工程高等代数

(第二版)

阮传概　编著

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书介绍了多项式、矩阵、线性空间与线性变换、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、欧氏空间与二次型,以及一些内容在工程中的应用。全书比较注重方法与应用,内容简练,例题较多,每章末均附有习题及习题答案与提示。

本书可作为信息科学、计算机科学、通信理论与系统工程等有关专业的高等代数或线性代数课程的教材,也可供从事工科有关专业及应用数学、应用物理等专业的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程高等代数/ 阮传概编著 . - 2 版 . - 北京:北京邮电大学出版社,2003

ISBN 7-5635-0760-4

I .工 . . . II .阮 . . . III .工程数学 - 高等学校 - 教材 IV .TB111

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 054633 号

出版发行: 北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)

邮编:100876 发行部电话: 62282185 62283578

E - mail: publish@bupt .edu .cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京源海印刷厂

印 数: 1—3 000 册

开 本: 850 mm×1 168 mm 1/ 32 印张:12.75 字数:318 千字

版 次: 1997 年 7 月第 1 版 2003 年 9 月第 2 版 2003 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-0760-4/ O.60 定价:20 .50 元

前　　言

高等代数课程不仅在数学的各个分支中有很多应用,而且随着信息科学与计算技术的发展 ,在工程技术的很多领域中也有广泛的应用。高等代数的基本内容已成为广大科技工作人员的基本工具。现在,国内出版的高等代数教材,一般都是为数学专业的学生编写的,而对于信息科学、计算机科学、通信理论与系统工程等一些专业的学生,他们对高等代数的内容、方法的要求及教学时数与数学专业的学生是不同的,故本书是为工程技术的大学本科生编写的。

本书除包括教委规定的工科学校线性代数课程教学基本要求的内容外,还包括工程中常用的一些内容与方法。如:多项式理论,特别是 $\mathbf{Z}_2$ 上的多项式、矩阵的 Kronecker 积、广义逆、友矩阵、非负矩阵、不可约矩阵、随机矩阵、拉格朗日插值公式、最小二乘法、函数的极值等,以及有些内容在工程中的应用。

本书共六章,分别介绍了多项式、矩阵、线性空间与线性变换、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、欧氏空间与二次型。由于本书是为工科学生编写的,所以比较注重方法与应用,内容简练,有些结论省略了理论证明,例题较多,每章末均附有适合工科学生的习题。一般具有高中数学与物理知识的读者,就可以学习本书。

本书可作为信息科学、计算机科学、通信理论与系统工程等有关专业的高等代数或线性代数课程的教材,也可供从事工科有关专业及应用数学、应用物理等专业的科技人员参考。

本书讲授时数约 58 学时，如果学时不够可根据专业需要，删去一些内容或把某些内容供学生自学。

本书是作者多年来在北京邮电大学讲授此课程讲义的基础上修改而成的。在编写过程中得到了北京邮电大学信息工程系应用数学教研室全体老师、信息工程系办公室同志以及基础部数学教研室杨源淑、赵启松两位教授的大力支持和帮助，在此表示感谢。

北京师范大学郝鈵新教授仔细地审阅了本书稿并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，定有不妥之处，殷切希望读者指正。

作　者

1996 年 12 月

再 版 前 言

本书出版后，由于内容较适用于信息科学、计算机科学、通信理论与系统工程等一些专业学生的应用，受到读者的欢迎。这次再版，是根据读者的意见与建议，在第一版的基础上做了一些修改，并且增加了矩阵的导数与积分。为了便于学生的自学，还增加了习题答案与提示，另外有些内容加了 * 号，如果学时不够，可把 * 号部分删去或让学生自学。

在本书编写过程中，得到了北京邮电大学信息工程学院信息与计算科学教研中心的全体老师的支持与帮助，在此表示衷心的感谢，特别感谢钮心忻与罗守山两位教授的支持与帮助，并向所有关心与支持本书的老师与读者表示衷心的感谢。

这次再版一定还有不妥之处，殷切希望读者指出。

作　者

2003 年 5 月

目　　录

第一章　一元多项式

多项式是代数学中的一个重要概念,它不但与研究方程的解、矩阵的特征值、二次型等内容有关,而且在数学的其他分支和工程问题中都有广泛的应用.如分析线性系统时,往往需要研究多项式的根.本章所讨论的一元多项式是在中学所学知识的基础上,进一步加深与系统化.

