可对被测参量进行连续、自动记录;
- 2) 电参量可远距离传输,便于远距离测量或控制;
- 3) 可实现动态参量甚至瞬态参量的测量;
- 4) 可与计算机相联,进行数据的自动运算、分析与处理。

由于非电参量的上述优点,这种电测法在现代检测技术中应用得非常广泛。因此,本课程的主要内容着重叙述有关非电量电测系统的基本知识及其测试方法。

§1-2 测量系统的静态特性

所谓静态,是指被测量不随时间变化,或随时间变化非常缓慢的状态。测量系统的静态

特性是指被测量处于稳定状态时测量系统的输出与输入的关系，通常用非线性、迟滞和灵敏度等指标来表征。

一、非线性

一个理想的测量系统（没有迟滞和蠕变效应的情况），其静态特性可用一个多项式表示：

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n \quad (1-1)$$

式中 x —— 输入量；

y —— 输出量；

a_0, a_1, \dots, a_n —— 常数。

从式(1-1)可看出，输出量 y 与输入量 x 之间的关系，除了线性项 $a_0 + a_1 x$ 外，还有高次分项。当 $a_0 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ 时， $y = a_1 x$ ，这是理想的线性方程，可用图1-1中一条通过零点的直线表示，这是理想线性情况。

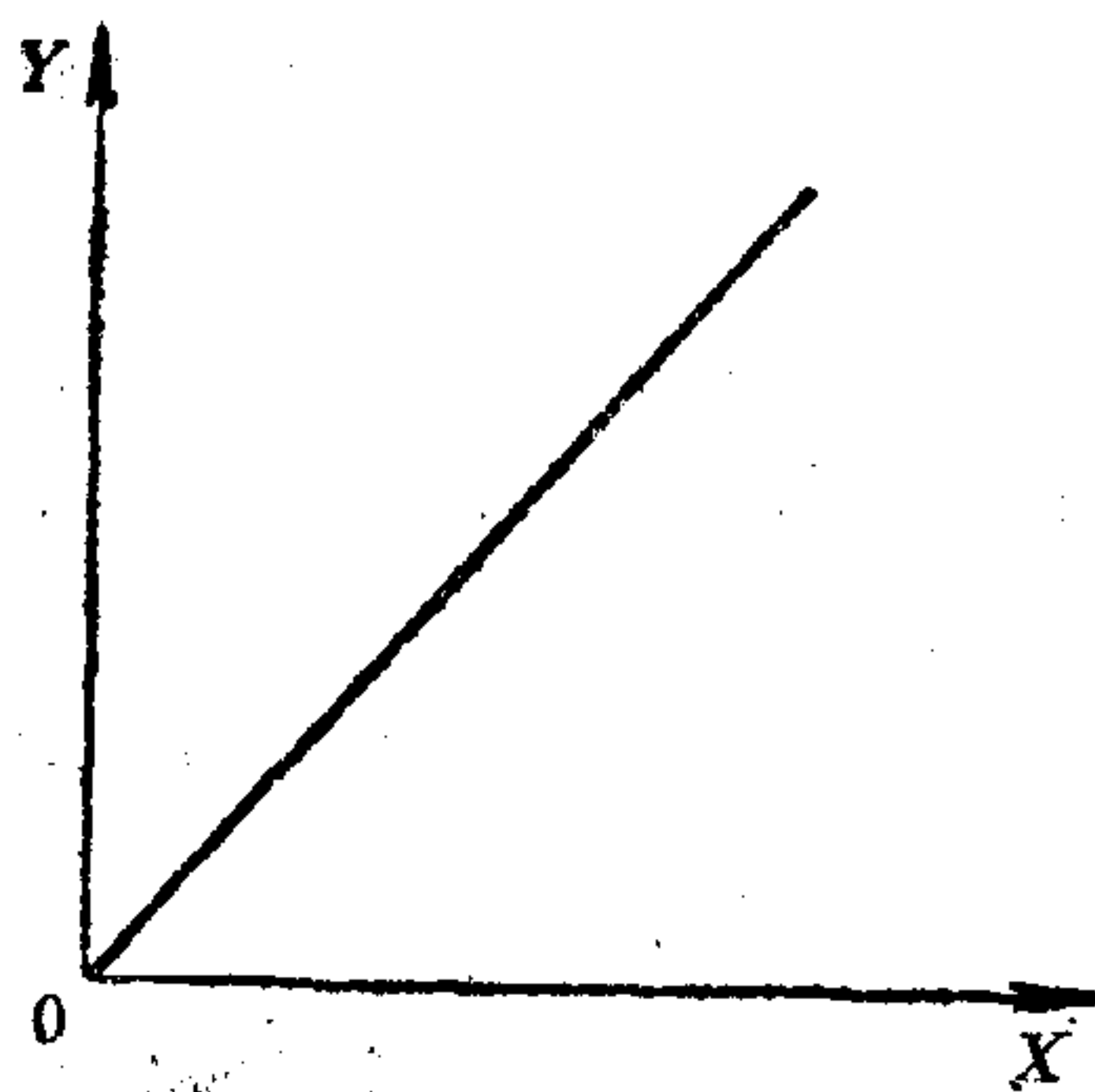


图 1-1 理想线性情况

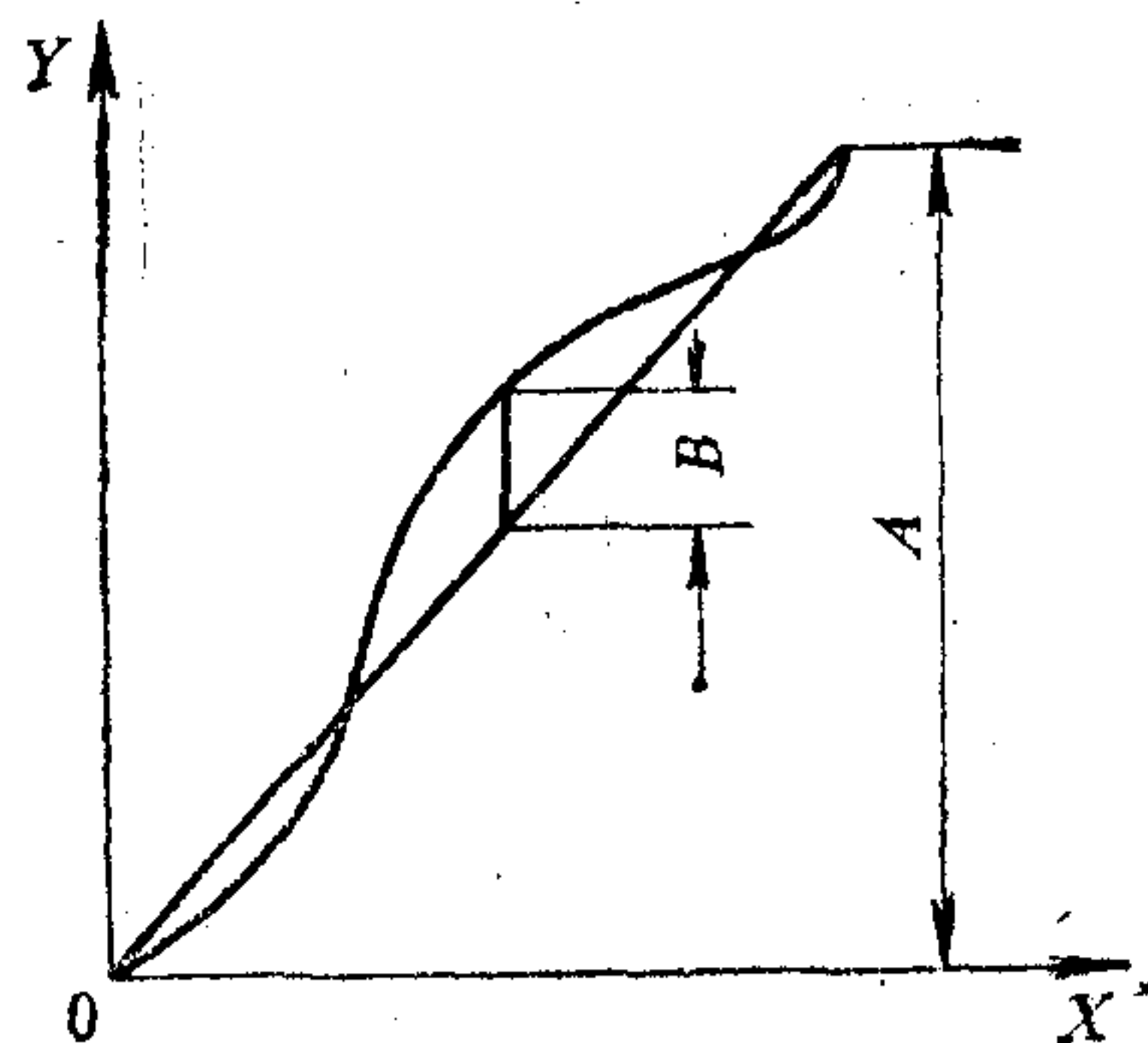


图 1-2 非线性偏差

实际的输出与输入关系并非理想情况，图1-2表示的是实际输出与输入的关系曲线（由实验所得的标定曲线）与拟合直线（或称参考直线）之间的关系。非线性是用标定曲线与拟合直线之间的最大偏差 B 与全量程输出范围 A 的百分数表示，即

$$\text{非线性} = \frac{B}{A} \times 100\% \quad (1-2)$$

拟合直线可由多种方法确定，详见测量数据处理一章。

二、迟滞

迟滞表示测量系统当输入量由小到大与由大到小所得输出量不一致的程度，如图1-3所示。迟滞在数值上是用同一输入量下最大的迟滞偏差 H 与全量程输出范围 A 的百分数表示，即：

$$\text{迟滞} = \frac{H}{A} \times 100\% \quad (1-3)$$

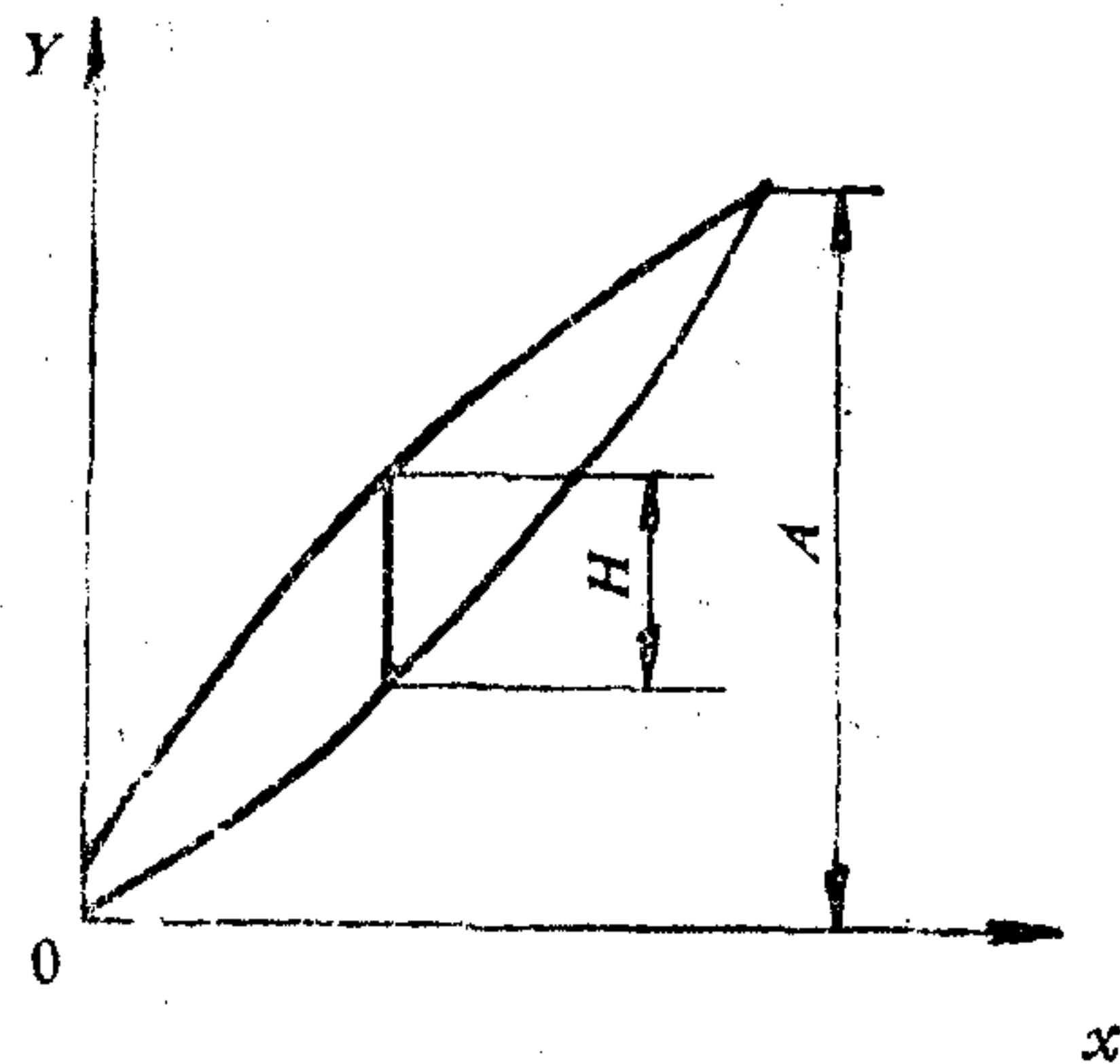


图 1-3 迟滞偏差

三、灵敏度

灵敏度是指测量系统在静态条件下输出量的变化量 Δy 对输入量的变化量 Δx 的比值,可用下式表示:

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{输出量的变化量}}{\text{输入量的变化量}}$$

