西安交通大學

研究生创新教育系列教材

高等工程流体力学

张鸣远 景思睿 李国君

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

高 等 工 程 流 体 力 学

张鸣远　景思睿　李国君　编著

西安交通大学出版社
2006 年 3 月

内容简介

本书的编写目的是为低年级工科研究生提供一本基础流体力学教材。在透彻讲述流体力学基本微分方程组的基础上，偏重于联系工程实际，应用基本理论解决各类流体力学问题。全书共有四部分十二章：第一部分“流体力学的基本方程”，分三章，介绍流体力学的基本概念，流体力学的控制方程组以及一些相关的重要定理；第二部分“理想不可压缩流体的流动”，分三章，介绍平面势流，空间轴对称势流和理想流体中的旋涡运动；第三部分“粘性不可压缩流体的流动”，分四章，介绍纳维-斯托克斯方程的精确解，小雷诺数流动，层流边界层流动和紊流；第四部分“理想可压缩流体的流动”，分两章，介绍一维流动和平面流动。本书选材上与本科生教材有恰当的分工和衔接，行文上既注意有严格的理论推导，又注意叙述深入浅出，便于读者自学。书中有较多的例题和练习题，供读者参考。

本书可作能源动力、机械、化工、环境工程、水利、力学等专业的研究生教材，也可供相关专业的教师、工程技术人员阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等工程流体力学/张鸣远，景思睿，李国君编著.
—西安：西安交通大学出版社，2006.7
ISBN 7-5605-2237-8

Ⅰ.高...　Ⅱ.①张...　②景...　③李...　Ⅲ.工程力学：流体力学-研究生-教材　Ⅳ.TB126

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 082402 号

书　　名	高等工程流体力学
编　　著	张鸣远　景思睿　李国君
出版发行	西安交通大学出版社
地　　址	西安市兴庆南路 25 号(邮编：710049)
电　　话	(029)82668357　82667874(发行部) (029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷	陕西江源印刷科技有限公司
字　　数	515 千字
开　　本	727mm×960mm　1/16
印　　张	27.75
版　　次	2006 年 7 月第 1 版　2006 年 7 月第 1 次印刷
印　　数	0 001～3 000
书　　号	ISBN 7-5605-2237-8/O·249
定　　价	39.00 元

总　序

创新是一个民族的灵魂，也是高层次人才水平的集中体现。因此，创新能力的培养应贯穿于研究生培养的各个环节，包括课程学习、文献阅读、课题研究等。文献阅读与课题研究无疑是培养研究生创新能力的重要手段，同样，课程学习也是培养研究生创新能力的重要环节。通过课程学习，使研究生在教师指导下，获取知识的同时理解知识创新过程与创新方法，对培养研究生创新能力具有极其重要的意义。

西安交通大学研究生院围绕研究生创新意识与创新能力改革研究生课程体系的同时，开设了一批研究型课程，支持编写了一批研究型课程的教材，目的是为了推动在课程教学环节加强研究生创新意识与创新能力的培养，进一步提高研究生培养质量。

研究型课程是指以激发研究生批判性思维、创新意识为主要目标，由具有高学术水平的教授作为任课教师参与指导，以本学科领域最新研究和前沿知识为内容，以探索式的教学方式为主导，适合于师生互动，使学生有更大的思维空间的课程。研究型教材应使学生在学习过程中可以掌握最新的科学知识，了解最新的前沿动态，激发研究生科学研究的兴趣，掌握基本的科学方法，把教师为中心的教学模式转变为以学生为中心教师为主导的教学模式，把学生被动接受知识转变为在探索研究与自主学习中掌握知识和培养能力。

出版研究型课程系列教材，是一项探索性的工作，有许多艰苦的工作。虽然已出版的教材凝聚了作者的大量心血，但毕竟是一项在实践中不断完善的工作。我们深信，通过研究型系列教材的出版与完善，必定能够促进研究生创新能力的培养。

