工 程 弹 性 力 学

江理平　唐寿高　王俊民　编著

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程弹性力学/江理平,唐寿高,王俊民编著. —上海:同济大学出版社,2002.5

ISBN 7-5608-2411-0

Ⅰ. 工… Ⅱ. ①江…②唐…③王… Ⅲ. 工程力学:弹性力学 Ⅳ. TB125

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 019467 号

工程弹性力学

作　者　江理平　唐寿高　王俊民　编著

责任编辑　解明芳　责任校对　郁　峰　装帧设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社

(上海四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021-65985622)

经　销　全国各地新华书店

印　刷　常熟市大宏印刷厂印刷

开　本　850×1168　1/32

印　张　13.75

字　数　398000

印　数　1—3000

定　价　21.00 元

版　次　2002 年 5 月第 1 版　　2002 年 5 月第 1 次印刷

书　号　ISBN 7-5608-2411-0/O・209

内容提要

本书是在总结作者数十年对工科学生弹性力学教学经验的基础上，以及结合国内外最新科研及工程应用的资料撰写而成。全书共分12章，内容包括：弹性力学问题的建立，平面问题和空间问题的解析方法，弹性薄板的弯曲问题，变分法，有限单元法（包括平面问题、空间问题和薄板弯曲问题），有限差分法，加权残值法和边界单元法等。本书的特点是对经典理论运用深入浅出、简明扼要的叙述方法；物理意义和工程背景突出；内容结构合理，既可适用于多学时教学，也可适用于少学时教学。与同类教材相比，本书的特点还在于着重介绍近几年来的有广泛应用价值的各种数值解法，具有相当强的实用性。本书主要作为工程力学、土木工程，机械制造等专业的教材，也可供有关专业的研究者和工程技术人员参考。

前　言

本书是针对高等学校工科有关专业编写的教材。编者根据工科学生学习弹性力学的实际需要与目的，在总结长期的教学经验的基础上，对原有教材进行了修改。本书的特点是在保留弹性力学经典理论的系统性和严密性的前提下，力求以深入浅出、简明扼要的叙述方法，突出基本理论的物理意义和工程应用的背景，避免过分繁复的数学推导。为增强弹性力学在工程中的应用性，本书有机地将解析法与近似数值法结合起来，比较系统地介绍了弹性力学的几种数值方法，尤其是对有限单元法作了详细全面的介绍。全书充分体现理论联系实际、教学为先进生产力服务的宗旨，这也是力学教学改革的新尝试。本书可以作为土木工程、机械、海洋地质等专业的弹性力学教学用书，也可以作为力学专业、工科研究生及工程技术人员学习弹性力学的参考书。

本书的第一章至第六章由江理平编写，第七、八、十、十一、十二章由唐寿高编写，第九章及习题答案由王俊民编写，全书由江理平最后统稿。吴家龙教授对全部书稿进行了审阅并提出了宝贵的修改意见和建议，作者表示衷心的感谢。

