

高中数学复习指导与训练(二轮)

文理科用

泰安市教学研究室 编

书 名 高中数学复习指导与训练(二轮)(文理科)
编 者 泰安市教学研究室
出版发行 青岛出版社
社 址 青岛市徐州路 77 号(266071)
本社网址 <http://w.qdpub.com>
邮购电话 13335059110 5814611—8664 传真 (0532)5814750
责任编辑 张化新 吴清波
特约编辑 路 畅
校 对 贺 林
封面设计 唐 山
照 排 青岛新华出版照排有限公司
印 刷
出版日期 2005 年 2 月第 3 版 2005 年 2 月第 3 次印刷
开 本 8 开(787mm × 1092mm)
印 张 8.25
字 数 200 千
书 号 ISBN 7 - 5436 - 2244 - 0
定 价 8.00 元

盗版举报电话 (0532)5814926
青岛版图书售出后如发现印装质量问题,请寄回承印厂调换。

青 岛 出 版 社

目 录

《高中二轮复习指导与训练》丛书

编 委 会

主 任	桑新华		
副 主 任	高 峰		
成 员	阚兆成	尹燕云	朱金龙
	范正和	吴东俊	宿文传
	姚胜明	姜洪涛	石性刚
	宋兆清	董茂寅	朱增兴
丛 书 主 编	阚兆成	尹燕云	
本 册 主 编	赵水祥	董付忠	常培琪
本 册 编 者	赵水祥	董付忠	常培琪
	李炳奎	孙 浩	夏凡军
	李汝彬	武甲旺	赵剑锋
	孙汝文	李东升	刘才华
	周德存	安士海	

第一编 主干知识系统训练	
(1)函数的概念与性质	(1)
(2)函数图象及函数应用	(3)
(3)函数综合及代数推理	(5)
(4)等差、等比数列的基本问题	(7)
(5)等差、等比数列的综合运用	(9)
(6)数列的实际应用及数学归纳法(理)	(11)
(7)三角函数的概念、图象及性质	(13)
(8)三角变换与解三角形	(15)
(9)平面向量	(17)
(10)不等式的性质与证明	(19)
(11)不等式的解法与应用	(21)
(12)直线和圆	(23)
(13)圆锥曲线	(25)
(14)直线与圆锥曲线	(27)
(15)圆锥曲线综合问题	(29)
(16)直线、平面的位置关系	(31)
(17)空间角与距离	(33)
(18)直线、平面、简单几何体	(35)
(19)排列、组合和概率	(37)
(20)概率与统计(理科)	(39)
(21)导数(文科)	(41)
(22)极限与导数(理科)	(43)
第二编 综合能力强化训练	
综合能力训练(一)	(45)
综合能力训练(二)	(47)
综合能力训练(三)	(49)
第三编 “双基”回归训练	
(1)集合与简易逻辑	(51)
(2)函数(一)	(51)
(3)函数(二)	(52)
(4)函数(三)	(53)
(5)数列(一)	(54)
(6)数列(二)	(54)
(7)三角函数的概念、图象及性质	(55)
(8)三角变换与解三角形	(56)
(9)平面向量	(57)
(10)不等式	(57)
(11)直线与圆	(58)
(12)圆锥曲线(一)	(59)
(13)圆锥曲线(二)	(60)
(14)直线、平面、简单几何体(一)	(60)
(15)直线、平面、简单几何体(二)	(61)
(16)排列、组合和概率	(62)
(17)概率与统计(理科)	(63)
(18)统计与导数(文科)	(63)
(19)极限与导数(理科)	(64)
(20)复数(理科)	(65)

第一编 主干知识系统训练

(1)函数的概念与性质

一、选择题(本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)

- 已知集合 $M = \{0, 1, 2\}$, $N = \{x \mid x = 2a, a \in M\}$, 则集合 $M \cap N$ 等于().
A. $\{0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 2\}$
- 函数 $y = \sqrt{1 - \lg_2(x^2 - 1)}$ 的定义域是().
A. $[-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$ B. $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$
C. $[-2, -1) \cup (1, 2]$ D. $(-2, -1) \cup (1, 2)$
- 已知 $f(\frac{1-x}{1+x}) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, 则 $f(x)$ 的解析式可取为().
A. $\frac{x}{1+x^2}$ B. $-\frac{2x}{1+x^2}$ C. $\frac{2x}{1+x^2}$ D. $-\frac{x}{1+x^2}$
- 函数 $y = x^3 - 6bx + 3b$ 在 $(0, 1)$ 内有最小值, 则实数 b 的取值范围是().
A. $(0, 1)$ B. $(0, 0.5)$ C. $(-\infty, -3)$ D. $(0, +\infty)$
- 若 $f(x)$ 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 内是增函数, 又 $f(-3) = 0$, 则 $xf(x) < 0$ 的解集是().
A. $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$ B. $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$
C. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ D. $(-3, 0) \cup (0, 3)$
- 函数 $y = e^{2x} (x \in R)$ 的反函数为().
A. $y = 2\ln x (x > 0)$ B. $y = \ln(2x) (x > 0)$
C. $y = \frac{1}{2}\ln x (x > 0)$ D. $y = \frac{1}{2}\ln(2x) (x > 0)$
- 若 $x \in R$, 则由 $x, -x, |x|, -|x|, \sqrt{x^2}, -\sqrt[3]{x^3}, \sqrt[3]{-x^3}$ 组成的集合中元素最多有().
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
- 函数 $f(x) = x^2 - 2ax - 3$ 在区间 $[1, 2]$ 上存在反函数的充分必要条件是().
A. $a \in (-\infty, 1]$ B. $a \in [2, +\infty)$
C. $a \in [1, 2]$ D. $a \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$
- 若 $f(x) = -x^2 + 2ax$ 与 $g(x) = \frac{a}{x+1}$ 在区间 $[1, 2]$ 上都是减函数, 则 a 的取值范围是().
A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (0, 1]$
C. $(0, 1)$ D. $(0, 1]$
- 函数 $f(x) = a^x + \lg_a(x+1)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值与最小值之和为 a , 则 a 的值为().

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4

11. 已知, 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上函数 $f(x) = x^2 + px + q$ 与函数 $y = x + \frac{1}{x} + 1$ 在同一点取得相同的最小值, 那么 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上的最大值为().

A. $\frac{13}{4}$ B. 4 C. 8 D. $\frac{5}{4}$

12. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 分别是定义在 R 上的奇函数和偶函数. 当 $x < 0$ 时, $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) > 0$, 且 $g(-3) = 0$. 则不等式 $f(x)g(x) < 0$ 的解集是().

A. $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$ B. $(-3, 0) \cup (0, 3)$
C. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ D. $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$

二、填空题(本题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

13. 在函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 中, 若 a, b, c 成等比数列, 且 $f(0) = -4$, 则 $f(x)$ 有最_____值(填“大”或“小”), 且该值为_____.

14. 已知函数 $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$, 若 $f(a) = b$, 则 $f(-a)$ 等于_____.

15. 若函数 $f(x) = a|x - b| + 2$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数, 则实数 a, b 的取值范围是_____.