第一节　集合、数域、映射

一、集合

集合的概念是自然科学中最基本的概念之一,它已深入到各种科学与技术的领域中.集合就是一些不同对象的总体,集合也简称为集.通常用大写字母 $A, B, C, \cdots$表示.组成集合的对象称为该集合的元素.通常用小写字母 $a, b, c, \cdots$表示.如果 a 是集合 A 的元素,则称 a 属于 A,或 A 包含 a,记为 $a \in A$.如果 a 不是集合 A 的元素,则称 a 不属于 A,记为 $a \notin A$.确定一个集合 A 就是要确定:哪些元素属于 A,哪些元素不属于 A.

如果两个集合 A, B 所包含的元素完全一样,则称 A 和 B 相等,记为 $A = B$.

集合的表示法主要有两种:列表法与构造法.所谓列表法,就是列出集合的所有元素.例如,$A = \{x, y, z\}$表示 A 是由元素 x, y, z 构成的;所谓构造法,就是描述出集合中元素适合的条件.例如,$A = \{x \mid x^2 - 1 = 0, x$ 为实数$\}$,表示 A 是由 $-1, 1$ 两个数构成的.

下面介绍几个常用的数集及所表示的字母:

全体整数构成的集,称为整数集,记为 **Z**;

全体有理数构成的集,称为有理数集,记为 **Q**;

全体实数构成的集,称为实数集,记为 **R**;

全体复数构成的集,称为复数集,记为 **C**.

例 1.1.1 $A=\{x \mid x\in \mathbf{Z},\ x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$.

设 A, B 是两个集合,如果 A 的每个元素也是 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,或称 B 包含 A,记为 $A\quad B$.例如 $A=\{a,c\}$, $B=\{a,b,c,d\}$,则 A 是 B 的子集.又如,有理数集 **Q** 是实数集 **R** 的子集.任意集 A 是自己的子集.

设 A, B 是两个集合, $A=B\quad A\quad B$ 且 $B\quad A$.

不含任何元素的集称为空集,例如 $A=\{x \mid x\in \mathbf{R},\ x^2+1=0\}$ 是空集.规定:空集是任何集的子集.

定义 1.1.1 设 A, B 是两个集,由 A 和 B 的所有共同元素组成的集,称为 A 和 B 的交集,记为 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A,\ \text{并且}\ x\in B\}$$

例 1.1.2 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,c,e\}$,则 $A\cap B=\{a,c\}$.

定义 1.1.2 设 A, B 是两个集,由属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集,称为 A 和 B 的并集,记为 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A\ \text{或}\ x\in B\}$$

例 1.1.3 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,4\}$,则 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$.

定义 1.1.3 设 A, B 是两个集,由属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集,称为 A 与 B 的差集或称 B 在 A 中的余集,即

$$A-B=\{x \mid x\in A\ \text{并且}\ x\notin B\}$$

例 1.1.4 设 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,2,5\}$,则 $A-B=\{3,4\}$, $B-A=\{5\}$.

二、数域

定义 1.1.4 设 P 是复数集的子集，并且至少含有一个不为零的数，如果对于 P 中的任何两个数 a, b(可写成" $a, b\in P$)，有 $a+b\in P$，$a-b\in P$，$ab\in P$，且当 $b\neq 0$ 时，$\frac{a}{b}\in P$，则称 P 为一个数域.

例 1.1.5 有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$、复数集 $\mathbf{C}$ 都是数域，整数集 $\mathbf{Z}$ 不是数域.

由于一个数域 P 至少含有一个不为零的数，设 $a\in P$，且 $a\neq 0$，则 $a-a=0\in P$，$a/a=1\in P$，于是任何数域包含数 0 与 1.

例 1.1.6 集 $\{a+b\sqrt{3}\mid a, b\in\mathbf{Q}\}$，记为 $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$，即 $\mathbf{Q}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}\mid a, b\in\mathbf{Q}\}$，$\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ 包含数 0，1.设 $\alpha, \beta\in\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ 且 $\alpha=a_1+b_1\sqrt{3}$，$\beta=a_2+b_2\sqrt{3}$，其中

$a_1, b_1, a_2, b_2\in\mathbf{Q}$，则 $\alpha+\beta=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{3}\in\mathbf{Q}(\sqrt{3})$;

$\alpha-\beta=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\sqrt{3}\in\mathbf{Q}(\sqrt{3})$;

$\alpha\beta=(a_1+b_1\sqrt{3})(a_2+b_2\sqrt{3})=(a_1a_2+3b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{3}\in\mathbf{Q}(\sqrt{3})$;