本书的出版，得到了同济大学优秀课程建设项目的资助，对此，作者表示诚挚的谢意。

作者

2002 年春于同济大学

目　　录

第一章　绪　论

§1-1　弹性力学的任务、研究对象、范围及方法

弹性力学作为固体力学的一个分支，是研究弹性体受外力作用或由于变温、支座沉陷等原因而产生的应力、应变和位移的一门学科。

从工程应用的目的出发，弹性力学可以看成是一门基础技术学科，它的基本任务同材料力学、结构力学相同，都是要解决现代生产实践中提出的各种结构或构件的强度、刚度和稳定问题，要完美地解决经济与安全的矛盾。但在研究对象和研究方法上，弹性力学与材料力学、结构力学还是有所区别的。材料力学研究的是杆状构件，结构力学则是分析这种杆状构件的组合，而弹性力学除了要研究杆状构件外，还要研究板、壳、水坝等实体构件。而在研究的范围方面，弹性力学只研究弹性体或物体的弹性范围，而材料力学还会涉及到物体的塑性阶段，包括蠕变、疲劳等领域。在研究方法上，为了计算的方便，材料力学要对应力分布或变形的状态作一些近似的假设，所得结果往往是近似的、初等的，限于在一定条件下应用。而弹性力学则从基本假设出发，对物体的受力变形进行精确的分析，所得结果可以校核材料力学结果的精度。例如，对梁受横力弯曲问题，材料力学对梁的变形作出平截面假设，从而得到梁的弯曲应力沿横截面高度呈线性变化的结果，但实际上按弹性力学的精确分析，弯曲应力为非线性分布。又如对带孔平板的拉伸问题，按材料力学方法，假设拉应力在净截面上是均匀分布的，但由弹性力学分析结果知道拉应力沿净截面不仅不是均匀分布的，而且在孔边会产生明显的应力集中现象。

用弹性力学的经典解法解决工程上的具体问题，除了少部分是直接运用弹性力学的理论结果之外，大部分是利用其基本理论和基本公式推导出的数值解法，从而克服了弹性力学由于求解偏微分方程边值问题的困难而带来的局限性。特别值得一提的是，近 40 年发展起来的有限单元法，由于计算机的普及和相应软件的成熟，大大地拓展了弹性力学的应用范围。另外，有限差分法、加权残值法、边界元法等近似解法的出现和发展也日益为工程技术人员认识和应用，使得某些无法求解的复杂问题得到了解决。这些解答虽然在理论上有一定的近似性，但在工程应用上往往已是足够精确的。为此，本书将在叙述弹性力学经典方法的基础上，详尽地介绍各种数值解法及其最近进展。

§1-2　弹性力学的基本假设

用弹性力学分析各种实际构件的力学性质时，必然会遇到许多复杂的因素而引起数学上的麻烦。为此，我们必须对客观事物加以抽象，忽略次要因素，提出一些基本假定。本书对所有问题的研究，如无特别指出，将按下列六条基本假设为前提。

1. 连续性假设

弹性力学作为连续介质力学的一部分，将弹性体假定成连续密实的物体而忽略组成物体的质点之间的空隙以及材料在制造过程中产生的微缺陷。从这条假设出发，认为物理量如应力、应变和位移等都是连续的，从而可以表示成坐标的连续函数，在数学推导时能方便地运用连续和极限的概念。

2. 均匀性假设

即假定物体由同一类型的均匀材料组成的，因而在物体内各部分的物理性质是相同的，不会随坐标的位置的改变而发生变化。根据这条假设，就可以从物体内部取出任一部分进行分析，再将分析的结果运用到整个物体中去。

3. 各向同性假设

假定物体在不同方向上具有相同的物理性质，从而使应力与应变的关系不随坐标方向的改变而改变。

4. 线性完全弹性假设

即对应于一定的温度，应力与应变呈线性的一一对应的关系。这样，在引起物体变形的外加因素除去以后，将完全恢复其原来的形状和大小，而弹性常数与应力、应变的大小无关。

5. 小变形假设

假设物体在外界因素作用下所产生的位移远小于物体原来的尺寸。根据这条假设使问题得到简化，例如，在考虑平衡条件时，可以忽略由于变形而引起的物体尺寸和位置的变化；在推导几何方程和物理方程时，可以略去非线性的项，使方程成为线性的偏微分方程，从而可以运用叠加原理来分析问题。

6. 无初始应力的假设

假定物体在受到外界因素作用之前，物体处于无应力状态。根据这个假定，由弹性力学求得的应力仅仅是由于荷载作用、温度改变等外界因素所引起的。如物体内有初应力的存在，只须与弹性力学求得的应力相加即可。