16. 已知函数 $f(x) = ax - \frac{1}{x} (x \neq 0)$, 给出下列命题:

$f(x)$ 是奇函数; $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的充分条件是 $a \geq 0$; 对于任意的非零实数 a , 方程 $f(x) = a$ 必有实根; $f(x)$ 既无最大值也无最小值. 其中, 正确命题的所有序号是_____.

三、解答题(本题共 6 小题,满分 74 分)

17. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = ax + \frac{1-x}{a} (a > 0)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值为 $g(a)$, 求 $g(a)$ 的表达式及其最大值.

18. (本小题满分 12 分) 已知 $p: x^2 + mx + 1 = 0$ 有两个不相等的负根, $q: 关于 x 的函数 f(x) = \lg_m^2[(m^2 - 2m)x]$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上为单调减函数. 若 p 或 q 为真, p 且 q 为假, 求 m 的取值范围.

19.(本小题满分 12 分)若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + (a-1)x + 1$ 在区间 $(1, 4)$ 内为减函数,在区间 $(6, +\infty)$ 上为增函数,试求实数 a 的取值范围.

20.(本小题满分 12 分)已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \lg_2 \frac{1+x}{1-x}$, 求函数 $f(x)$ 的定义域, 并讨论它的奇偶性和单调性.

21.(本小题满分 12 分)已知函数 $f(x) = \lg_{\frac{1}{3}}[kx^2 + (k+2)x + k+2]$.

- () 若 $f(x)$ 的定义域为 R , 求 k 的取值范围;
- () 若 $f(x)$ 的值域为 R , 求 k 的取值范围;
- () 若 $f(x)$ 有最小值, 求 k 的取值范围.

22.(本小题满分 14 分)已知 $f(x) = 4x + ax^2 - \frac{2}{3}x^3$ ($x \in R$) 在区间 $[-1, 1]$ 上是增函数.

() 求函数 a 的值组成的集合 A ;

() 设关于 x 的方程 $f(x) = 2x + \frac{1}{3}x^3$ 的两个非零实根为 x_1, x_2 , 试问: 是否存在实数 m , 使得不等式 $m^2 + tm + 1 \geq |x_1 - x_2|$ 对任意 $a \in A$ 及 $t \in [-1, 1]$ 恒成立? 若存在, 求 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

(2)函数图象及函数应用

一、选择题(本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)

1. 如图所示,甲、乙、丙三个图象各表示两个变量 x 、 y 的对应关系,则有() .

- A 都表示映射,且甲、乙表示 y 关于 x 的函数
- B. 乙、丙表示 y 关于 x 的函数,且丙有反函数
- C 都表示 y 关于 x 的函数,且乙、丙有反函数
- D. 都不能表示 y 关于 x 的函数

2. 若函数 $y = \lg_a(x + b)$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象过两点 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$, 则() .

- A $a = 2, b = 2$
- B. $a = \sqrt{2}, b = 2$
- C $a = 2, b = 1$
- D. $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$

3. 已知函数 $y = \lg_2 x$ 的反函数是 $y = f^{-1}(x)$, 则函数 $y = f^{-1}(1 - x)$ 的图象是() .

4. 函数 $y = \lg_a x$ 在 $x \in [2, +\infty)$ 上总有 $|y| > 1$, 则 a 的取值范围是() .

- A $0 < a < \frac{1}{2}$ 或 $1 < a < 2$
- B. $\frac{1}{2} < a < 1$ 或 $1 < a < 2$
- C $1 < a < 2$
- D. $0 < a < \frac{1}{2}$ 或 $a > 2$

5. 把函数 $y = f(x)$ 的图象向左、向下分别平行移动 2 个单位长度, 得到函数 $y = 2^x$ 的图象, 则() .

- A $f(x) = 2^{x-2} + 2$
- B. $f(x) = 2^{x-2} - 2$
- C $f(x) = 2^{x+2} + 2$
- D. $f(x) = 2^{x+2} - 2$

6. 函数 $y = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{3}}$ 的图象大致是() .

7. 点 P 从点 O 出发, 按逆时针方向沿周长为 l 的图形运动一周, O 、 P 两点连线的距离 y 与点 P 走过的路程 x 的函数关系如右图, 那么点 P 所走的图形是() .

8. 函数 $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}$ ($-2 \leq x \leq 2$) 与直线 $y = k(x - 2) + 4$ 有两个交点时, 实数 k 的取值范围是() .

- A $\frac{5}{12} < k \leq \frac{3}{4}$
- B. $k > \frac{5}{12}$
- C $\frac{1}{3} < k \leq \frac{3}{4}$
- D. $0 < k < \frac{5}{12}$

9. 已知函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数且当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) = x + 1$, 则 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上的解析式是() .

- A $f(x) = 1 - x$
- B. $f(x) = 3 - x$
- C $f(x) = x - 3$
- D. $f(x) = -x - 1$

10. 设 $k > 1$, $f(x) = k(x - 1)$ ($x \in R$), 在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y = f(x)$ 的图象与 x 轴交于 A 点, 它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象与 y 轴交于 B 点, 并且这两个函数的图象交于 P 点. 已知四边形 $OAPB$ 的面积是 3, 则 k 等于() .

- A 3
- B. $\frac{3}{2}$
- C $\frac{4}{3}$
- D. $\frac{6}{5}$

11. 某校为了了解学生的课外阅读情况, 随机调查了 50 名学生, 得到他们在某一天各自课外阅读所用时间的数据, 结果用下面的条形图表示. 根据条形图可得这 50 名学生这一天平均每人的课外阅读时间为() .

- A 0.6 小时
- B. 0.9 小时
- C 1.0 小时
- D. 1.5 小时

12. 在 $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = 3^x$, $f(x) = \lg_{\frac{1}{3}} x$ 这四个函数中, 当 $0 < x_1 < x_2 < 1$

时, 使 $\frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)] < f(\frac{x_1 + x_2}{2})$ 成立的函数有() .

- A 0 个
- B. 1 个
- C 2 个
- D. 3 个

二、填空题(本题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

13. 函数 $f(x) = x^2 - bx + c$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $f(0) = 3$, 则 $f(b^x)$ 与 $f(c^x)$ 的大小关系是_____.

14. 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5, 5]$ 若当 $x \in [0, 5]$ 时, $f(x)$ 的图象如右图, 则不等式 $f(x) < 0$ 的解是_____.

15. 函数 $y = \frac{x-5}{2x+m}$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 则实数 m 的值是_____.

16. 如图 1, 将边长为 1 的正六边形铁皮的六个角各切去一个全等的四边形, 再沿虚线折起, 做成一个无盖的正六棱柱容器(图 2). 当这个正六棱柱容器的底面边长为_____时, 其容积最大.

三、解答题(本题共 6 小题, 满分 74 分)

17. (本小题满分 12 分) 已知函数 $g(x) = (a+1)^{x-2} + 1$ ($a > 0$) 的图象恒过定点 A , 且点 A 在函数 $f(x) = \lg \sqrt{3}(x+a)$ 的图象上.

- () 求函数 $g(x)$ 的反函数;
- () 若 $f(x-3), f(\sqrt{3}-1), f(x-5)$ 成等差数列, 求 x 的值.

18. (本小题满分 12 分) 在日常生活中, 为了尽快将水烧开, 我们常常在烧水时将煤气开关拨到最大位置(旋转 90°), 很少考虑开关旋转几度最省煤气的问题. 以下是某次实验中, 将开关拨到不同位置时, 分别烧开等量水的煤气消耗量.