对于线性系统,灵敏度为该直线的斜率,为一常数;对于非线性系统,灵敏度随输入量的变化而变化。

§1-3 测量系统的动态特性

一、传递函数

测量系统的动态特性的数学模型可用常系数线性微分方程式来描述,方程式的一般表达式如下:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n Y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} Y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dY}{dt} + a_0 Y \\ = b_m \frac{d^m X}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} X}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dX}{dt} + b_0 X \end{aligned} \quad (1-4)$$

式中 Y ——系统输出量;

X ——系统输入量;

a_0, a_1, \dots, a_n 和 b_0, b_1, \dots, b_m ——与系统结构参数有关的常数。

传递函数定义为在初始条件为零时,系统输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。

对式(1-4)取拉氏变换,并认为输入 $X(t)$ 和输出 $Y(t)$ 及各阶导数的初始值为零,则得

$$\begin{aligned} Y(S)(a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0) \\ = X(S)(b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0) \end{aligned} \quad (1-5)$$

式中 $Y(S)$ 和 $X(S)$ ——分别为系统输出量和系统输入量的拉氏变换。

根据上述对传递函数的定义,可得

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0} \quad (1-6)$$

式中 $H(S)$ ——系统的传递函数。

当输入量 $X(t) = Ae^{i\omega t}$ 时,则输出量 $Y(t) = Be^{i(\omega t + \varphi)}$,由此可以导出测量系统的频率响应函数的一般式为

$$H(j\omega) = \frac{Y(t)}{X(t)} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} \quad (1-7)$$