第二章　弹性力学问题的建立

由于弹性力学研究的问题本质上是超静定问题，因而必须从静力学、几何学和物理学三方面进行研究。由静力学出发，将分析一点的应力状态，建立平衡微分方程和静力边界条件；经几何学分析，确立位移与应变的几何关系以及应变协调方程；再从物理学方面考虑应力和应变之间所固有的关系，即本构方程。在建立了以上三个方面的全部基本方程以后，可以综合简化成以位移或者应力作为基本未知量的偏微分方程组作为具体的求解途径。因为偏微分方程的直接求解往往十分困难，通常采用逆解法与半逆解法来获得所求的问题的解。在使应力分量或位移分量满足给定的边界条件时，常常要用到局部性原理，使问题得以简化。这些就是本章的主要内容。

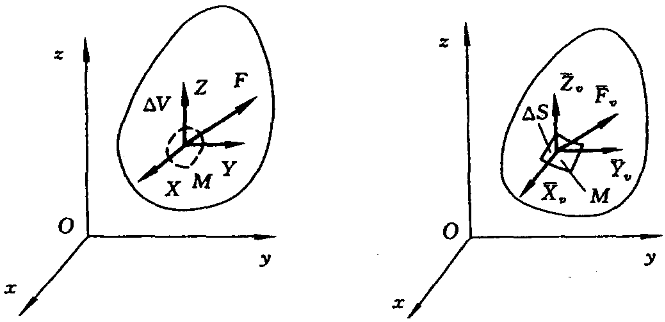
§2-1　应力和一点的应力状态

首先从静力学观点出发，分析物体内任意一点的应力及其相应的应力状态。

一般将外界作用在物体上的力称为**外力**，具体的又可根据作用在物体内部或表面而区分为**体力**和**面力**。为了表示物体内某一点 M 所受体力的大小和方向，取包含 M 点的微小体积 ΔV，如图 2-1(a)所示。设作用在 ΔV 上的体力为 $\Delta \boldsymbol{Q}$，则体力的平均集度为 $\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta V$，令 ΔV 向 M 点趋于无限小，即可定义体力矢量 $\boldsymbol{F}$ 为

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta V} = \boldsymbol{F}$$

矢量 $\boldsymbol{F}$ 在 x,y,z 坐标轴上的投影 X,Y,Z 称为物体在 M 点的体力分量，并规定沿坐标轴正方向为正，沿坐标负方向为负，它们的量纲为[力][长度]$^{-3}$。



(a) (b)

图 2-1

面力，如图 2-1(b)所示，在物体表面(外法线为 v)某一点 M 取微分面 ΔS，设作用于 ΔS 上的面力为 $\Delta\bar{Q}$，则面力的平均集度为 $\Delta\bar{Q}/\Delta S$，令 ΔS 向 M 点趋于无限小，即得面力矢量 $\bar{\boldsymbol{F}}_v$ 的定义

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\bar{Q}}{\Delta S}=\bar{\boldsymbol{F}}_v$$

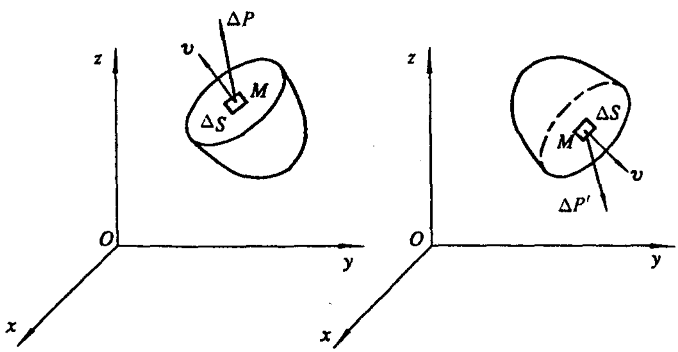
面力矢量 $\bar{\boldsymbol{F}}_v$ 同样可以沿 x,y,z 坐标轴方向投影，得到 $\bar{X}_v$，$\bar{Y}_v$，$\bar{Z}_v$ 的三个分量，其方向与坐标轴方向一致为正，反之为负，它们的量纲为[力][长度]$^{-2}$。