开关旋转角度(度)	45	52.5	60	67.5	90
煤气用量(L)	45	44	43	45	50

- () 根据以上数据, 建立煤气用量 $y(L)$ 关于开关旋转角度 $x(度)$ 的函数模型;
- () 在本实验中, 开关旋转角度为多少时煤气用量最少?

19. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

- () 判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并证明;
- () 求 $f(x)$ 的反函数的解析式;
- () 证明 $f(x)$ 的反函数的图象与直线 $y = x$ 没有交点.

20. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2+1}{b+\sqrt{3}x}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 是奇函数, 且 $f(2) = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

- () 试求函数 $f(x)$ 的解析式;
- () 函数 $y = f(x)$ 的图象是否关于直线 $y = \sqrt{3}x$ 对称? 说明理由.

21. (本小题满分 12 分) 函数 $y = ax^3 - x^2 + cx$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示, 它与 x 轴仅有两个公共点 $O(0, 0)$ 与 $A(x_A, 0)$ ($x_A > 0$).

- () 用反证法证明常数 $c \neq 0$;
- () 如果 $x_A = \frac{1}{2}$, 求函数的解析式.

22. (本小题满分 14 分) 已知 $f(x) = \lg(a^x - b^x)$ (常数 $a > 1 > b > 0$).

- () 求 $y = f(x)$ 的定义域;
- () 在函数 $y = f(x)$ 的图象上是否存在不同的两点, 使过这两点的直线平行于 x 轴;
- () 当 a, b 满足什么条件时, $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上恒取正值.

(3)函数综合及代数推理

一、选择题(本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分)

- 具有性质 $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$ 的函数是().
A. x^x B. $g_2 x$ C. $2x$ D. x^2
- 下列函数中没有反函数的是().
A. $y=2x$ B. $y=x^2$ C. $y=\sqrt{x}$ D. $y=\frac{2}{x}$
- 设数集 $M=\{x|m \leq x \leq m+\frac{3}{4}\}$, $N=\{x|n-\frac{1}{3} \leq x \leq n\}$, 且 M, N 都是集合 $\{x|0 \leq x \leq 1\}$ 的子集,如果把 $a-b$ 叫做集合 $\{x|a \leq x \leq b\}$ 的“长度”,那么集合 $M \cap N$ 的“长度”的最小值是().
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{12}$ D. $\frac{5}{12}$
- 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(x+2)$, 当 $x \in [3, 5]$ 时, $f(x) = 2 - |x-4|$, 则().
A. $f(s - \frac{\pi}{6}) < f(c - \frac{\pi}{6})$ B. $f(s-1) > f(c-1)$
C. $f(c - \frac{2\pi}{3}) < f(s - \frac{2\pi}{3})$ D. $f(c-2) > f(s-2)$
- 设函数 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x < 1, \\ 4 - \sqrt{x-1} & x \geq 1, \end{cases}$ 则使得 $f(x) \geq 1$ 的自变量 x 的取值范围为().
A. $(-\infty, -2] \cup [0, 10]$ B. $(-\infty, -2] \cup [0, 1]$
C. $(-\infty, -2] \cup [1, 10]$ D. $[-2, 0] \cup [1, 10]$
- 设函数 $f(x) (x \in R)$ 为奇函数, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(x+2) = f(x) + f(2)$, 则 $f(5)$ 等于().
A. 0 B. 1 C. $\frac{5}{2}$ D. 5
- 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & x \leq 0, \\ 2 & x > 0. \end{cases}$ 若 $f(-4) = f(0)$, $f(-2) = -2$, 则关于 x 的方程 $f(x) = x$ 的解的个数为().
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 容器甲中有 m 升水,将水缓慢注入空容器乙内, t 分钟后容器甲中剩余水量 y 符合指数函数 $y = m \cdot e^{-at}$ ($e = 2.7187...$ 为自然对数的底, $a > 0$), 假设经过 5 分钟后, 容器甲和容器乙的水量相等, 且再过 n 分钟容器甲中的水只有 $\frac{m}{8}$, 则 n 的值为().
A. 7 B. 9 C. 10 D. 15
- 函数 $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} (x \leq -\frac{1}{2})$ 的值域是().
A. $(-\infty, -\frac{7}{4}]$ B. $(-\infty, -\frac{3\sqrt{2}}{2}]$

$$C. [-\frac{7}{4}, +\infty) \quad D. [-\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty)$$

- 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上有定义且 $f(x) = x^3 + x$, 当 $f(1-a) + f(1-a^2) > 0$ 时, a 的取值范围是().
A. $(-2, 1)$ B. $(0, \sqrt{2})$ C. $(0, 1)$ D. $(-2, \sqrt{2})$
 - 下列函数中,同时满足条件: 是奇函数; 在 $[0, 1]$ 上是增函数; 在 $[0, 1]$ 上最小值为“0”的函数是().
A. $y = x^5 - 5x$ B. $y = \sin x + 2x$
C. $y = \frac{1-2^x}{1+2^x}$ D. $y = \sqrt{x} - 1$
 - 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in P, \\ -x, & x \in M, \end{cases}$ 其中 P, M 为实数集 R 的两个非空子集, 又规定 $f(P) = \{y | y = f(x), x \in P\}$, $f(M) = \{y | y = f(x), x \in M\}$. 给出下列四个判断:
若 $P \cap M = \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) = \emptyset$ 若 $P \cap M \neq \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) \neq \emptyset$
若 $P \cup M = R$, 则 $f(P) \cup f(M) = R$ 若 $P \cup M \neq R$, 则 $f(P) \cup f(M) \neq R$
其中正确判断有().
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
- 二、填空题(本题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)
- 对任意的 $a \in [-1, 1]$, 函数 $f(x) = x^2 + (a-4)x + 4 - 2a$ 的值总大于 0, 则 x 的取值范围是_____.
 - 函数 $f(x) = 2^x - x^2 - 2x - 1$ 的零点的个数为_____个.
 - 已知函数 $f(x) = \lg_a x (a > 1 \text{ 且 } x \in (0, +\infty))$, 若 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 判断 $a = \frac{1}{2} [f(x_1) + f(x_2)]$ 与 $b = f(\frac{x_1 + x_2}{2})$ 的大小关系, 结论为_____.
 - 有恒等式 $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = (x+1)^3 + b_1 (x+1)^2 + b_2 (x+1) + b_3$, 定义函数 $f(a_1, a_2, a_3) = b_1 + b_2 + b_3$, 则 $f(3, 3, 2) =$ _____.
- 三、解答题(本题共 6 小题,满分 74 分)
- (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(t)$ 满足对任意实数 x, y 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy + 1$, 且 $f(-2) = -2$.
() 求 $f(1)$ 的值;
() 证明: 对一切大于 1 的正整数 t , 恒有 $f(t) > t$.

18. (本小题满分 12 分) 某厂生产一种机器的固定成本(即固定投入)为 0.5 万元, 但每生产一台, 需要增加可变成本(即另增加投入)0.25 万元. 市场对此产品的年需求量为 500 台, 销售的收入函数为 $R(x) = 5x - \frac{x^2}{2}$ (万元) ($0 \leq x \leq 5$), 其中 x 是产品售出的数量(单位: 百台).