西安交通大学研究生院

前　　言

作者长期在西安交通大学讲授研究生的流体力学课程，深感国内外流体力学的专著和教科书虽多，其中不乏经典和优秀者，但适合用作低年级工科研究生的基础流体力学的教材还不多。考虑到工科教学的特点，工科研究生的教材应在透彻讲解流体力学基本微分方程组的基础上，偏重于联系工程实际，应用基本理论解决各类流体力学问题，而不片面追求理论体系的完整和抽象的理论推导；选材上注意与本科生教材有恰当的分工和衔接，避免不必要的重复；内容应涵盖理想和粘性流体，可压缩与不可压缩流动，层流与紊流，而不侧重于某一个特定的领域。本书即基于以上想法，并在总结作者多年教学经验的基础上编写而成，定名为《高等工程流体力学》。

本书的基本结构是先系统地推导流体力学的控制微分方程组，然后介绍在不同类型的流动问题中求解上述方程组的方法和技巧。全书共分四部分：第一部分“流体力学的基本方程”，有三章，分别介绍流体力学的基本概念，流体力学的控制方程组以及一些相关的重要定理；第二部分“理想不可压缩流体流动”，有三章，分别介绍平面势流，空间轴对称势流和理想流体中的旋涡运动；第三部分“粘性不可压缩流体的流动”，有四章，分别介绍精确解，小雷诺数流动，高雷诺数下的层流边界层流动和紊流流动；第四部分“理想流体的可压缩流动”，有二章，分别介绍一维流动和平面流动。附录部分包括了矢量分析和场论、笛卡尔张量、正交曲线坐标系、复变函数等方面知识的简单介绍，供不熟悉这些内容的读者参考，同时也对在不同坐标系中的流体力学基本方程组做了归纳。由于本书按照流体物性和流动特点编排内容和安排章节，而不针对某一特定的学科，因此适于能源动力、机械、化工、环境工程、水利、力学等不同专业的研究生，教师和科学技术人员阅读和参考。

为了便于读者自学，编写中注意使叙述和推导过程平顺连续，避免数学物理概念的跳跃，尽量做到深入浅出。降低了以往教材在正交曲线坐标系方面的要求，介绍以直角坐标系为主，以免繁冗的数学推导冲淡学生对基本流动问题的理解。书中附有较多的例题和练习题，供读者参考，打“ * ”者系较难的题目，练习题答案附在书末。本书的练习题解不久将由西安交通大学出版社出版。

编写中引入了直角坐标张量。掌握张量的基本知识会对学习流体力学和阅读科技文献带来很大的便利。对直角坐标张量生疏的读者可先阅读本书的附录或其

他的参考书籍，相信在阅读本书的过程中会很快熟悉张量下标表示法和掌握张量的基本运算规则。

本书第7、8和9章由景思睿编写，第3章由李国君编写，其余章节由张鸣远编写。张鸣远对全书进行了修改并负责定稿。

全书承蒙西安理工大学罗兴锜教授审阅，特致谢意。在编写中参考了书末所列专著和教材，这里对有关编著者和出版社表示感谢。

受作者学识所限，书中难免会有疏漏和错误之处，敬请读者指正。

作　者

2006年3月

目　　录

前言

第一部分　流体力学的基本方程

第 1 章　流体力学的基本概念

1.1　拉格朗日参考系与欧拉参考系 …………………………………………………… (2)
1.2　迹线、流线和脉线 ……………………………………………………………… (6)
1.3　物质导数 …………………………………………………………………………… (9)
1.4　速度分解定理 ……………………………………………………………………… (13)
1.4.1　速度分解定理,应变率张量和旋转率张量 …………………………………… (13)
1.4.2　应变率张量及旋转率张量各分量的物理意义 ……………………………… (15)
1.5　有旋运动的基本概念 ……………………………………………………………… (19)
1.6　物质积分的随体导数——雷诺输运定理 ………………………………………… (23)
1.7　应力张量 …………………………………………………………………………… (27)
1.8　本构方程 …………………………………………………………………………… (35)
1.8.1　牛顿流体的本构方程 …………………………………………………………… (35)
1.8.2　粘性系数 ………………………………………………………………………… (37)