上式称为线性系统的频率响应函数,又称为正弦传递函数。

二、动态特性

1. 一阶系统的动态特性

在通常的测量中，典型的一阶测量系统如图1-4所示的一个简单的RC滤波电路和液柱式温度计等。下面以液柱式玻璃温度计为例进行分析。设 $T_i(t)$ 为被测温度，即温度计的输入信号， $T_o(t)$ 为温度计的指示温度，即温度计的输出信号， C 表示温度计温包的热容量， R 表示温度从热源传给温包的液体其间传导介质的热阻。根据热力学平衡方程，可得

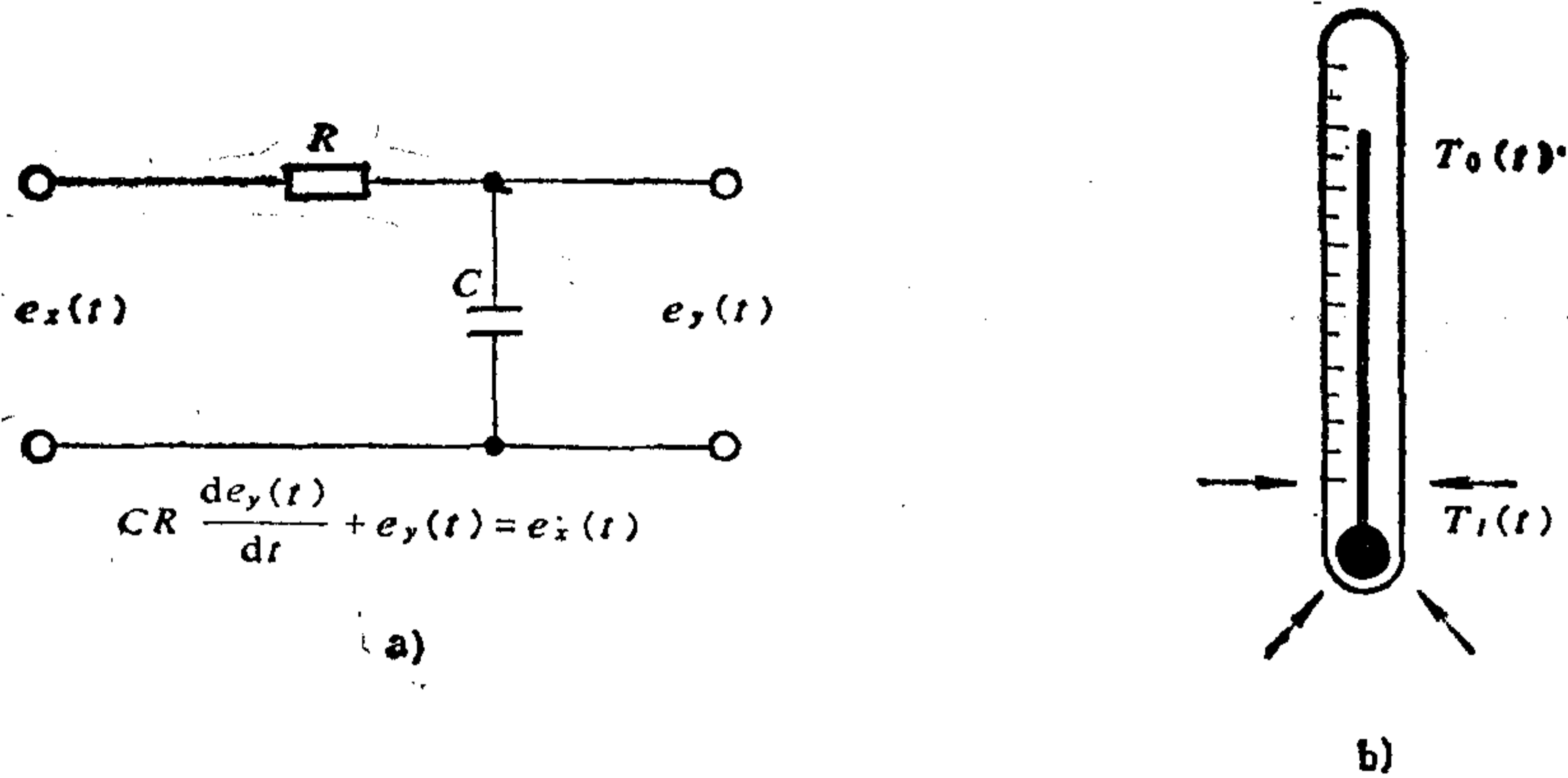


图1-4 一阶系统实例
(a) RC电路 (b) 液柱式温度计

号， $T_o(t)$ 为温度计的指示温度，即温度计的输出信号， C 表示温度计温包的热容量， R 表示温度从热源传给温包的液体其间传导介质的热阻。根据热力学平衡方程，可得

$$\frac{T_i(t) - T_o(t)}{R} = C \frac{dT_o(t)}{dt}$$

则
$$RC \frac{dT_o(t)}{dt} + T_o(t) = T_i(t) \quad (1-8)$$

令 $\tau = RC$ ，并改写成

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (1-9)$$

上式即为一阶线性微分方程，它的拉氏变换为

$$\tau SY(S) + Y(S) = X(S) \quad (1-10)$$

传递函数为

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{1}{\tau S + 1} \quad (1-11)$$

(1) 频率响应

根据式(1-11)，令 $S = j\omega$ ，就得出以下的一阶系统的频率响应式：

$$H(j\omega) = \frac{1}{\tau(j\omega) + 1} = \frac{1}{1 + (\tau\omega)^2} - j \frac{\tau\omega}{1 + (\tau\omega)^2} \quad (1-12)$$

由式(1-12)可知，频率响应函数是复数，其幅值为输出与输入的幅值比，它等于复数实部、虚部平方和的开方，即

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} \quad (1-13)$$

式(1-13)称为一阶测量系统的幅频特性表达式,它表示振幅比与频率的关系。

由式(1-12)还可知,复数的相角为输出、输入间的相位差,它等于复数虚部同实部之比的反正切,即

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega\tau \quad (1-14)$$

式中 负号——表示输出滞后于输入。

式(1-14)称为一阶测量系统的相频特性表达式,它表示相位差与频率的关系。

对式(1-13)和式(1-14)分别用曲线表示。以 $\omega\tau$ 为横坐标,以振幅 $A(\omega)$ 和相位 $\varphi(\omega)$ 为纵坐标,就可得出如图1-5所示的幅频特性和相频特性图。