() 把利润表示为年产量的函数;

() 年产量是多少时, 工厂所得利润最大?

() 年产量是多少时, 工厂才不亏本?

19. (本小题满分 12 分) 设函数 $f(x) = \frac{a(x-1)^2+1}{bx+c-b}$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$), $f(2) = 2$, $f(3) < 3$, 若 $f(x)$ 的图象按向量 $e = (-1, 0)$ 平移后得到的图像关于原点对称.

() 求 a, b, c 的值;

() 设 $0 < |x| < 1, 0 < |t| \leq 1$, 求证: $|t+x| + |t-x| < |f(tx+1)|$.

20. (本小题满分 12 分) 设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x) = \frac{x}{x^2+a}$ 图像的最高点为 $P(m, n)$.

() 若 $m < 1, n < 1$, 求 a 的取值范围;

() 求证: 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| < 1$ 的充要条件是 $m > 1$.

21. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}}{5}; g(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}}{5}$.

() 证明 $f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$, 并求 $f(x)$ 的单调区间;

() 分别计算 $f(4) - 5f(2)g(2)$ 和 $f(9) - 5f(3)g(3)$ 的值, 由此概括出涉及函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对所有不等于零的实数 x 都成立的一个等式, 并加以证明.

22. (理)(本小题满分 14 分) 设函数 $f(x) = x - 1(x+m)$, 其中常数 m 为整数.

() 当 m 为何值时, $f(x) \geq 0$;

() 定理: 若函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(a)$ 与 $g(b)$ 异号, 则至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使 $g(x_0) = 0$.

试用上述定理证明: 当整数 $m > 1$, 方程 $f(x) = 0$, 在 $[e^{-m} - m, e^{2m} - m]$ 内有两个实根.

(文) 记函数 $f(x) = \sqrt{2 - \frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A , $g(x) = \lg[(x-a-1)(2a-x)]$ ($a < 1$) 的定义域为 B .

() 求 A ;

() 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

(4)等差、等比数列的基本问题

一、选择题(本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = a^n - 1$ (a 是不为 0 的实数),那么 $\{a_n\}$ ().
 A 一定是等差数列 B. 一定是等比数列
 C 是等差数列或是等比数列 D. 既不是等差数列,也不是等比数列
- 数列 $\{a_n\}$, 如果 $a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_n - a_{n-1}, \dots$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列, 那么 $a_n =$ ().
 A $\frac{3}{2}(1 - \frac{1}{3^n})$ B. $\frac{3}{2}(1 - \frac{1}{3^{n-1}})$ C $\frac{2}{3}(1 - \frac{1}{3^n})$ D. $\frac{2}{3}(1 - \frac{1}{3^{n-1}})$
- 已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$ ($n \geq 1$), 则 $\{a_n\}$ 的通项为().
 A 2^n B. $2^n + 1$ C $2^n - 1$ D. 2^{n+1}
- 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$, 则 a_{1994} 等于().
 A - 4 B. - 5 C 4 D.5
- 若 $\{a_n\}$ 为一个递减等比数列, 公比为 q , 则该数列的首项 a_1 和公比 q 一定为().
 A $q < 0, a_1 \neq 0$ B. $0 < q < 1, a_1 > 0$
 C $q > 1, a_1 < 0$ D. $a_1 > 0, 0 < q < 1$ 或 $a_1 < 0, q > 1$
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $3(a_3 + a_5) + 2(a_7 + a_{10} + a_{13}) = 24$, 则数列前 13 项的和是().
 A 13 B. 26 C 52 D. 156
- 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 a_6 = 9$, 则 $\lg a_1 + \lg a_2 + \dots + \lg a_{10} =$ ().
 A 12 B. 10 C 8 D. $2 + \lg 5$
- 等比数列的前 n 项, 前 $2n$ 项, 前 $3n$ 项的和分别为 A, B, C , 则().
 A $A + B = C$ B. $B^2 = A$
 C $(A + B) \cdot A = B^2$ D. $A^2 + B^2 = A(B + C)$
- 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是等差数列, 其中 $a_1 = 25, b_1 = 75, a_{100} + b_{100} = 100$, 那么 $\{a_n + b_n\}$ 的前 100 项的和是().
 A 0 B. 100 C 10000 D. 102400
- 已知 $a, b \in \{x | x > 0\}$, A 为 a, b 的等差中项, G 为 a, b 的等比中项, 则 ab 与 AG 的大小关系是().
 A $ab = AG$ B. $ab \geq AG$ C $ab \leq AG$ D. 不能确定
- 时钟若在每整点和半点打响, 整点打响次数与点数相同, 半点只打一下, 则一昼夜打响次数为().
 A 324 B. 326 C 180 D. 182
- 计算机是将信息转换成二进制数进行处理的, 二进制即“逢 2 进 1”, 如 $(1101)_2$, 表示二进制数, 将它转换成十进制形式是 $1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 13$, 那么将二进制数 $(111\dots 11)_2$ 转换成十进制是().

2001个1

A $2^{2002} - 2$ B. $2^{2001} - 2$ C $2^{2001} - 1$ D. $2^{2000} - 1$

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分, 请将每题答案填在题中横线上)

- 已知不同的实数 a, b, c 成等差数列, 且 a, c, b 成等比数列, 则 $a^2 b^2 c^2 =$ _____ .
- 设数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1 = 1$, 前 n 项和 S_n 与通项 a_n 间满足关系式 $a_n = \frac{2S_n^2}{2S_n - 1}$ ($n \geq 2$), 则 $S_n =$ _____ .
- 定义一种运算“ $*$ ”, 对于自然数 n 满足以下运算性质:
 (1) $1 * 1 = 1$, (2) $(n + 1) * 1 = 3(n * 1)$. 则 $n * 1$ 用含 n 的代数式表示是_____ .
- 下列命题中, 正确的序号是_____ .
 公比 $q > 1$ 的等比数列各项都大于 1 .
 $ac = b^2$ 是 a, b, c 为等比数列的充要条件 .
 $\{\lg 3, 2^n\}$ 是等差数列而不是等比数列 .
 若 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 那么“ $a - 2b + c = 0$ ”是“ a, b, c 成等差数列”的充要条件 .
 “ $\lg x, \lg y, \lg z$ 成等差数列”是“ x, y, z 成等比数列”的充要条件 .
- 解答题(本大题共 6 小题, 满分 74 分, 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)
 17. (本小题满分 12 分) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n , 已知 $a_{10} = 30, a_{20} = 50$.
 () 求通项 a_n ;
 () 若 $S_n = 242$, 求 n
- (本小题满分 12 分) 设有数列 $\{a_n\}$, $a_1 = \frac{5}{6}$, 若关于 x 的二次方程 $a_{n-1}x^2 - a_nx + 1 = 0$ 有根 α, β , 且满足 $3\alpha - \alpha\beta + 3\beta = 1$.
 () 求证 $\{a_n - \frac{1}{2}\}$ 是等比数列;
 () 求 $\{a_n\}$ 通项 a_n

19. (本小题满分 12 分) 已知递增的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项积为 512, 且这三项分别减去 1, 3, 9 后成等差数列, 求证 $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{n}{a_n} < 1$.