物体受外界因素(如外力、温度变化等)的作用，在其内各部分之间要产生相互的作用。这种物体内的一部分与其相邻的另一部分之间的相互作用力，称为**内力**。

为了具体地反映内力的分布情况，可以运用截面法引进内力集度，即**应力**的概念。假设过物体内某一点 M 作一个截面将物体分成两部分，并令截面在 M 点附近的微分面 ΔS 的外法线为 v。在微分截面 ΔS 的两边，用 $\Delta\boldsymbol{P}$ 与 $\Delta\boldsymbol{P}'$分别表示被割开的物体的两

部分在 ΔS 上的内力，它们是作用力与反作用力的关系，见图 2-2。留下图 2-2(a)的那部分，则 ΔS 上内力的平均集度为 $\Delta \boldsymbol{P}/\Delta S$，令 ΔS 向 M 点趋于无穷小，则得到过 M 点在外法线为 v 的微分面上的应力矢量 $\boldsymbol{F}_v$

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta S} = \boldsymbol{F}_v \qquad (2\text{-}1)$$



(a) (b)

图 2-2

应力矢量 $\boldsymbol{F}_v$ 的下标，表示了其所在微分面的法线方向。根据计算的要求，应力矢量 $\boldsymbol{F}_v$ 有两种分解方法，一种方法是沿 x，y，z 坐标轴方向投影，用 X_v，Y_v，Z_v 作为其分量；另一种方法是沿微分面法线方向以及法线 v 和矢量 $\boldsymbol{F}_v$ 构成的平面与微分面相交的切线方向投影，分别用 σ_v 和 τ_v 来表示，σ_v 称为正应力，τ_v 称为剪应力，见图 2-3 所示。

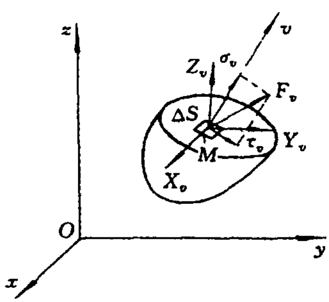


图 2-3

从应力矢量的定义可知，应

力除了有大小、方向和作用点外，还必须明确是作用在过该点的哪一个微分面上，因为微分面不同应力矢量也不同。由于过物体内一点可以作无数个微分面，从而将经过物体内同一点的各个微分面上的应力情况，称为**一点的应力状态**。为了便于分析和计算一点的应力状态，可经过物体内任意一点 M 分别作三个与坐标平面平行的特殊微分截面，并且保留外法线方向与坐标轴正方向一致的部分，见图 2-4。在这三个微分面上的应力矢量分别为 $\boldsymbol{F}_x$，$\boldsymbol{F}_y$，$\boldsymbol{F}_z$，它们的下标表示了微分面的外法线方向与 x,y,z 坐标轴方向一致。将它们分别向坐标轴投影，即得到九个应力分量。这九个应力分量的整体构成一个二阶对称张量，称为**应力张量**，表示为