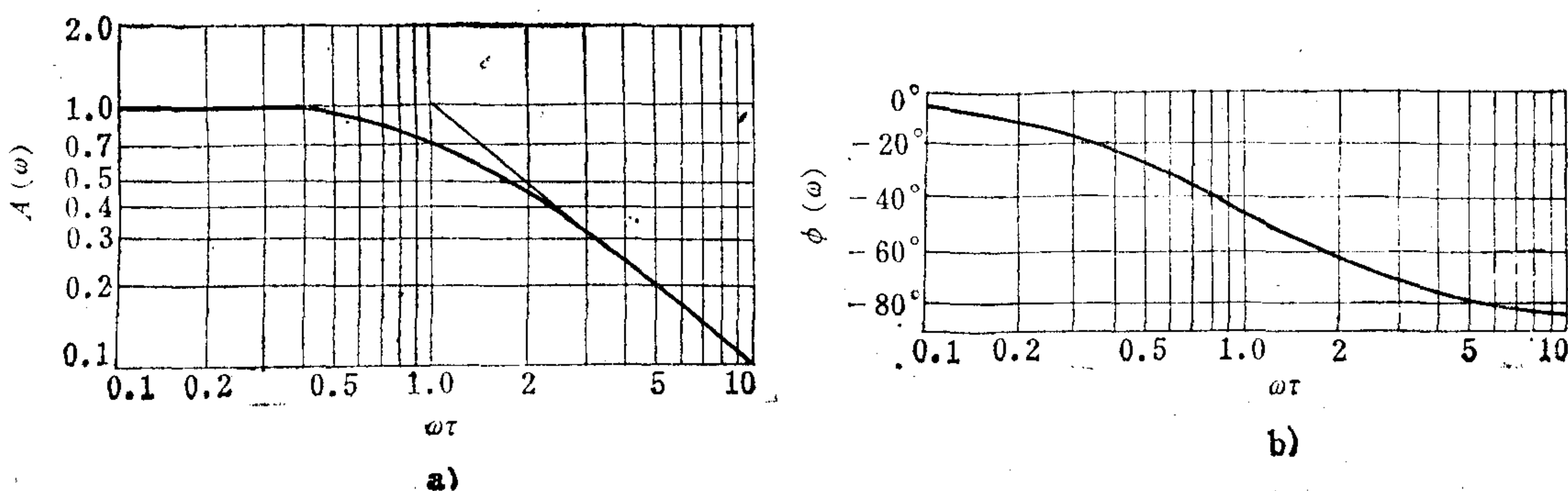


图 1-5 一阶测量系统的幅频与相频特性

(a)一阶系统幅频特性 (b)一阶系统相频特性

由式(1-13)和(1-14)可知,一阶系统在正弦激励下,稳态输出时的响应幅值和相位差取决于输入信号的频率和系统的时间常数 τ 。由图1-5中的幅频特性和相频特性可见,响应幅值随 ω 增大而减小,相位差随 ω 增大而增大,而且系统的频率响应还取决于时间常数 τ 。由图可见,当 $\omega\tau < 0.3$ 时,振幅与相位失真都较小,若系统的时间常数 τ 越小,则 ω 可大; τ 越大,则 ω 就要小。这说明时间常数 τ 越小,工作频率范围越宽;反之, τ 越大,工作频率范围越窄。

(2) 阶跃响应

阶跃输入信号的函数表达式为

$$x_u(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ A & t > 0 \end{cases}$$

式中 A ——阶跃高度。

阶跃函数 $x_u(t) = A$ 的拉氏变换等于 A/S ,代入式(1-11),得

$$Y_u(S) = \frac{1}{(\tau S + 1)} \frac{A}{S}$$

将上式展开为

$$Y_u(S) = \frac{A}{S} - \frac{A}{S + \frac{1}{\tau}} \quad (1-15)$$

式(1-15)的拉氏反变换为

$$y_u(t) = A(1 - e^{-t/\tau}) \quad (1-16)$$

式(1-16)称为一阶测量系统的阶跃响应函数，用曲线表示，如图1-6所示。由图可见，阶跃响应函数是指数曲线，初始值为零，随着时间 t 的增加，不断增大，最终趋近于输入值 A 。可见，从零到最终值这段时间，总是存在输出与输入之间的差值，该差值称为动态误差，或称过渡响应误差。

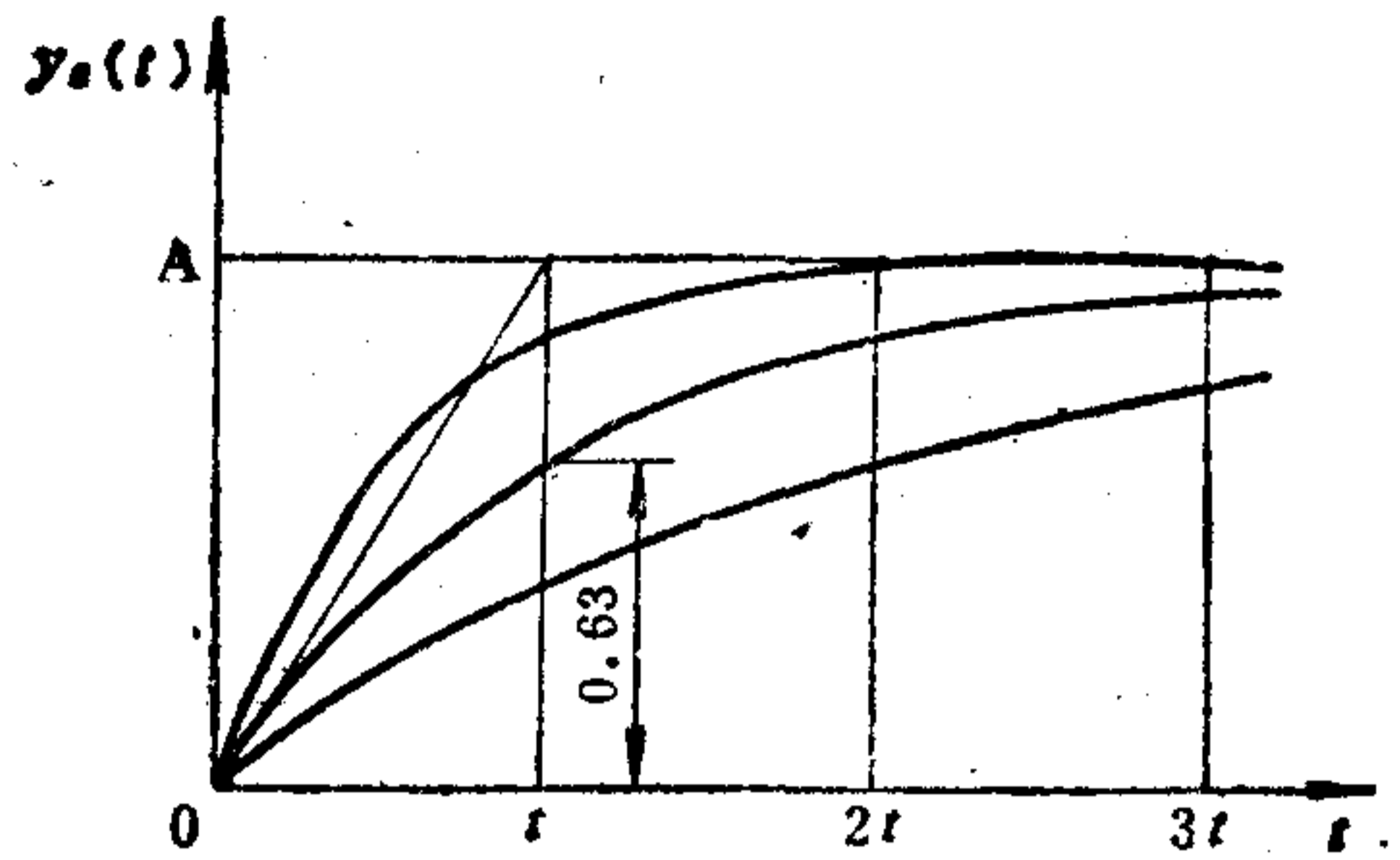


图 1-6 一阶系统的阶跃响应

图 1-6 的指数曲线变化率取决于常数 τ ， τ 值越大，曲线趋近于 A 的时间越长，输出与输入的差值越大，即动态误差越大； τ 值越小，曲线趋于 A 的时间越短，输出与输入的差值越小，即动态误差越小。可见， τ 值是决定响应快慢的重要因素，故称 τ 为时间常数。当 $t = \tau$ 时， $y_u(t) = 0.63A$ ，即在 τ 时刻，输出仅达到输入的 63%。当 $t = 3\tau$ 、 4τ 和 5τ 时，分别为 95%、98% 和 99%。通常用达到最终值 95% 或 98% 所需要的时间 3τ 或 4τ 作为响应快慢的指标。