20. (本小题满分 12 分) 为了迎接 2008 年北京奥运会, 我国决定治理垃圾, 经调查近 10 年来, 我国城市垃圾的年平均增长率为 3%, 到 2002 年底堆存垃圾已达 60 亿吨, 目前我国还以年产 1 亿吨的速度产生新垃圾, 垃圾处理已刻不容缓.

() 问 10 年前我国城市垃圾约有多少亿吨?

() 如果 2003 年起, 每年处理上年堆存垃圾的 $\frac{1}{10}$, 到 2007 年底我国城市垃圾约有多少亿吨?

21. (本小题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$, 设它的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n = \frac{10n - n^2}{2}$, 记 $T_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$, 求 T_n

22. (本小题满分 14 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2}}$ ($x < -\sqrt{2}$), 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, \frac{1}{a_{n+1}} = f^{-1}(a_n), n \in \mathbb{N}^*$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(5)等差、等比数列的综合运用

一、选择题(本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 给出四个命题: 如果 $a_n = 2n - 2$, 则 $\left\{ \sqrt{S_n + \frac{1}{4}} \right\}$ 是等差数列; 如果 $a_n = 2n - 7$, 则 $\{ \sqrt{S_n + 9} \}$ 是等差数列; 如果 $a_n = 2^n$, 则 $\{S_n + 2\}$ 是等比数列; 如果 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 则 $\left\{ \sqrt{S_n + \frac{1}{2}} \right\}$ 是等比数列, 其中正确的命题是() .
- A B. C D.

2. 已知方程 $(x^2 - 2x + m)(x^2 - 2x + n) = 0$ 的四个根组成一个首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 则 $|m - n| = ()$.

A 1 B. $\frac{3}{4}$ C $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{8}$

3. 一个等比数列中, $S_n = 48$, $S_{2n} = 60$, 则 S_{3n} 为() .

A 183 B. 108 C 75 D. 63

4. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 50, 公差为 2 的等差数列, $\{b_n\}$ 是首项为 10, 公差为 4 的等差数列, 设以 a_k 、 b_k 为相邻两边的矩形内最大圆面积为 S_k , 若 $k \leq 21$, 那么 S_k 等于() .

A $\pi(2k + 1)^2$ B. $\pi(2k + 3)^2$
C $\pi(k + 12)^2$ D. $\pi(k + 24)^2$

5. 等差数列 $\{a_n\}$ 中 $S_p = \frac{p}{q}$, $S_q = \frac{q}{p}$ ($p \neq q$), 则 S_{p+q} 的值() .

A 大于 4 B. 等于 4
C 小于 4 D. 以上均错

6. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 512$, 公比 $q = -\frac{1}{2}$, 用 Π_n 表示它的前 n 项之积: $\Pi_n = a_1 \cdot a_2 \dots a_n$, 则 $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ 中最大的是() .

A Π_{11} B. Π_{10} C Π_9 D. Π_8

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 公比 $q \neq 1$, 设 $P = \frac{a_3 + a_9}{2}$, $Q = \sqrt{a_5 a_7}$, 则 P 与 Q 的大小关系是() .

A $P > Q$ B. $P < Q$ C $P = Q$ D. 无法确定

8. 已知 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有 $a_n = n^2 + \lambda n$ 恒成立, 则实数 λ 的取值范围是() .

A $(-\frac{7}{2}, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$ C $(-2, +\infty)$ D. $(-3, +\infty)$

9. 把正整数以下列方式分组: (1), (2, 3), (4, 5, 6), ... 其中每一组都比它的前一组多一个数, 设 S_n 为其中第 n 组中各数之和, 那么, S_{21} 等于() .

A 1113 B. 4641 C 5082 D. 53361

10. 某人从某日起, 每年这一天到银行存款一年定期 x 元, 且每年到期的存款将本和利息都再存入新一年的一年定期, 若年利率 a 保持不变, 三年到期之日将所存的存款和利息全部收回, 他可能取回的钱数为() .

A $x(1 + a^4)$ 元 B. $x(1 + a)^3$ 元

C $\frac{x}{a}[(1 + a)^4 - 1]$ 元 D. $\frac{x}{a}[(1 + a)^4 - (1 + a)]$ 元

11. 一个连续自然数按规律排成下表:

0 3 $\longrightarrow$ 4 7 $\longrightarrow$ 8 11...

1 $\longrightarrow$ 2 5 $\longrightarrow$ 6 9 $\longrightarrow$ 10

根据规律, 从 2002 到 2004, 箭头方向依次为() .

A $\downarrow \rightarrow$ B. $\rightarrow \uparrow$ C $\uparrow \rightarrow$ D. $\rightarrow \downarrow$

12. 某同学作了一个如图所示的等腰直角三角形形状的数表, 且把奇数和偶数分别依次排在了数表的奇数列和偶数列, 若用 $a(i, j)$ 表示第 i 行从左数第 j 个数, 如 $a(4, 3) = 10$, 则 $a(21, 6) = ()$.

A 219 B. 211
C 209 D. 213

1
2 4
3 5 7
6 8 10 12
9 11 13 15 17
- - - - -
.....

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分, 请将每题答案填在题中横线上)

13. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{a_1(3^n - 1)}{2}$ (对于所有 $n \geq 1$), 且 $a_4 = 54$, 则 a_1 的数值是_____ .

14. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 1 + \frac{1}{10}(1 + n)$, 则 $a_{10} + a_{11} + \dots + a_{99} =$ _____ .

15. 若干个能唯一确定一个数列的量称为该数列的“基本量”. 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的无穷等比数列, 下列 $\{a_n\}$ 的四组量中, 一定能成为该数列“基本量”的是第_____组. (写出所有符合要求的组号)

S_1 与 S_2 ; a_2 与 S_3 ; a_1 与 a_n ; q 与 a_n

其中 n 为大于 1 的整数, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 .

16. 定义“等和数列”: 在一个数列中, 如果每一项与它的后一项的和都为同一个常数, 那么这个数列叫做等和数列, 这个常数叫做该数列的公和. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等和数列, 且 $a_1 = 2$, 公和为 5, 那么 a_{18} 的值为_____, 这个数列的前 n 项和 S_n 的计算公式为_____ .

三、解答题(本大题共 6 小题, 满分 74 分, 解答应写出必要的文字说明)

17. (本小题满分 12 分) 数列 $\{a_n\}$ 为正项等比数列, 它的前 n 项和为 80, 其中数值最大的项为 54, 前 $2n$ 项的和为 6560, 试求此数列的首项 a_1 和公比 q .

18. (本小题满分 12 分) 已知 $a > 0, a \neq 1$, 数列 $\{a_n\}$ 是首项与公比都是 a 的等比数列, 又 $b_n = a_n \lg a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 如果数列 $\{b_n\}$ 中的每一项总小于它后面的项.

() 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

() 求 a 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分) 等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a , 公差为 d , 且 $a_4 = 84, S_{10} > 0, S_{11} < 0$.

() 求 d 的取值范围;

() 求使 $a_n < 0$ 的最小正整数 n ;

() 记集合 $\{S_1, S_2, \dots, S_n, \dots\}$ 中各元素的最大值为 M , 试求 M 的取值范围.

20. (本小题满分 12 分) 某渔业公司今年初用 98 万元购进一艘渔船, 用于捕捞, 第一年需各种费用 12 万元, 从第二年开始包括维修费在内, 每年所需费用均比上一年增加 4 万元, 该船每年捕捞的总收入为 50 万元.