第 2 章　流体力学的基本方程

2.1　连续方程 …………………………………………………………………………… (43)
2.2　动量方程 …………………………………………………………………………… (46)
2.3　能量方程 …………………………………………………………………………… (53)
2.4　牛顿流体的基本方程组 …………………………………………………………… (59)
2.5　边界条件 …………………………………………………………………………… (61)

第 3 章　流体力学的几个重要定理

3.1　开尔文定理 ………………………………………………………………………… (70)
3.2　伯努利方程 ………………………………………………………………………… (73)
3.3　非惯性系中的伯努利方程 ………………………………………………………… (78)
3.4　涡量动力学方程 …………………………………………………………………… (82)

第二部分　理想不可压缩流体的流动

第 4 章　平面势流

4.1　速度势函数与流函数 …………………………………………………… (90)
4.2　复位势和复速度 ………………………………………………………… (93)
4.3　基本流动 ……………………………………………………………… (94)
4.3.1　均匀流 ……………………………………………………………… (94)
4.3.2　点源(汇) ………………………………………………………… (95)
4.3.3　点涡 ………………………………………………………………… (96)
4.3.4　绕角流动 …………………………………………………………… (96)
4.3.5　偶极子 ……………………………………………………………… (98)
4.4　圆柱绕流 ……………………………………………………………… (100)
4.4.1　无环量圆柱绕流 …………………………………………………… (100)
4.4.2　有环量圆柱绕流 …………………………………………………… (101)
4.5　布拉修斯公式 ………………………………………………………… (105)
4.6　镜像法 ………………………………………………………………… (109)
4.6.1　平面定理——以实轴为边界 ……………………………………… (110)
4.6.2　平面定理——以虚轴为边界 ……………………………………… (111)
4.6.3　圆定理 ……………………………………………………………… (112)
4.7　保角变换 ……………………………………………………………… (115)
4.8　茹柯夫斯基变换 ……………………………………………………… (118)
4.8.1　椭圆绕流 …………………………………………………………… (120)
4.8.2　平板绕流和库塔条件 ……………………………………………… (123)
4.9　茹柯夫斯基翼型 ……………………………………………………… (125)
4.10　施瓦兹-克里斯托弗尔变换 ………………………………………… (131)
4.11　自由射流 …………………………………………………………… (134)

第 5 章　空间轴对称势流

5.1　速度势函数和斯托克斯流函数 ………………………………………… (143)
5.2　速度势函数方程的解 ………………………………………………… (146)
5.3　基本流动 ……………………………………………………………… (147)
5.4　半无穷体绕流 ………………………………………………………… (151)
5.5　圆球绕流 ……………………………………………………………… (153)
5.6　旋转体无攻角绕流 …………………………………………………… (155)
5.7　巴特勒球定理 ………………………………………………………… (157)

5.8　达朗贝尔佯谬 …… (160)
5.9　奇点对物体的作用力 …… (162)
5.10　虚拟质量 …… (165)

第 6 章　理想流体的旋涡运动

6.1　涡量场和散度场的诱导速度场 …… (171)
6.2　直线涡丝和圆形涡丝 …… (174)
6.2.1　直线涡丝 …… (175)
6.2.2　圆形涡丝 …… (178)
6.3　卡门涡街 …… (181)
6.4　涡层 …… (185)