2. 二阶系统的动态特性

2. 二阶系统的动态特性

典型的二阶系统如图 1-7 所示的弹簧—质量—阻尼系统或 RLC 电路。对弹簧—质量—阻

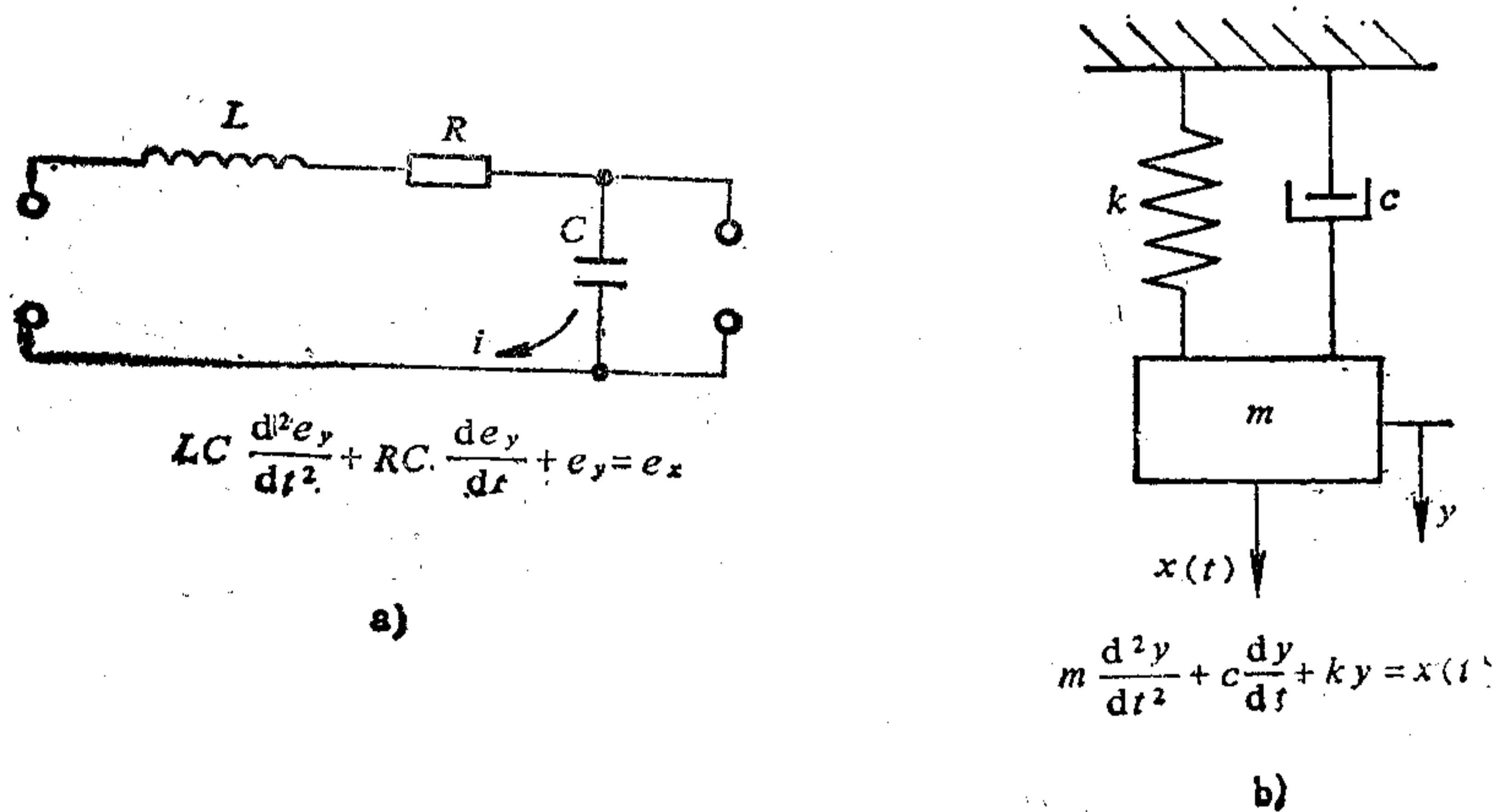


图 1-7 二阶系统实例

(a) RLC 电路 (b) 弹簧—质量—阻尼系统

尼系统来说，当该系统受外力 $x(t)$ 作用时，外力与惯性力、阻尼力和弹簧反力相平衡，则有下列式：

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + C \frac{dy}{dt} + ky = x(t) \quad (1-17)$$

式中 m ——系统的质量；
 C ——阻尼器的阻尼系数；
 k ——弹簧的刚度。

式(1-17) 是一个二阶微分方程，它的拉氏变换为

$$\left(\frac{1}{\omega_n^2}S^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}S + 1\right)Y(S) = KX(S) \quad (1-18)$$

式中 K ——系统的灵敏度, $K = \frac{1}{k}$ 。

其传递函数为

$$H(S) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}S^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}S + 1} \quad (1-19)$$

(1) 频率响应

根据式(1-19), 设 $K = 1$ 时, 可得二阶系统的频率特性为

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi j \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} \quad (1-20)$$

幅频特性为

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right]^2}} \quad (1-21)$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (1-22)$$

式(1-18)~式(1-22)中:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{系统的固有角频率} \quad (1-23)$$

$$\xi = \frac{C}{2\sqrt{km}} \quad \text{系统的阻尼比} \quad (1-24)$$

把幅频特性式(1-21)和相频特性式(1-22)用曲线表示, 如图1-8所示。

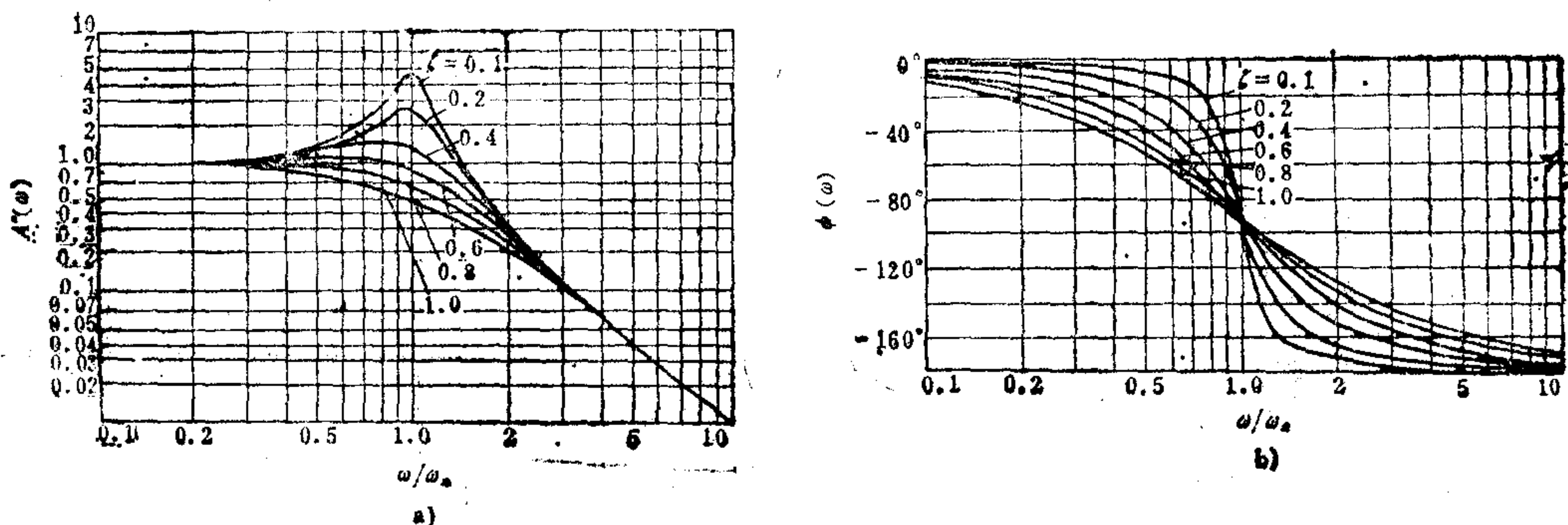


图 1-8 二阶系统频率响应特性

(a) 幅频特性

(b) 相频特性

由图可见，系统的频率响应随阻尼比 ζ 的大小而不同。 $\zeta > 1$ ，为过阻尼； $\zeta = 1$ ，为临界阻尼； $\zeta < 1$ ，为欠阻尼。当 $\zeta < 1$ 时，在较宽的频率范围内 $A(\omega) > 1$ ；而 $\zeta \geq 1$ 时， $A(\omega) < 1$ 。当选取 ζ 在0.6~0.8范围内时， $A(\omega) = 1$ 的频率范围最大，而 $\varphi(\omega)$ 与 ω/ω_n 近似线性关系。也就是说，在这种情况下，系统稳态响应的动误差较小。另外，系统的频率响应随固有角频率 ω_n 的大小而不同。 ω_n 越大，保持动误差在一定范围内的工作频率范围越宽；反之，工作频率范围越窄。