() 该船捕捞几年开始赢利 (即总收入减去成本及所有费用之差为正值)?

() 该船捕捞若干年后, 处理方案有两种:

当年平均赢利达到最大值时, 以 26 万元的价格卖出;

当赢利总额达到最大值时, 以 8 万元的价格卖出; 问哪一种方案较为合算? 请说明理由?

21. (本小题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 a_n 是 S_n 与 2 的等差中项, 数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1 = 1$, 点 $P(b_n, b_{n+1})$ 在直线 $x - y + 2 = 0$ 上.

() 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项 a_n, b_n ;

() 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 B_n , 试比较 $\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} + \dots + \frac{1}{B_n}$ 与 2 的大小.

22. (本小题满分 14 分) 如图, $\triangle OBC$ 的三个顶点坐标分别为 $(0, 0), (1, 0), (0, 2)$, 设 P_1 为线段 BC 的中点, P_2 为线段 CO 的中点, P_3 为线段 OP_1 的中点, 对于每一个正整数 n , P_{n+3} 为线段 $P_n P_{n+1}$ 的中点, 令 P_n 的

坐标为 (x_n, y_n) , $a_n = \frac{1}{2} y_n + y_{n+1} + y_{n+2}$.

() 求 a_1, a_2, a_3 及 a_n ;

() 证明 $y_{n+4} = 1 - \frac{y_n}{4}, n \in \mathbb{N}^*$;

() 若记 $b_n = y_{4n+4} - y_{4n}, n \in \mathbb{N}^*$, 证明 $\{b_n\}$ 是等比数列.

(6)数列的实际应用及数学归纳法(理)

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 夏季某高山上的温度从山脚起,每升高 100m 降低 0.7°C ,已知山顶处的温度是 14.8°C ,山脚处的温度是 26°C ,则这山的山顶相对于山脚的高度是() .

- A. 2000m B. 1800m C. 1600m D. 1400m

2. 根据市场调查结果,预测某种家用商品以年初开始的 n 个月内累积的需求量 S_n (万件)近似地满足 $S_n = \frac{n}{90}(21n - n^2 - 5)$ ($n = 1, 2, \dots, 12$), 按此预测在本年度内,需求量超过 1.5 万件的月份是() .

- A. 5 月、6 月 B. 6 月、7 月 C. 7 月、8 月 D. 8 月、9 月

3. 某企业去年销售收入 1000 万元,年成本分为年生产成本 500 万元与年广告费成本 200 万元两部分,若利润的 $P\%$ 为国税,且年广告费超出年销售收入 2% 的部分必须按 $P\%$ 征国税,其他不纳税,已知该企业去年共纳税 120 万元,则 $P\%$ 为() .

- A. 40% B. 25% C. 12% D. 10%

4. 农民收入由工资性收入和其他收入两部分构成. 2003 年某地区农民人均收入为 3150 元(其中工资性收入为 1800 元,其他收入为 1350 元),预计该地区自 2004 年起的 5 年内,农民的工资性收入将以每年 6% 的年增长率增长,其他收入每年增加 160 元. 根据以上数据,2008 年该地区农民人均收入介于() .

- A. 4200 元 ~ 4400 元 B. 4400 元 ~ 4600 元
C. 4600 元 ~ 4800 元 D. 4800 元 ~ 5000 元

5. 有 10 台型号相同的联合收割机收割一片土地上的庄稼,若同时投入工作到收割完毕需用 24h,但现在它们是每隔相同的时间顺次投入工作的,每一台投入工作后都一直工作到庄稼收割完毕,且第一台收割机工作的时间是最后一台的 5 倍,那么用这种收割方法收割完成这片土地的庄稼,需用的时间为() .

- A. 48h B. 40h C. 24h D. 20h

6. 某工厂第二年的生产增长率为 p ,第三年的生产增长率为 q ,第四年的生产增长率为 r ,设这三年的平均增长率为 x ,则有() .

- A. $x = \frac{p+q+r}{3}$ B. $x < \frac{p+q+r}{3}$
C. $x \leq \frac{p+q+r}{3}$ D. $x \geq \frac{p+q+r}{3}$

7. 从材料工地运送电线杆到 500m 以外的公路,沿公路一侧每隔 50m 埋栽一根电线杆,又知每次只能运 3 根,要完成运栽 20 根电线杆的任务,最佳方案是使运输卡车运行() .

- A. 11700m B. 14600m C. 14500m D. 14000m

8. 在直角坐标系中, O 是坐标原点, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 是第一象限的两个点,若 $1, x_1, x_2, 4$ 依次成等差数列,而 $1, y_1, y_2, 8$ 依次成等比数列,则 $\triangle OP_1P_2$ 的面积是() .

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

9. 用数学归纳法证明 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n$, ($n \in N^*, n > 1$) 时,由 $n = k$ ($k > 1$) 不等式成立,推证 $n = k + 1$ 时,左边应增加的项数是() .

- A. 2^{k-1} B. $2^k - 1$ C. 2^k D. $2^k + 1$

10. 某个命题与自然数 n 有关,如果 $n = k$ 时,该命题成立,可以推得 $n = k + 1$ 时该命题也成立,现知道 $n = 5$ 时,该命题不成立,则() .

- A. $n = 6$ 时,该命题不成立 B. $n = 6$ 时,该命题成立
C. $n = 4$ 时,该命题不成立 D. $n = 4$ 时,该命题成立

11. 在如图的表格中,每格填上一个数字后,使每一横行成等差数列,每一纵列成等比数列,则 $a + b + c$ 的值为() .

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

12. 将 n^2 个正整数 $1, 2, 3, \dots, n^2$ 填入到 $n \times n$ 个方格中,使得每行,每列,每条对角线上的数的和相等,这个正方形就叫做 n 阶幻方,如下图就是一个 3 阶幻方. 定义 $f(n)$ 为 n 阶幻方对角线上数的和,例如 $f(3) = 15$,那么 $f(4)$ 是() .

- A. 32 B. 33
C. 34 D. 35

1		2		
$\frac{1}{2}$		1		
		a		
			b	
				c

8	1	6
3	5	7
4	9	2

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分,请将每题答案填在题中横线上)

13. 某人到银行办理零存整取,他从 1 月起每月第一天存入 100 元,到 12 月最后一天取出全部本金及利息,已知月利率是 0.165% ,那么第一期存的钱到年底所得利息为 _____ 元,到年底他实际取出 _____ 元.(注:利息 = 本金 $\times$ 存期 $\times$ 利率)

14. 某种汽车购买时费用为 10 万元,每年的保险、养路、汽油费用共 9 千元,汽车的年维修费逐年以等差数列递增,第一年为 2 千元,第 2 年为 4 千元,第 3 年为 6 千元, ... 问这种汽车使用 _____ 年报废最合算?(即汽车的年平均费用最低)

15. 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, 并且记 $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f[f(x)]$, $f_3(x) = f[f_2(x)]$, ..., $f_n(x) = f[f_{n-1}(x)]$ ($n \geq 2$), 可推测, $f_n(x)$ 的解析式是 _____ .

16. 有一堆物品,某层放 n^2 个,而它的上一层比它少放 $(2n - 1)$ 个 ($n \geq 2$). 已知这堆物品底层放有 100 个,顶层放 16 个,这堆物品共有 _____ 个.