如果 $\beta=a_2+b_2\sqrt{3}\neq 0$，即 a_2, b_2 不全为零，则

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a_1+b_1\sqrt{3}}{a_2+b_2\sqrt{3}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{3})(a_2-b_2\sqrt{3})}{(a_2+b_2\sqrt{3})(a_2-b_2\sqrt{3})}$$
$$=\frac{a_1a_2-3b_1b_2}{a_2^2-3b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-3b_2^2}\sqrt{3}$$

由于 $a_1, a_2, b_1, b_2\in\mathbf{Q}$，从而 $\frac{a_1a_2-3b_1b_2}{a_2^2-3b_2^2}, \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-3b_2^2}\in\mathbf{Q}$，所以 $\frac{\alpha}{\beta}\in\mathbf{Q}(\sqrt{3})$.

综上,$\mathbf{Q}(\sqrt{3})$是一个数域 .

例 1 .1 .7 集 $\mathbf{Z}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3} \mid a, b\in\mathbf{Z}\}$, $\mathbf{Z}(\sqrt{3})$包含数 0, 1 .设 $\alpha, \beta\in\mathbf{Z}(\sqrt{3})$,且 $\alpha=a_1+b_1\sqrt{3}$, $\beta=a_2+b_2\sqrt{3}$,其中 $a_1, a_2, b_1, b_2\in\mathbf{Z}$,则 $\alpha+\beta, \alpha-\beta, \alpha\beta\in\mathbf{Z}(\sqrt{3})$.

如果 $\beta=a_2+b_2\sqrt{3}\neq 0$,即 a_2, b_2 不全为零,则

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a_1a_2-3b_1b_2}{a_2^2-3b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-3b_2^2}\sqrt{3}$$

综上,虽然 $a_1, a_2, b_1, b_2\in\mathbf{Z}$,但$\frac{a_1a_2-3b_1b_2}{a_2^2-3b_2^2}$, $\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-3b_2^2}$不一定属于 $\mathbf{Z}$,所以$\frac{\alpha}{\beta}$不一定属于 $\mathbf{Z}(\sqrt{3})$.因此,$\mathbf{Z}(\sqrt{3})$不是数域 .

定理 1 .1 .1 任何数域都包含有理数域 $\mathbf{Q}$.

证 设 P 是一个数域,$0, 1\in P$.$1+1=2\in P$, $2+1=3\in P$, … 继续下去,可得所有正整数都属于 P .由此得 $0, n\in P$(n 为任意正整数),于是 $0-n=-n\in P$,即所有负整数也属于 P,从而 $\mathbf{Z}\subseteq P$.由于任意一个有理数都可表示成两个整数 m, n 的商$\frac{m}{n}$($n\neq 0$),而$\frac{m}{n}\in P$.因此,有理数域 $\mathbf{Q}\subseteq P$.

三、映射

定义 1 .1 5 设 A, B 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对于 A 中任何一个元素 x,按照法则 f,在 B 中有唯一的元素 y 与 x 对应,则称法则 f 是 A 到 B 的映射或函数,记为 $f: A\rightarrow B$.

映射 f 使 $x\in A$ 对应 $y\in B$,记为 $f(x)=y$, y 称为 x 在映射 f 下的像, x 称为 y 在映射 f 下的一个原像 .A 称为映射 f 的定义域 .所有 $x\in A$ 在映射 f 下的全体像组成的集,称为 A 在 f 下的像集,记为 $f(A)$ 或 $\mathrm{Im}f$,即 $f(A)=\{f(x) \mid x\in A\}$ .A 到 A 的映射也称为 A 上的变换 .如果 A 到 A 的映射 f,使 $\forall x\in A$, $f(x)=x$,则称 f 为 A

上的恒等映射或恒等变换或单位映射,记为 I_A.

两个映射 $f: A_1\to B_1$, $g: A_2\to B_2$,当且仅当 $A_1=A_2$, $B_1=B_2$,且对于任何 $x\in A_1$,均有 $f(x)=g(x)$时,才认为它们是相等的,记为 $f=g$.

例 1.1.8 设 $A=\{a, b, c\}$, $B=\{1,2,3,4\}$.规定 $f: A\to B$ 为 $f(a)=2$, $f(b)=3$, $f(c)=2$,则 f 是 $A\to B$ 的映射.因为 A 中的每个元素在 B 中都有像,并且像是唯一的.