(2) 阶跃响应

对传递函数为式(1-19)的二阶测量系统，在阻尼比 $\zeta < 1$ 的情况下，对阶跃输入信号 $x_0(t) = A$ 的响应函数为

$$y(t) = A \left[1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \text{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right] \quad (1-25)$$

把式(1-25)二阶系统的阶跃响应函数式用曲线表示，如图1-9所示。图中横坐标是无量纲变量 $\omega_n t$ ，纵坐标为系统的输出 $y(t)$ ，图中曲线族只与阻尼比 ζ 有关。由图可见，二阶测量系统的阶跃响应具有以下性质：

1) 当阻尼比 $\zeta < 1$ 时，二阶测量系统将出现以 $\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n$ 为角频率的衰减正弦振荡；当 $\zeta \geq 1$ 时，不出现振荡。无论是哪种情况，输出都要经过一段时间才能达到阶跃输入值，这个过程称为动态过渡过程。任意时刻输出与输入之差值称为动态误差。

2) 不同的 ζ 取值对应一定的响应曲线，即 ζ 值的大小决定了阶跃响应趋于最终值的时间长短， ζ 值过大或过小，趋于终值的时间都过长。为了提高响应速度，减小动误差，通常 ζ 值取在0.6~0.8之间。

3) 测量系统的阶跃响应速度，随着 ω_n 的变化而不同。当 ζ 一定时， ω_n 越大则响应速度越快； ω_n 越小则响应速度越慢。

由此可见，固有频率 ω_n 和阻尼比 ζ 是二阶测量系统重要的特性参数。

测量系统的动态特性指标也称为过渡过程的时域性能指标，通常是用单位阶跃输入信号作用下产生的时间响应曲线来表征。表征动态特性的主要参数有延迟时间 t_d 、上升时间 t_r 、峰值时间 t_p 、响应时间 t_s 及超调量 $M\%$ ，如图1-10所示。