三、解答题(本大题共 6 小题,满分 74 分,解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 12 分) 用分期付款的方式购买家用电器一件,价格为 1150 元,购买当天先付 150 元,以后每月这一天都交 50 元,并加付欠款利息,月利率为 1% ,若付 150 元之后的第一个月算分期付款的第一个月,问分期付款的第 10 个月该交付多少钱,全部付清后,实际总花了多少钱.

18.(本小题满分 12 分)某汽车销售公司为促销采取了较为灵活的付款方式,对购买 10 万元一辆的轿车在一年内将款全部付清。选择分期付款的方案购车:

付款方案:分 12 次付清,购买后 1 个月第 1 次付款,再过 1 个月第二次付款,……,购买后 12 个月第 12 次付款。

规定分期付款中每期付款额相同;月利率为 0.8%,每月利息按复利计算,即指上月利息要计入下月本金。

问:共付款多少万元?(参考数据: $1.008^{11} \approx 1.092$, $1.008^{12} \approx 1.1$)

19.(本小题满分 12 分)甲、乙两物体分别从相距 70m 的两处同时相向运动,甲第一分钟走 2m,以后每分钟比前 1 分钟多走 1m,乙每分钟走 5m

()甲、乙开始运动后几分钟相遇?

()如果甲、乙到达对方起点后立即折返,甲继续每分钟比前 1 分钟多走 1m,乙继续每分钟走 5m,那么开始运动几分钟后第二次相遇?

20.(本小题满分 12 分)某学生在体育训练时弄伤了膝关节,医生给开了一些消炎药,并叮嘱每天早晚八时各服用一片药片。现知该药片每片 220 毫克,他的肾脏每十二小时从体内滤出这种药的 60%;并且如果这种药在体内的残留量超过 386 毫克,就将产生副作用。请问:

()该同学上午八时第一次服药,问第二天早间服完药时,药在他体内还残留多少?

()该同学若长期服用该药会不会产生副作用?

21.(本小题满分 12 分)某沙漠地区经过人们的改造,到 2002 年底,将 1 万亩沙漠面积的 30%变为绿洲,计划从 2003 年起,每年将剩余沙漠面积的 16%改造为绿洲;同时,上一年绿洲面积的 4%被侵蚀,又变成了沙漠。

()经过 n 年后,该地区的绿洲面积为多少万亩?

()至少经过多少年的努力,才能使该地区沙漠绿化率超过 60%?

22.(本小题满分 14 分)在自然数集合上定义函数 $f(n)$: $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, $f(k+1) = 3f(k) - 2f(k-1)$ ($k \geq 1$)。

()从 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 等项探索 $f(n)$ 的通项公式;

()证明你探索的公式的正确性;

()求 $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ 的和。

(7)三角函数的概念、图象及性质

一、选择题(本题共 12 个小题,每小题只有一个正确答案,每小题 5 分,共 60 分)

1. 在 $-360^\circ \leq \beta \leq 720^\circ$ 角中,所有与 -21° 角终边相同的角的和是() .

A 1017° B. 1059° C 318° D. 1007°

2. 已知角 α 是三角形的一个内角,且 $\cos \alpha < 0$,则下图中表示角 α 的正弦线 MP ,余弦线 OM ,正切线 AT 全部正确的一组是() .

3. 角 α 终边上一点 $P(2\sin \alpha, -2\cos \alpha)$,若 $\alpha \in (-\pi, \pi)$,则 $\alpha =$ () .

A 2 B. -2 C $2 - \frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{2} - 2$

4. 已知点 $P(\sin \alpha - \cos \alpha, \tan \alpha)$ 在第一象限,则在 $[0, 2\pi]$ 内 α 的取值范围是() .

A $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$ B. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$
C $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$ D. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi)$

5. “ $\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ”是“ $\alpha = k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$ ”的() .

A 必要非充分条件 B. 充分非必要条件
C 充分必要条件 D. 既非充分又非必要条件

6. 使函数 $f(x) = \sin(3x + \varphi) - \cos(3x + \varphi)$ 为偶函数,且在 $[-\frac{\pi}{6}, 0]$ 上是增函数的 φ 的一个值是() .

A $-\frac{5\pi}{4}$ B. $-\frac{\pi}{4}$ C $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{5\pi}{4}$

7. 函数 $y = A^{\frac{1}{a}}(ax + b)$ 的图象与函数 $y = A^{\frac{1}{a}}(ax + b)(a > 0)$ 的图象在区间 $[c, c + \frac{\pi}{a}]$ 上() .

A 没有交点 B. 一定有两个交点
C 有且只有一个交点 D. 至少有一个交点

8. 下列函数中,最小正周期为 π ,且图像关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 成轴对称图形的是() .

A $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ B. $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$
C $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ D. $y = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6})$

9. 将函数 $y = 2\sin 2x$ 的图像按 $\vec{a}$ 平移,得到函数 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$ 的图像,则向量 $\vec{a}$ 的坐标是() .

A $(-\frac{\pi}{3}, 1)$ B. $(-\frac{\pi}{6}, 1)$ C $(\frac{\pi}{3}, 1)$ D. $(\frac{\pi}{6}, 1)$

10. 若 $m, n \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,且 $m - n > 0$,则下列结论中正确的是() .

A $\sin m > \sin n$ B. $\sin m + \sin n > 0$ C $\cos m < \cos n$ D. $\cos^2 m > \cos^2 n$

11. 将函数 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位,得到函数 $y = f(x)$ 的图象,则函数 $f(x)$ 的单调递增区间是() .

A $[k\pi - \frac{2\pi}{3}, k\pi - \frac{\pi}{6}](k \in \mathbb{Z})$ B. $[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3\pi}{4}](k \in \mathbb{Z})$
C $[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3}](k \in \mathbb{Z})$ D. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi)$

12. 函数 $y = A \cos \omega x$ ($A \neq 0$) 的最小值为 $\frac{A}{2}$,则其最小正周期是() .

A $\frac{2\pi}{A}$ B. $-\frac{2\pi}{A}$ C $\frac{\pi}{A}$ D. $-\frac{\pi}{A}$

二、填空题(本题共 4 个小题,每题 4 分,共 16 分)

13. 不等式组 $\begin{cases} 4\cos^2 x - 3 \geq 0 \\ \tan x < 1 \\ x^2 < 1 \end{cases}$ 的解集是_____ .

14. 若 $x = \frac{\pi}{3}$ 是方程 $2\cos(x + \alpha) = 1$ 的解,其中 $\alpha \in (0, 2\pi)$,则 $\alpha =$ _____ .

15. 已知函数 $y = 2\cos \pi x (0 \leq x \leq 1002)$ 的图象和直线 $y = 2$ 围成一个封闭的平面图形,则这个封闭图形的面积是_____ .

16. 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$,给出如下四个论断:

它的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 成轴对称图形;

它的图象关于点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 成中心对称图形;

它的最小正周期为 π ;

它在区间 $[-\frac{\pi}{6}, 0]$ 上增函数;

在以上四个论断中以其中两个当条件,余下的两个论断当结论,写出你认为正确的一个命题,该命题是_____ .