例 1.1.9 设 $A=B=\mathbf{R}$,规定 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为 " $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=x+1$,则 f 是 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的映射,也是 $\mathbf{R}$ 上的变换,因为 $\mathbf{R}$ 中的每个数在 $\mathbf{R}$ 中都有像,并且像是唯一的.

例 1.1.10 设 $\mathbf{R}^+$ 是正实数集,$\mathbf{R}$ 为实数集,规定 $f: \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ 为 " $x\in\mathbf{R}^+$, $f(x)=\pm\ x$,则 f 不是 $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ 的映射,因为 x 的像不是唯一的.

定义 1.1.6 设 f 是集合 A 到 B 的一个映射,如果 " $b\in B$,均有 $a\in A$ 使 $f(a)=b$,即 $f(A)=B$,则称 f 为 A 到 B 的满映射,简称满射或称映上的.

定义 1.1.7 设 f 是集 A 到 B 的一个映射,如果 " $x, y\in A$, $x\neq y$ 有 $f(x)\neq f(y)$,则称 f 为 A 到 B 的单映射,简称单射或称 1-1 的.

定义 1.1.8 设 f 是集 A 到 B 的一个映射,如果 f 既是满射又是单射,则称 f 为 A 到 B 的双射或一一映射.

例 1.1.11 设 $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$,规定 $f: A\to B$ 为 $f(a)=2$, $f(b)=1$, $f(c)=5$, $f(d)=4$,则 f 是 A 到 B 的单射,但不是满射,因为 B 中的元素 3 在 A 中没原像.

例 1.1.12 设 $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{1,2,3\}$,规定 $f: A\to B$ 为 $f(a)=2$, $f(b)=1$, $f(c)=3$, $f(d)=3$,则 f 是 A 到 B 的满射,但不是单射,因为 A 中的不同元素 c, d,存在 $f(c)=f(d)=3$.

例 1.1.13 设 $A=\mathbf{Z}$, $B=2\mathbf{Z}=\{2n\mid n\in\mathbf{Z}\}$,规定 $f: A\to B$ 为

" $x \in \mathbf{Z}$, $f(x) = 2x$, 则 f 是 $\mathbf{Z}$ 到 $2\mathbf{Z}$ 的双射 .

设 A, B, C 为集合, 映射 $f: A \to B$, $g: B \to C$, 由 f, g 确定的 $A \to C$ 的映射 h, " $x \in A$, $h(x) = g[f(x)]$ 称为映射 f, g 的合成或复合, 也称 f, g 的乘积, 记为 $h = g\ \ f$ 或 gf, 即 " $x \in A$, $(gf)(x) = g[f(x)]$.

设 A, B, C, D 为集合, 映射 $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$, 则合成映射 $h(gf)$ 与 $(hg)f$ 都是 A 到 D 的映射, 并且有 $h(gf) = (hg)f$, 即映射的合成满足结合律 .

定义 1 .1 .9 设映射 $f: A \to B$, 如果存在映射 $g: B \to A$, 使 $gf = I_A$, $fg = I_B$, 其中 I_A 与 I_B 分别为 A 与 B 上的恒等映射, 则 g 称为 f 的逆映射, 记为 f^{-1} .

注: 映射 $f: A \to B$ 有逆的充分必要条件是 f 为双射 .

例 1 .1 .14 设 $A = \mathbf{Z}$, $B = 2\mathbf{Z}$, 规定 $f: A \to B$ 为 " $x \in \mathbf{Z}$, $f(x) = 2x$, 从例 1 .1 .13 中得 f 是 $A \to B$ 的双射 .规定 $g: B \to A$ 为 " $y \in B$, $g(y) = y/2$, 由于 y 是偶数, 所以 $\dfrac{y}{2} \in \mathbf{Z}$.

" $x \in A$, $gf(x) = g[f(x)] = g(2x) = x$, 于是 $gf = I_A$; " $y \in B$, $fg(y) = f[g(y)] = f(y/2) = y$, 于是 $fg = I_B$.因此, g 是 f 的逆映射 .

第二节　一元多项式的概念与运算

定义 1 .2 .1 设 P 是一个数域, x 为一个符号(或称文字), n 是一个非负整数, 形式表达式

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1 .2 .1}$$

其中 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 属于 P 中的数, 称为系数在数域 P 中的 x 的一元多项式, 或简称为数域 P 上的 x 的一元多项式 .

在式(1 .2 .1)中, $a_i x^i$ 称为 i 次项, a_i 称为 i 次项的系数 .

如果多项式 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 与 $g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ 中,同次项的系数都相等,即 $a_i = b_i (i = 0, 1, \cdots, n)$,则称多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等,记为 $f(x) = g(x)$.