第三部分　粘性不可压缩流体的流动

第 7 章　纳维-斯托克斯方程的精确解

7.1　定常的平行剪切流动 …… (193)
7.1.1　库埃特流动 …… (194)
7.1.2　泊肃叶流动 …… (195)
7.2　非定常的平行剪切流动 …… (200)
7.2.1　突然加速无界平板附近的流动 …… (200)
7.2.2　无界振动平板附近的流动 …… (203)
7.2.3　平行壁面间的振荡流动 …… (205)
7.3　平面圆周运动 …… (207)
7.3.1　两旋转圆筒间的流动 …… (207)
7.3.2　无限长直涡丝诱导的流动 …… (209)
7.4　几种非线性流动的精确解 …… (214)
7.4.1　平面滞止区域的流动 …… (214)
7.4.2　收缩形和扩张形通道内的流动 …… (218)
7.4.3　多孔壁上的流动 …… (221)

第 8 章　小雷诺数流动

8.1　斯托克斯近似 …… (226)
8.2　绕圆球的缓慢流动 …… (230)
8.3　奥辛近似 …… (235)
8.4　滑动轴承内润滑油的流动 …… (237)
8.5　通过多孔介质的缓慢流动 …… (242)

第 9 章　层流边界层流动

9.1　边界层的几个厚度 ………………………………………………………… (246)
9.2　边界层方程 ……………………………………………………………… (247)
9.3　顺流平板边界层 ………………………………………………………… (250)
9.4　边界层方程的相似解 …………………………………………………… (255)
9.5　绕楔形物体的流动 ……………………………………………………… (258)
9.6　动量积分方程 …………………………………………………………… (267)
9.7　卡门-波尔豪森近似 …………………………………………………… (272)
9.8　边界层分离 ……………………………………………………………… (279)
9.9　层流边界层的稳定性 …………………………………………………… (282)

第 10 章　紊流

10.1　紊流概述及紊流的统计平均 ………………………………………… (289)
10.1.1　紊流的基本特性 …………………………………………………… (289)
10.1.2　紊流的统计平均 …………………………………………………… (290)
10.2　紊流的基本方程 ……………………………………………………… (292)
10.2.1　时均流动的连续性方程和运动方程 ……………………………… (292)
10.2.2　雷诺应力方程及紊动能方程 ……………………………………… (297)
10.3　紊流统计理论和各向同性紊流 ……………………………………… (299)
10.3.1　紊流脉动量的关联 ………………………………………………… (300)
10.3.2　各向同性紊流分析 ………………………………………………… (301)
10.3.3　科尔莫高洛夫局部各向同性假设与紊能谱的－3/5 幂次律 … (304)
10.4　紊流模型及紊流的数值模拟 ………………………………………… (307)
10.4.1　代数涡粘性模型 …………………………………………………… (308)
10.4.2　标准 k-ε 模型 ……………………………………………………… (312)
10.4.3　雷诺应力模型和代数应力模型 …………………………………… (316)
10.4.4　高级数值模拟简介 ………………………………………………… (318)
10.5　平壁上的紊流运动 …………………………………………………… (319)
10.6　圆管紊流 ……………………………………………………………… (324)
10.7　平面紊动射流 ………………………………………………………… (326)

第四部分　理想可压缩流体的流动

第 11 章　理想可压缩流体的一维流动

11.1　小扰动在静止流体中的传播 ………………………………………… (335)

11.1.1 小扰动传播方程和音速 …… (335)
11.1.2 小扰动传播的特征线和黎曼不变量 …… (339)
11.1.3 活塞问题 …… (341)
11.2 有限振幅波的传播 …… (344)
11.2.1 有限振幅波传播的特征线和黎曼不变量 …… (344)
11.2.2 简单波 …… (347)
11.2.3 激波的形成 …… (349)
11.3 正激波 …… (351)
11.4 激波管 …… (358)
11.5 一维定常等熵流动 …… (361)
第 12 章 理想可压缩流体的平面流动
12.1 势流流动 …… (365)
12.2 小扰动理论 …… (367)
12.2.1 势流方程的线性化 …… (367)
12.2.2 边界条件的线性化 …… (369)
12.2.3 压强系数的线性化 …… (369)
12.3 波形壁绕流 …… (370)
12.3.1 亚音速流动 …… (370)
12.3.2 超音速流动 …… (373)
12.4 普朗特-葛劳渥特法则 …… (377)
12.5 超音速流动的埃克特理论 …… (378)
12.6 斜激波 …… (381)
12.7 普朗持-迈耶流动 …… (386)
附录 A 矢量分析和场论 …… (392)
附录 B 笛卡尔张量 …… (395)
附录 C 正交曲线坐标系 …… (401)
附录 D 流体力学基本方程组 …… (406)
附录 E 复变函数 …… (411)
练习题答案 …… (414)
参考书目 …… (424)
主题词索引 …… (426)