三、解答题(本题共 6 个小题,总分 74 分)

17. (本小题满分 12 分)已知函数 $f(x) = \cos^4 x - 2\sin x \cos x - \sin^4 x + 1$.

() 求 $f(x)$ 的最小正周期;

() 若 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,求 $f(x)$ 的最大值,最小值及相应 x 的值 .

18. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \theta)$ ($A > 0, \omega > 0, |\theta| < \frac{\pi}{2}$) 的图象与 y 轴交于点 $(0, \frac{3}{2})$, 它在 y 轴右侧的第一个最大值点和最小值点分别是 $(x_0, 3), (x_0 + 2\pi, -3)$.

() 求函数 $y = f(x)$ 的解析式;

() 用“五点法”作出此函数在一个周期内的图象, 并说明它是由函数 $y = \sin x$ 的图象依次经过哪些变换得到的?

19. (本小题满分 12 分) 若函数 $f(x) = \sin(a\pi x - \frac{\pi}{4})$ ($a > 0$) 在区间 $(0, 1)$ 上有且仅有两条平行于 y 轴的直线是其图象的对称轴, 求 a 的取值范围.

20. (本小题满分 12 分) 已知一弹簧挂着小球作上下振动时, 时间 $t(s)$ 与小球相对于平衡位置 (即静止时的位置) 的高度 $h(c)$ 之间的函数关系 $h = A \sin(\omega t + \varphi)$ ($\omega > 0, t \geq 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$) 的图象如图所示.

() 试写出 $h = A \sin(\omega t + \varphi)$ 的函数解析式;

() 小球开始振动时 (即 $t = 0$) 时的位置在哪里?

() 小球最高最低点与平衡位置的距离分别是多少?

() 经过多少时间, 小球往复振动一次?

() 小球每 1s 能往复振动多少次?

21. (本小题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = 2a \cos^2 x + b \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}, f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.

() 求 $f(x)$ 的解析式及周期;

() 若 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f(x) + a = 0$ 有两个相异实根, 求 a 的取值范围及两根之和.

22. (本小题满分 14 分) 某港口水的深度 y (米) 是时间 t ($0 \leq t \leq 24$, 单位: 时) 的函数, 记作 $y = f(t)$, 下面是某日水深的

t (时)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y (米)	10.0	13.0	9.9	7.0	10.0	13.0	10.1	7.0	10.0

经长期观察: $y = f(t)$ 的曲线可以近似地看成函数 $y = A \sin \omega t + b$ 的图象.

() 试根据以上数据, 求出函数 $y = f(t)$ 的近似表达式;

() 一般情况下, 船舶航行时, 船底离海底的距离为 5 米或 5 米以上时认为是安全的 (船舶停靠时, 船底只需不碰海底即可), 某船吃水深度 (船底离水面的距离) 为 6.5 米. 如果该船希望在同一天内安全进出港, 请问, 它至多能在港内停留多长时间 (忽略进出港所需时间)?

(8)三角变换与解三角形

一、选择题(本题共 12 小题,每小题只有一个正确答案,每小题 5 分,共 60 分)

1. 已知 $\cos 78^\circ$ 约等于 0.20, 那么 $\sin 66^\circ$ 约等于().
A 0.92 B. 0.85 C. 0.88 D. 0.95
2. 设函数 $f(x) = 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + a$ (a 为常数)在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最小值为 -4, 那么 a 的值等于().
A 4 B. -6 C. -4 D. $-3\sqrt{3}$
3. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = -f(x)$ 且在 $[-3, -2]$ 上是减函数, α, β 是锐角三角形的两个内角, 则().
A $f(\sin \alpha) > f(\cos \beta)$ B. $f(\sin \alpha) < f(\cos \beta)$
C $f(\sin \alpha) > f(\sin \beta)$ D. $f(\cos \alpha) > f(\cos \beta)$
4. 设 A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角, 且 $\cos C = \frac{3}{5}, \sin B = \frac{5}{13}$, 则 $\cos A$ 的值是().
A $-\frac{16}{65}$ B. $-\frac{56}{65}$ 或 $-\frac{16}{65}$ C $\frac{56}{65}$ D. $\frac{56}{65}$ 或 $\frac{16}{65}$
5. 已知 $\tan \alpha, \tan \beta$ 是方程 $x^2 + 3\sqrt{3}x + 4 = 0$ 的两根, 且 $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则 $\alpha + \beta$ 等于().
A $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{3}$ 或 $-\frac{2\pi}{3}$ C $-\frac{2\pi}{3}$ D. $-\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$
6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A + \tan B + \sqrt{3} = \sqrt{3}\tan A \cdot \tan B$, 且 $\sin A \cdot \sin B = \frac{3}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是().
A 直角三角形 B. 钝角三角形
C 等腰三角形 D. 正三角形
7. 已知 $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 8$, 且 $\vec{a}$ 与 $2\vec{b} - \vec{a}$ 互相垂直, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是().
A $\arccos \frac{1}{4}$ B. $\pi - \arccos \frac{1}{4}$ C $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{6}$
8. 设 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 若 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\sqrt{2}\cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$ ().
A $\frac{7}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C $-\frac{7}{5}$ D. $-\frac{1}{5}$
9. 化简 $2\sqrt{1 - \sin^2 8} + \sqrt{2(1 + \cos 8)}$ 的结果是().
A $2\sin 4$ B. $2\sin 4 - 4$ C $-2\sin 4$ D. $4\cos 4 - 2\sin 4$
10. 已知 $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\sin \alpha + \sin \beta = \sin \alpha, \cos \beta + \cos \alpha = \cos \alpha$, 则 $\beta - \alpha$ 的值等于().
A $-\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C $\frac{\pi}{3}$ 或 $-\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{3}$
11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知下列条件解三角形, 其中有唯一解的个数为().

$$A = 60^\circ, a = \sqrt{3}, b = 1$$

$$A = 30^\circ, a = 1, b = 2$$

$$A = 30^\circ, a = 6, c = 10$$

$$A = 30^\circ, c = 10, a = 10$$

A 0

B. 1

C 2

D. 3

12. 2002 年 8 月, 在北京召开了国际数学家大会, 大会会标如图所示, 它是由四个相同的直角三角形与中间的小正方形拼成的一个大正方形, 若直角三角形中较小的锐角为 θ , 大正方形的面积是 1, 小正方形的面积是 $\frac{1}{25}$, 则 $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta$ 的值等于().

A 1

B. $\frac{24}{25}$

C $\frac{7}{25}$

D. $-\frac{7}{25}$

二、填空题(本题共 4 个小题, 每题 4 分, 共 16 分)

13. 化简 $\frac{\sqrt{1 - 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}}{\cos 10^\circ - \sqrt{1 - \cos^2 170^\circ}} =$ _____.

14. 已知 $f(x) = \sin \frac{\pi}{6}x, x \in R$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2003) =$ _____.

15. $\frac{2\cos 5^\circ - \sin 25^\circ}{\cos 25^\circ} =$ _____.

16. 已知 $\cos \alpha - \cos \beta = \frac{1}{2}, \sin \alpha - \sin \beta = -\frac{1}{3}$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$ _____.

三、解答题(本题共 6 小题, 总分 74 分)

17. (本小题满分 12 分) 求函数 $f(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x}{2 - \sin^2 x}$ 的最小正周期、最大值和最小值.