延迟时间 t_d ：单位阶跃响应曲线达到其终值的50%所需的时间。

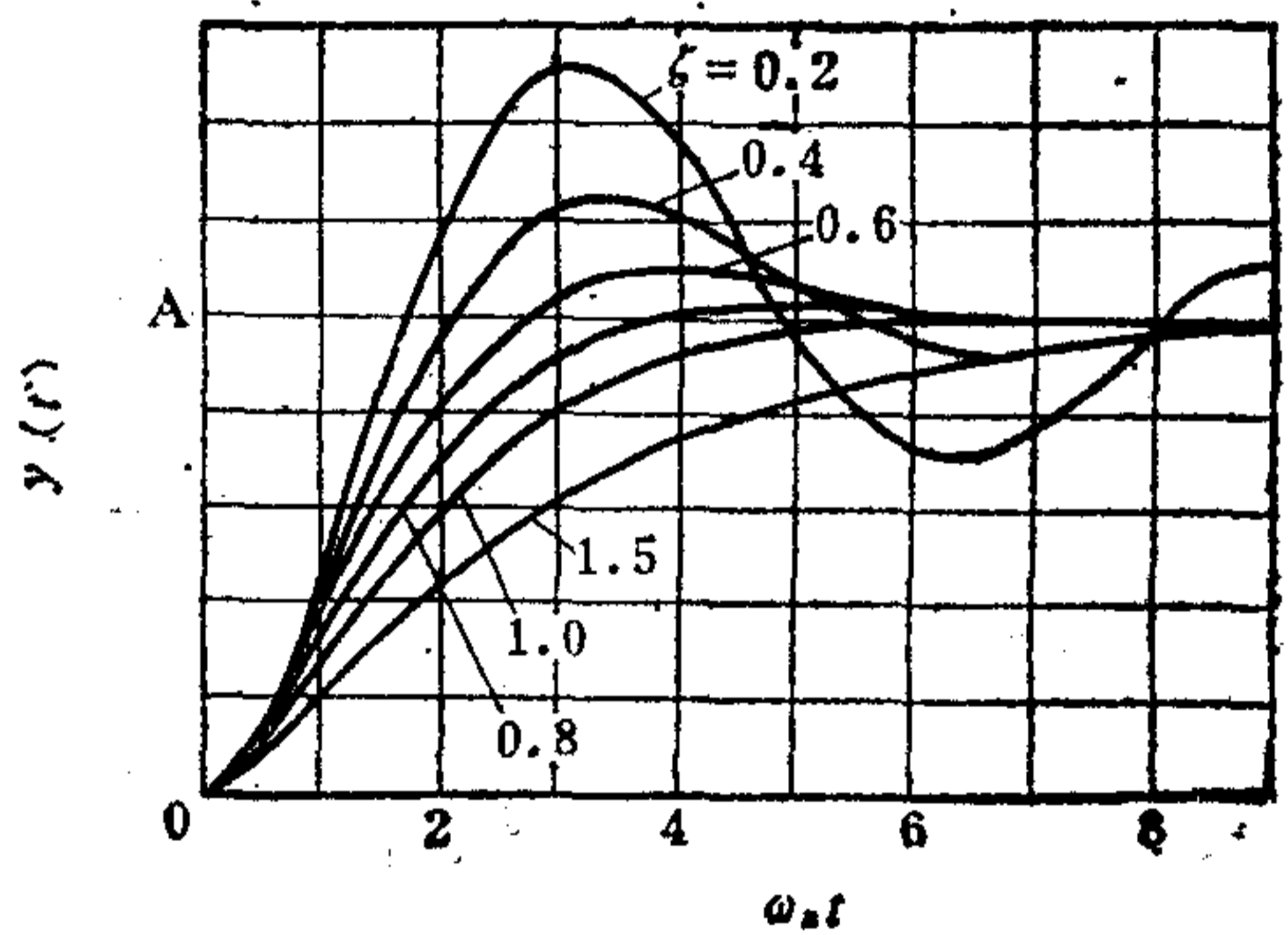


图1-9 二阶系统的阶跃响应

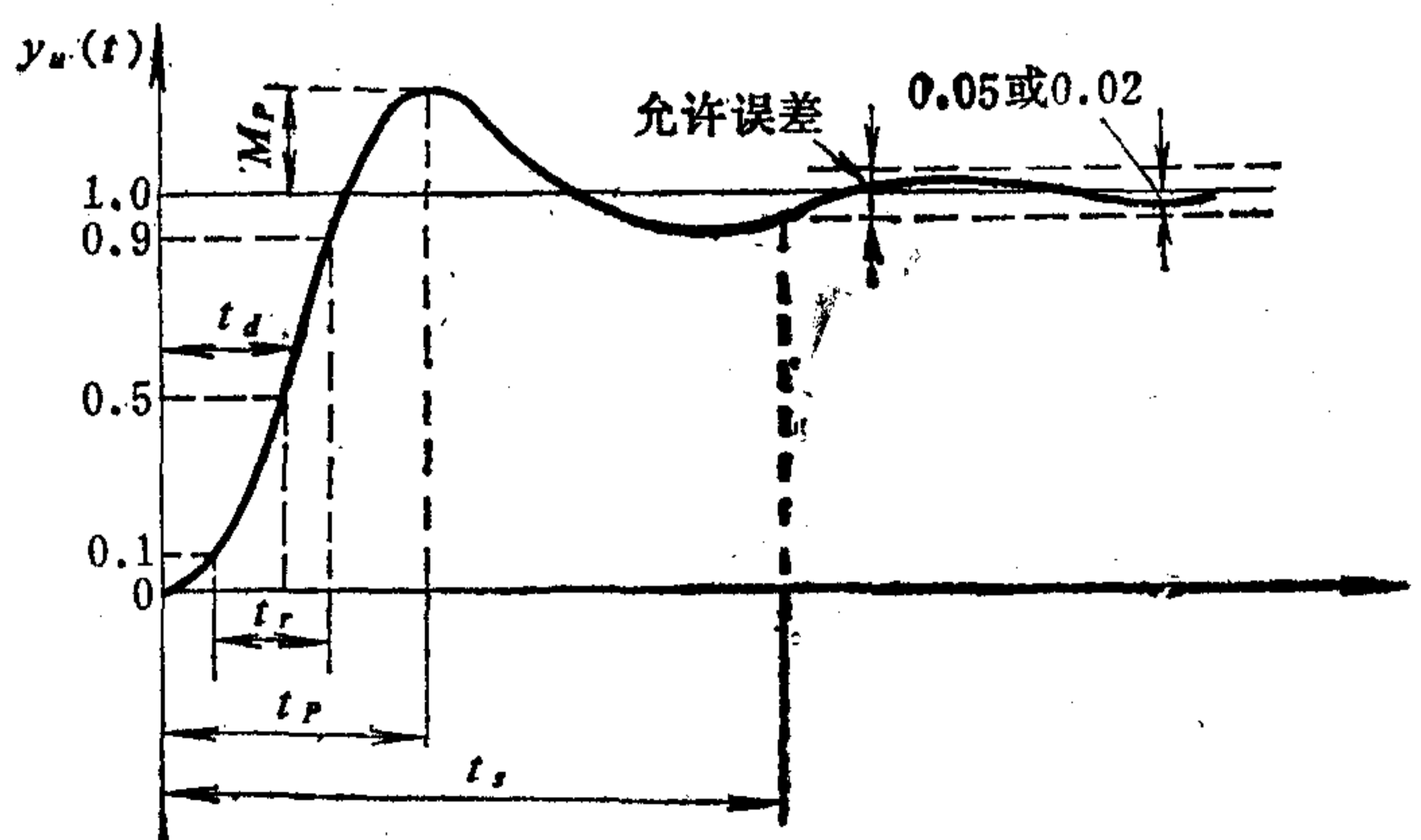


图1-10 单位阶跃输入时的响应特性

上升时间 t_r : 单位阶跃响应曲线 $y(t)$ 从它的终值的10%上升到终值的90%所需的时间。

峰值时间 t_p : 单位阶跃响应曲线 $y(t)$ 超过其稳态值而达到第一个峰值所需的时间。

响应时间 t_s : 单位阶跃响应曲线达到并保持在响应曲线终值允许的误差范围内所需的时间。该误差范围通常规定为终值的 $\pm 5\%$ (也有取 $\pm 2\%$ 的)。

超调量 $M\%$: 输出的最大值与响应曲线终值的差值对终值之比的百分数。

$$M\% = \frac{y_m - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\% \quad (1-26)$$

式中 y_m ——响应曲线最大值

$y(\infty)$ ——响应曲线终值, 即稳态值。

以上五个动态特性指标基本上体现了测量系统动态过程的特征, 而在实际应用中, 常用的动态特性指标为上升时间、响应时间和超调量。

3. 测量系统动态特性参数的测定

测量系统动态特性参数的测定, 通常是用阶跃信号或正弦信号作为标准激励源, 分别测出阶跃响应曲线和频率响应曲线, 从中确定测量系统的时间常数、阻尼比和固有频率等参数。下面仅以阶跃信号为激励源来进行分析。

(1) 一阶测量系统时间常数 τ 的测定

要测定一阶系统的时间常数 τ , 只需测定一阶系统的阶跃响应曲线, 从响应曲线上测取输出值达到最终稳态值的63%所经过的时间即为时间常数 τ 。但这样测取的时间常数值, 因未考虑响应的全过程, 所得结果不很可靠。准确测定时间常数 τ 是采用下述办法。

根据式(1-16), 当 $A=1$ 时, 一阶系统的阶跃响应函数为

$$y_u(t) = 1 - e^{-t/\tau} \quad (1-27)$$

对等式移项后可改写成:

$$1 - y_u(t) = e^{-t/\tau}$$

对等式两边取对数, 得

$$\ln[1 - y_u(t)] = -\frac{t}{\tau}$$

令

$$Z = \ln[1 - y_u(t)]$$

则

$$Z = -\frac{t}{\tau} \quad (1-28)$$

由式(1-28)可见, Z 与 t 成线性关系, 如图1-11所示。从 $Z-t$ 曲线的斜率即可求得时间常数 τ 。显然, 这种方法是考虑了瞬态响应的全过程。

(2) 二阶系统阻尼比 ξ 和固有角频率 ω_n 的测定。

典型的欠阻尼 ($\xi < 1$) 二阶系统的阶跃响应曲线如图1-12所示。它是具有阻尼角频率 ω_d 作衰减振荡。

$$\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n \quad (1-29)$$

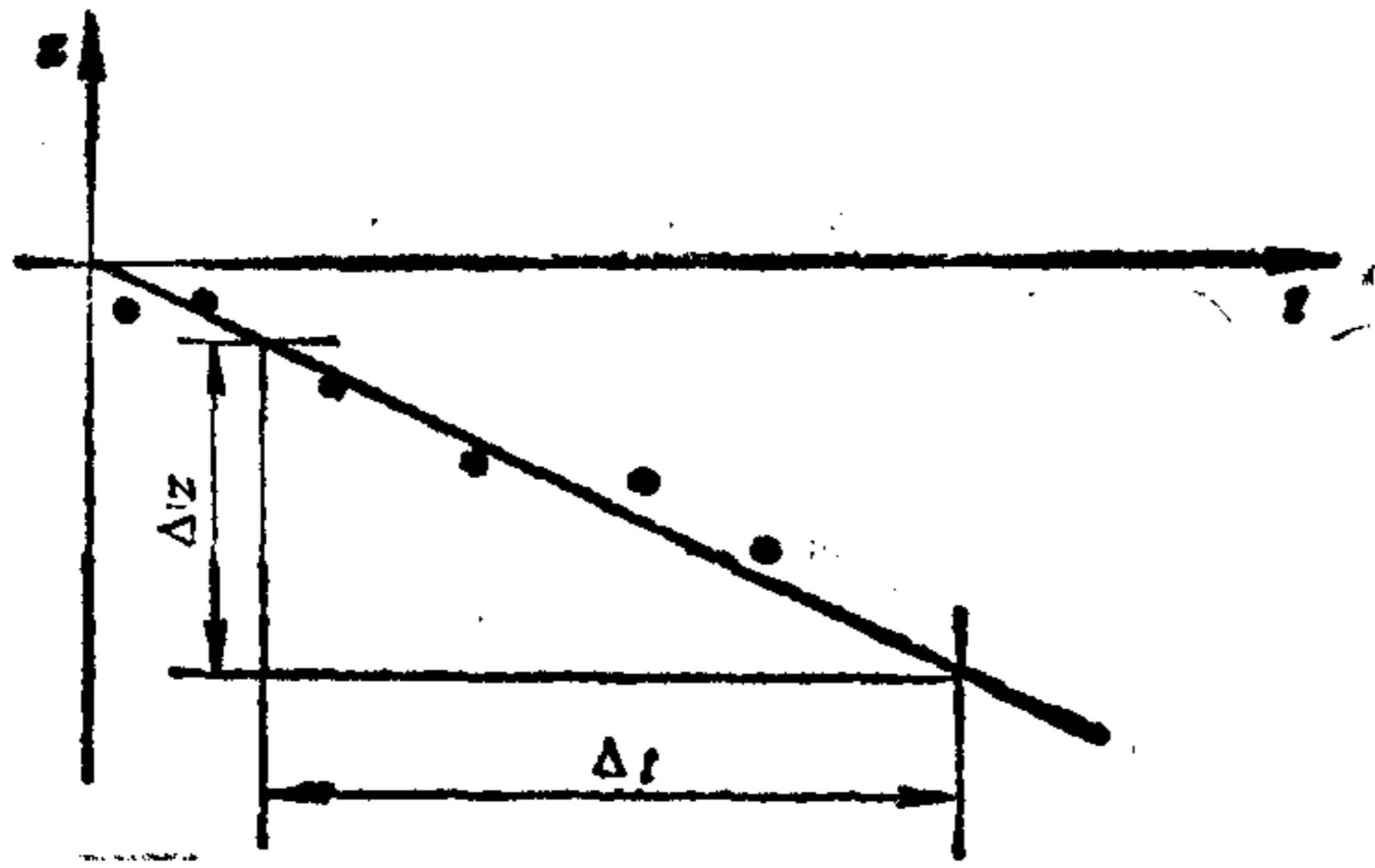


图 1-11 一阶系统时间常数 τ 的测定

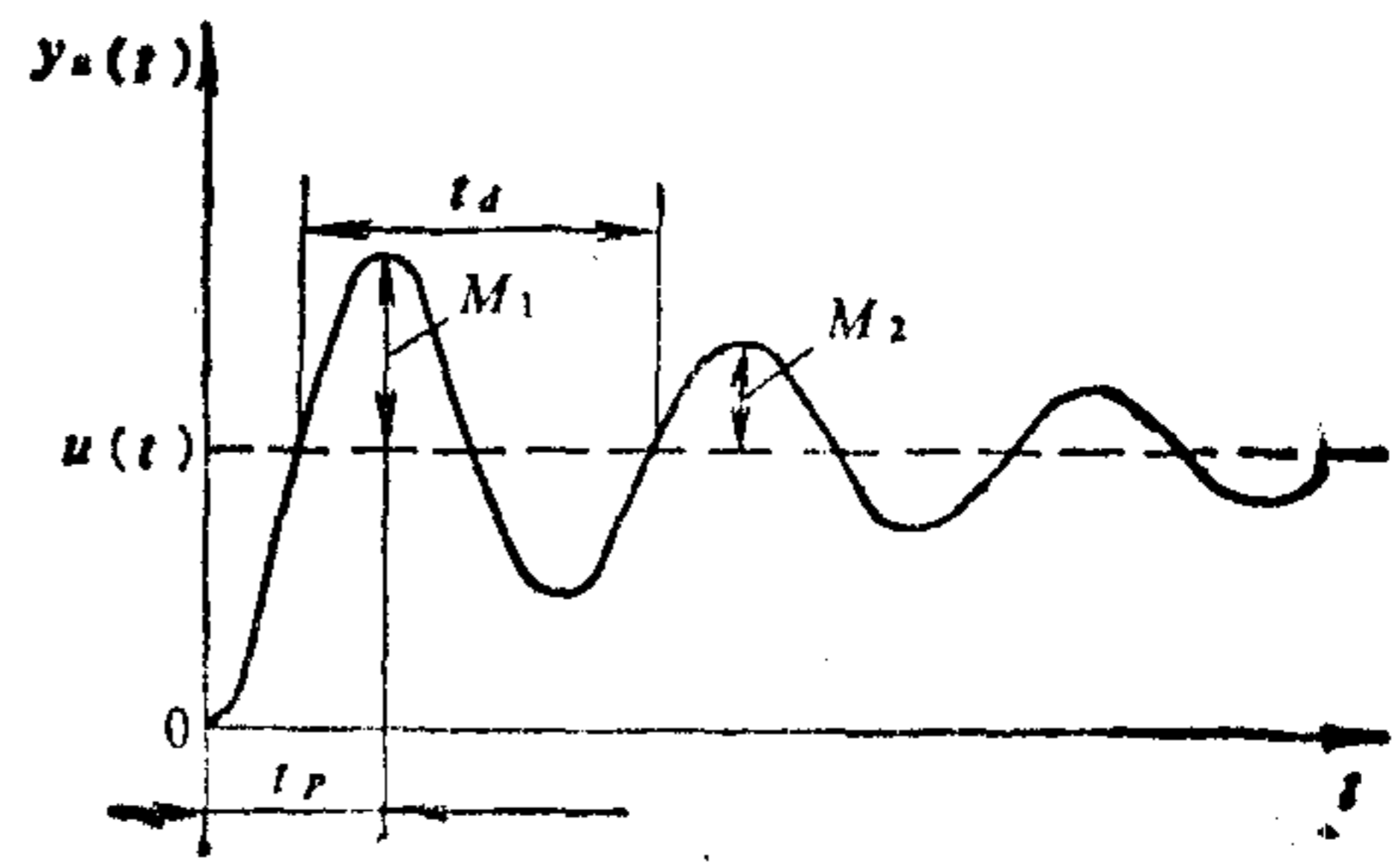


图 1-12 二阶系统阶跃响应曲线

根据式(1-25)二阶系统($\zeta < 1$)的阶跃响应函数式,按照求极值的方法,将 $y_a(t)$ 对时间取导数并等于零,就可求得各振荡峰值所对应的时间 $t_p = 0, \pi/\omega_d, 2\pi/\omega_d \dots$ 。将 $t = \pi/\omega_d$ 代入式(1-25),则可求得最大超调量 M_1 和阻尼比 ζ 之间的关系。即

$$M_1 = e^{-\left(\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \quad (1-30)$$

对等式两边取对数,整理后得

$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\pi}{\ln M_1}\right)^2 + 1}} \quad (1-31)$$

因此,从图1-12中测得 M_1 之后,代入式(1-31)即可求得阻尼比 ζ 。根据式(1-29)可得

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

用图1-12中的 t_p 代入上式,则得

$$\omega_n = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2} t_p} \quad (1-32)$$

从图1-12中测取 t_p ,将 t_p 和由式(1-31)计算的 ζ 值代入式(1-32)中,便可求得二阶测量系统的固有角频率。

如果在二阶系统阶跃响应曲线上能测得任意两个相隔的超调量,则可利用这两个超调量来求阻尼比 ζ 。

设任意两个超调量为 M_i 和 M_{i+n} ,它们分别对应的时间为 t_i 和 t_{i+n} , n 为两峰值相隔的整周期数。则

$$t_{i+n} = t_i + \frac{2\pi n}{\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n} \quad (1-33)$$

将 t_i 和 t_{i+n} 代入式(1-25)分别求出超调量 M_i 和 M_{i+n} 。

设
$$\delta_n = \ln \frac{M_i}{M_{i+n}} \quad (1-34)$$

则有
$$\delta_n = \ln \left[\frac{e^{-\zeta \omega_n t_i}}{e^{-\zeta \omega_n (t_i + 2\pi n / \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n)}} \right] = \frac{2\pi n \zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (1-35)$$

所以
$$\zeta = \frac{\delta_n}{\sqrt{\delta_n^2 + 4\pi^2 n^2}} \quad (1-36)$$

因此，先从二阶测量系统阶跃响应记录曲线上，测取相隔 n 个周期的两个超调量 M_i 和 M_{i+n} ，然后代入式(1-34)计算出 δ_n ，再将 δ_n 代入式(1-36)即可求出 ζ 值。