第一部分

流体力学的基本方程

本书的第一部分将在普遍的物理定律和数学原理的基础上推导流体力学的基本方程。本部分共分三章:作为推导基本方程的理论准备,第1章介绍流体力学的一些基本概念;在质量、动量和能量守恒定律的基础上,第2章推导流体力学的连续方程、动量方程和能量方程,并给出相应的边界条件;第3章介绍几个重要的定理,它们分别是开尔文定理,惯性系和非惯性系中的伯努利方程和涡量动力学方程,这些定理或公式都是在一定的简化条件下从基本方程推出的,可以与基本方程一起使用或替代基本方程,在求解流体力学问题过程中起着重要的作用。

在建立了流体力学的基本方程组后,本书的其余章节将讨论不同类型的流动问题,如理想不可压缩流体的流动,粘性不可压缩流体的流动,以及理想可压缩流体的流动等,研究在不同的条件下如何简化和求解基本方程,解释各异的流动现象。本部分则是全书的理论基础。

第 1 章　流体力学的基本概念

本章首先介绍流体力学采用的两种参考系，拉格朗日参考系和欧拉参考系；然后给出物质导数的表达式和雷诺输运公式，它们把拉格朗日参考系内的导数与欧拉参考系内的导数联系起来；在导出应变率张量和应力张量的基础上，推导牛顿流体的本构方程；还介绍涡量与有旋运动的概念。

1.1　拉格朗日参考系和欧拉参考系

在流体力学中把流体看作是连续介质，认为流体由无穷多的流体质点连续无间隙地组成。流体质点的几何尺寸与各别流体分子间的距离相比充分大，流体质点中包含着大量的流体分子，因此流体的宏观物理量可以看作是对流体分子的相应微观量的统计平均，具有确定的数值；而与流场中研究对象的宏观尺寸相比，流体质点的几何尺寸充分小，可以看作只占据空间的一个点。流体力学研究的最小物质实体是流体质点，在流体力学中讨论的流体速度、温度和密度等变量，实际上是指流体质点的速度、温度和密度等。

流体力学采用两种参考系描述流体质点的运动，即拉格朗日参考系和欧拉参考系。在拉格朗日参考系中，给出各个流体质点的空间位置随时间的变化，而把流体的物理量表示为流体质点和时间的函数。为了描写流体质点空间位置及其物理量的变化，必须首先区分不同的流体质点。设初始时刻 t_0 某一流体质点位于 $\boldsymbol{r}_0(x_0,y_0,z_0)$，约定用 $\boldsymbol{r}(x_0,y_0,z_0)$ 作为该流体质点的标志，不同的 $\boldsymbol{r}_0(x_0,y_0,z_0)$ 代表不同的流体质点，于是流体质点在 t 时刻的位置可表示为

$$x = x(x_0,y_0,z_0,t),\quad y = y(x_0,y_0,z_0,t),\quad z = z(x_0,y_0,z_0,t) \tag{1.1a}$$

或者以位置矢量表示为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0,t)\quad 或\quad x_i = x_i(x_{01},x_{02},x_{03},t) = x_i(x_{0j},t) \tag{1.1b}$$