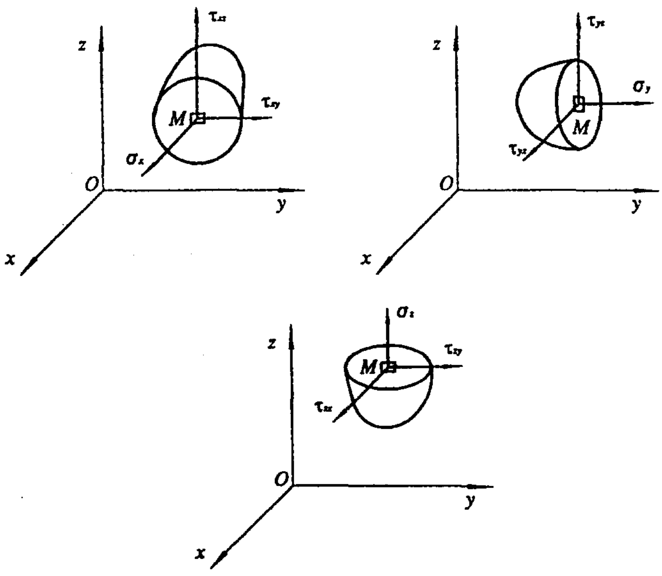


图 2-4

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix} \tag{2-2}$$

其中，正应力的下标表示作用面的方位与它的方向，而剪应力的第一个下标表示作用面方位，第二个下标表示它的方向。至于它们的正负号，可按如下规定：当微分面外法线指向与坐标轴正方向一致时，这些应力分量以沿坐标轴正方向为正；当微分面外法线指向与坐标轴负方向一致，则这些应力分量以沿坐标轴负方向为正。与上述情况相反，则为负的应力。

如果知道了物体内某一点的这三个特殊微分面上的九个应力分量，又知道了过这一点的任意一个微分面的外法线的方向余弦，则由下一节所导出的关系，便完全可以确定该点的应力状态。

§2-2 和坐标轴倾斜的微分面上的应力

为了导出过物体内某一点 M 的三个特殊微分面上的九个应力分量与通过 M 点的任意微分面上应力分量之间的关系式，不妨用过 M 点的三个与坐标平面平行的微分面以及一个与坐标倾斜的微分面构成一个微小的四面体，如图 2-5(a)所示，并假想把四面体从物体内脱离出来。取 M 点为原点，各坐标面受力如图 2-5(b)所示。

现在考虑其平衡关系：微分面$\triangle Mbc$，$\triangle Mac$，$\triangle Mab$ 的外法线方向均指向坐标轴的负向，因而在这三个微分面上九个正的应力分量的方向必须指向坐标轴的负向。设与坐标倾斜的微分面$\triangle abc$ 的外法线 v 的方向余弦为 l,m,n，它的面积为 ΔS，在$\triangle abc$ 上的应力矢量 $\boldsymbol{F}_v$ 的三个分量为 X_v,Y_v,Z_v 四面体 $Mabc$ 受到的体力分量为 X,Y,Z。各微分面之间的几何关系为

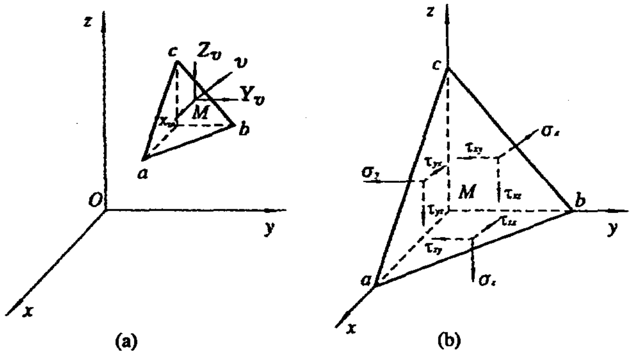


图2-5

$$
\left.\begin{aligned}
&\triangle Mbc\ 面积=\Delta Sl\\
&\triangle Mac\ 面积=\Delta Sm\\
&\triangle Mab\ 面积=\Delta Sn
\end{aligned}\right\}\tag{2-3}
$$

首先考虑平衡条件$\sum X=0$，得

$$
X_v\Delta S-\sigma_x\Delta Sl-\tau_{yx}\Delta Sm-\tau_{zx}\Delta Sn+\frac{1}{3}X\Delta S\Delta h=0 \tag{b}
$$

其中，Δh为微分面abc到M点的距离，将式(b)两边除以ΔS再令$\Delta h\to 0$，即使倾斜微分面无限接近M点，整理后便可得到所求关系式。同理，又可从平衡条件$\sum Y=0$，$\sum Z=0$得到另外两式，即

$$
\left.\begin{aligned}
X_v&=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n\\
Y_v&=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n\\
Z_v&=\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n
\end{aligned}\right\}\tag{2-4}
$$

这样，只要知道了一点的九个应力分量，利用公式(2-4)，可以十分方便地求出通过同一点的各个微分面上的应力分量。

§2-3 平衡微分方程 静力边界条件

如果将物体分成若干个任意形状的单元体，当物体受外力(如