系数全为零的多项式称为零多项式,记为 0 .

在式(1 .2 .1)中,如果 $a_n \neq 0$,则 $a_n x^n$ 称为多项式(1 .2 .1)的最高次项, a_n 称为最高次项系数, n 称为多项式(1 .2 .1)的次数 .零多项式不规定次数 .若 $f(x)$ 不是零多项式, $f(x)$ 的次数记为 $f(x)$ 或 $\deg f(x)$.

例 1 .2 .1 $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2$ 是有理数域上的 3 次多项式, $g(x) = x^4 + 2x^3 - 2\mathrm{i}x^2 + \mathrm{i}$ 是复数域上的 4 次多项式 .

在数域 P 上的多项式 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 也可简记为 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

在数域 P 上的所有一元多项式组成的集合记为 $P[x]$,即

$$P[x] = \{ a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in P, \\ i = 0, 1, \cdots, n;\ n \text{ 为非负整数} \}$$

设 $f(x), g(x) \in P[x]$

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

如果 $n \geq m$ 时, $g(x)$ 也可写为

$$g(x) = 0x^n + \cdots + 0x^{m+1} + b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

定义两个多项式 $f(x), g(x)$ 的和与积分别为

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n) x^n + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \\ = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$

$$f(x)g(x) = a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) x^{n+m-1} + \cdots$$
$$+ (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + a_0 b_0$$

其中 x^k 的系数

$$c_k = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

于是

$$f(x)g(x) = c_{n+m} x^{n+m} + \cdots + c_k x^k + \cdots + c_1 x + c_0 =$$
$$\sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k = \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i+j=k} a_i b_j \; x^k$$

例 1.2.2 设 $f(x), g(x) \in \mathbf{Q}[x]$, $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 3x - 1$, 于是

$$f(x) + g(x) = 2x^3 + 2x^2 - x$$

$f(x)g(x)$中 x^3 的系数

$$c_3 = a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3$$
$$= 2 \times (-1) + 1 \times (-3) + 2 \times 1 + 1 \times 0 = -3$$

$$f(x)g(x) = 2x^5 - 5x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 5x - 1$$

两个多项式 $f(x), g(x)$ 相减, 定义为 $f(x) - g(x) = f(x) + [-g(x)]$.

数域 P 上的两个多项式的和、差、积仍然是 P 上的多项式.即 $\forall f(x), g(x) \in P[x]$, $f(x) \pm g(x) \in P[x]$, $f(x)g(x) \in P[x]$.

数域 P 上多项式的加法与乘法满足下列规律, $\forall f(x), g(x), h(x) \in P[x]$

(1) 加法交换律

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$

(2) 加法结合律

$$[f(x) + g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$$

(3) 乘法交换律

$$f(x)g(x) = g(x)f(x)$$

(4) 乘法结合律

$$[f(x)g(x)]h(x) = f(x)[g(x)h(x)]$$

(5) 乘法对加法的分配律

$$f(x)[g(x) + h(x)] = f(x)g(x) + f(x)h(x)$$

定理 1.2.1 设 $f(x), g(x) \in P[x]$，且 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$，则

(1) 当 $f(x) + g(x) \neq 0$ 时

$$[f(x) + g(x)] \leq \max[\ f(x),\ g(x)]$$

(2) $[f(x)g(x)] = \ f(x) + \ g(x)$

证 设

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0$$

$$g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0, \qquad b_m \neq 0$$

(1) 设 $n \geq m$

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

其中 $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_n = 0$，于是 $f(x) + g(x)$ 的次数不能超过 n，即

$$[f(x) + g(x)] \leq \max[\ f(x),\ g(x)]$$

(2) $f(x)g(x) = a_n b_m x^{n+m} + \cdots + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + a_0 b_0$

由于 $a_n \neq 0, b_m \neq 0$，所以 $a_n b_m \neq 0$，即 $f(x)g(x)$ 的次数为 $n + m$.

第三节 最大公因式

在数域 P 上的两个多项式 $f(x), g(x)$ 相加、相减与相乘后还是 P 上的多项式，但相除就不一定是 P 上的多项式了.若 $g(x) \neq 0$，则 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 在 P 上可得唯一的商式 $q(x)$ 与余式 $r(x)$，即

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

其中 $r(x) = 0$ 或 $\ r(x) < \ g(x)$.

例 1.3.1 设 $f(x), g(x) \in \mathbf{Q}[x]$，且