式中 x_i 的下标 i 称自由指标，可分别取 1、2 和 3，于是 x_i 的方程就代表了 3 个标量方程；上式括号内的自变量 x_{0j} 表示 x_{01}、x_{02} 和 x_{03}，它的下标 j 并非自由指标，只表示在其取值范围内逐一取值。这里用 $\boldsymbol{r}_0(x_0,y_0,z_0)$ 来区分不同的流体质点，而用 t 来确定流体质点的不同空间位置。与流体质点相关的物理量也表示为

$$p = p(\boldsymbol{r}_0, t), \quad \rho = \rho(\boldsymbol{r}_0, t), \quad T = T(\boldsymbol{r}_0, t) \tag{1.1c}$$

等等。在以上表达式中，如果固定 $\boldsymbol{r}_0$，而让时间 t 变化，则得到某一确定流体质点的空间位置及其相关物理量随时间的变化规律；如果固定时间 t，而让 $\boldsymbol{r}_0$ 变化，则得到同一时刻不同流体质点的空间位置及其相关物理量。称 $\boldsymbol{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ 为拉格朗日坐标。

与拉格朗日参考系不同，在欧拉参考系中着眼点不是流体质点，而是空间点 $\boldsymbol{r}(x,y,z)$，把流体的运动表示为空间点和时间的函数。在欧拉参考系中采用速度表示流体运动的变化，式如

$$u = u(x,y,z,t), \quad v = v(x,y,z,t), \quad w = w(x,y,z,t) \tag{1.2a}$$

或者表示为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) \quad 或 \quad u_i = u_i(x_j, t) \tag{1.2b}$$

相关的物理量则表示为

$$p = p(\boldsymbol{r}, t), \quad \rho = \rho(\boldsymbol{r}, t), \quad T = T(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.2c}$$

等等。在以上表达式中，如果固定 $\boldsymbol{r}(x,y,z)$，而让时间 t 变化，就得到某一空间点上的流体速度及其相关物理量随时间的变化规律；如果固定时间 t，而让 $\boldsymbol{r}(x,y,z)$ 变化，则得到同一时刻流体速度及其相关物理量在空间的分布规律。作为连续介质，流体所在区域的任一空间点在某一时刻总是被一个流体质点所占据，因此流体在该空间点上的速度和物理量就是该流体质点在该时刻的速度和物理量；下一时刻，占据该空间点的流体质点改变了，这一空间点的速度和物理量也就发生了变化。这里称 $\boldsymbol{r}(x,y,z)$ 为欧拉坐标。

在欧拉参考系中，空间坐标 x,y,z 和时间 t 是相互独立的变量；而在拉格朗日参考系中，x,y,z 和 t 不是相互独立的，此时 x,y,z 表示流体质点的空间位置，在流动过程中，流体质点的空间位置随时间而变化，因此 x,y,z 是时间 t 的函数。

为了使读者熟悉拉格朗日坐标和欧拉坐标及其相互联系，考虑一个流体微团的体积变化。设在初始时刻 t_0 此流体微团的边长分别为 δx_0、δy_0 和 δz_0，体积 $\delta V_0 = \delta x_0 \delta y_0 \delta z_0$，如图 1.1 所示。随时间推移，由于此流体微团内各点速度彼此不同，流体微团发生了变形，三个相邻边边长可分别以矢量形式表示为

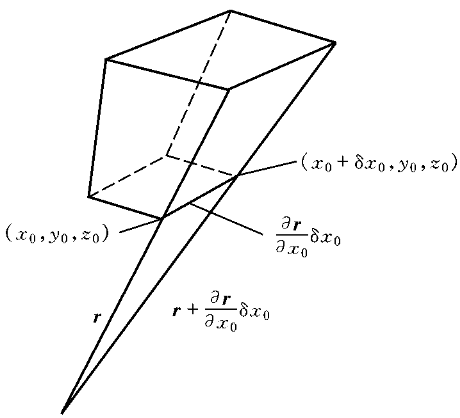

图 1.1　拉格朗日坐标系中的流体微元

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_0}\delta x_0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y_0}\delta y_0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z_0}\delta z_0$$

于是,变形后的流体微团体积可用上述三个微元矢量的混合积表示为

$$\delta\tau = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_0} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y_0}\right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z_0}\delta x_0 \delta y_0 \delta z_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} \delta\tau_0 = J\delta\tau_0$$

式中

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

称作 x,y,z 相对于 x_0,y_0,z_0 的雅可比行列式。设在 t 时刻和初始时刻 t_0 流体微团的密度分别为 ρ 和 ρ_0,由质量守恒 $\rho\delta\tau=\rho_0\delta\tau_0$ 有

$$J = \frac{\delta\tau}{\delta\tau_0} = \frac{\rho_0}{\rho} \tag{1.4}$$

可见雅可比行列式 J 表示一流体微团在 t 时刻和初始时刻 t_0 的体积之比,也表示初始时刻 t_0 和 t 时刻的密度比。

下边讨论流体的运动学变量和其他物理量在两种参考系之间的相互转换。式(1.1a)和式(1.1b)给出了拉格朗日参考系中流体质点的运动规律,即流体质点 $\boldsymbol{r}_0$ 在时刻 t 的空间位置。由于行列式 $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_0,y_0,z_0)}$表示同一流体微团在 t 时刻和初始时刻 t_0 的体积之比,因此总是一个有限大的正数,于是从数学上讲一定可以求得式(1.1b)的反函数,式如

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{r},t) \quad 或 \quad x_{0i} = x_{oi}(x_j,t) \tag{1.5}$$

将上式代入以拉格朗日坐标表示的速度表达式

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}[\boldsymbol{r}_0(\boldsymbol{r},t),t] = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$$

即得速度在欧拉参考系中的表达式。对 $p=p(\boldsymbol{r}_0,t)$、$\rho=\rho(\boldsymbol{r}_0,t)$和 $T=T(\boldsymbol{r}_0,t)$也可作类似的处理,从而得到欧拉参考系中的相应表达式 $p=p(\boldsymbol{r},t)$、$\rho=\rho(\boldsymbol{r},t)$和 $T=T(\boldsymbol{r},t)$。反过来,如已知欧拉参考系中的速度矢量 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$,该式又可表示为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(x,y,z,t), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v(x,y,z,t), \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = w(x,y,z,t) \tag{1.6a}$$

或写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.6b}$$

积分上式得 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(c_1,c_2,c_3,t)$，式中 c_1,c_2,c_3 是积分常数，可由 $t=t_0$ 时 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ 的初始条件来确定，

$$c_1=c_1(\boldsymbol{r}_0),\quad c_2=c_2(\boldsymbol{r}_0),\quad c_3=c_3(\boldsymbol{r}_0)$$

于是最终得

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0,t)$$

上式即为流体质点 $\boldsymbol{r}_0$ 的运动轨迹方程，当 $\boldsymbol{r}_0$ 确定而 t 变化时该方程描绘出空间的一条轨迹曲线；当 t 不变而取不同的 $\boldsymbol{r}_0$ 时，该方程表示不同流体质点的轨迹。将上式代入式(1.2c)即可得到拉格朗日参考系中相应物理量的表达式。

采用欧拉参考系常常比采用拉格朗日参考系优越，因为采用欧拉参考系时，速度、密度和压强等均是空间位置和时间的函数，即速度场、密度场和压强场等，因而可以广泛利用已经研究得很多的场论和矢量、张量分析的知识，使理论研究具有强有力的数学工具。而采用拉格朗日参考系时，各相关物理量的定义区域不是场，因为它们不是空间坐标的函数，而是质点 $\boldsymbol{r}_0(x_0,y_0,z_0)$ 的函数，若采用拉格朗日参考系就无上述便利。另外，在解决工程实际问题时常常没有必要知道每一个流体质点的详细运动历史，通常只要知道了空间点上的速度、压强分布等就可使问题得到圆满解决，因此欧拉参考系在流体力学中得到广泛应用。当然也不应忽视拉格朗日参考系的作用，在某些情形下，应用拉格朗日参考系则更为方便，比如在气固两相流动的计算中常常需要应用拉格朗日坐标分析固体颗粒的运动轨迹。

例 1　拉格朗日坐标(x_0,y_0,z_0)表示的流体运动规律为

$$x=x_0\mathrm{e}^{-2t},\quad y=y_0(1+t)^2,\quad z=z_0\mathrm{e}^{2t}(1+t)^{-2}$$

(1) 求以欧拉坐标表示的速度场；(2) 试确定流动是否为定常流动；(3) 求加速度。

解　(1) 求速度场，

$$u=\frac{\partial x}{\partial t}=-2x_0\mathrm{e}^{-2t}$$

$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=2y_0(1+t)$$

$$w=\frac{\partial z}{\partial t}=2z_0\mathrm{e}^{2t}[(1+t)^{-2}-(1+t)^{-3}]=\frac{2z_0\mathrm{e}^{2t}(1+t)^{-2}t}{1+t}$$

由已知条件 $x_0=x\mathrm{e}^{2t}$，$y_0=y(1+t)^{-2}$，$z_0=z\mathrm{e}^{-2t}(1+t)^2$，代入上式，

$$u=-2x,\quad v=2y(1+t)^{-1},\quad w=2zt(1+t)^{-1}$$

(2) 速度的欧拉表达式中包含变量 t，因此是非定常流动。

(3) 利用以拉格朗日坐标表示的速度求加速度，

$$a_x=\frac{\partial u}{\partial t}=4x_0\mathrm{e}^{-2t}=4x$$

$$a_y=\frac{\partial v}{\partial t}=2y_0=\frac{2y}{(1+t)^2}$$

$$a_z=\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{2z_0\mathrm{e}^{2t}}{(1+t)^3}+\frac{4z_0\mathrm{e}^{2t}t}{(1+t)^3}-\frac{6z_0\mathrm{e}^{2t}t}{(1+t)^4}$$

$$=\frac{2z_0\mathrm{e}^{2t}(1+2t^2)}{(1+t)^4}=\frac{2z(1+2t^2)}{(1+t)^2}$$

解毕。

1.2 迹线、流线和脉线

迹线

迹线是流体质点在空间运动过程中描绘出来的曲线，即轨迹。当给定欧拉参考系中的速度时，迹线可通过式(1.6a)或式(1.6b)计算，用张量下标的形式可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=u_i(x_j,t) \tag{1.7}$$

在以上方程中 t 是自变量，x_i 是流体质点的空间坐标，是 t 的函数。给定初始条件，$t=t_0$ 时 $x=x_0$，$y=y_0$，$z=z_0$，可得到迹线方程

$$x_i=x_i(x_{0j},t)$$

从式(1.6b)可以看出，一个流体质点的速度矢量总是和该质点的迹线相切。因此，迹线也可以定义为始终与同一个流体质点的速度矢量相切的曲线。

流线

流线是流场中的一条曲线，曲线上每一点的速度矢量方向和曲线在该点的切线方向相同。对于非定常流动，空间给定点的速度大小和方向随时间而变化，因此谈到流线总是指某一给定时刻的流线。与迹线不同，流线在同一时刻和不同流体质点的速度矢量相切。设 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$ 是流线上的线元，而 $\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}$ 是线元所在点的速度矢量，根据流线定义，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 相互平行，于是有 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{u}=0$，即

$$\frac{\mathrm{d}x}{u(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}y}{v(x,y,z,t)}=\frac{\mathrm{d}z}{w(x,y,z,t)} \tag{1.8a}$$

由于流线是针对某一瞬时的，上式中的 t 在积分过程中可当作常数看待。引入参变量 s，令