



国防科工委“十五”规划专著

复合材料中的边界元法 及数值解

田宗若 著

西北工业大学出版社

北京航空航天大学出版社 北京理工大学出版社
哈尔滨工业大学出版社 哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是关于带孔的、带裂纹的(中心裂纹、边裂纹、混合型斜裂纹)正交各向异性板的强度分析、计算的论著。书中对正交各向异性裂纹板剪切型动态、静态均作了详细求解。关键是作者在对正交各向异性板强度的研究中从理论上提出了“等价空间”的概念,较简捷地解决了带孔的、带裂纹的正交各向异性板 Kelvin 奇异解的数学力学模型,提出了求解这类问题的独特思路。全书共分七章:第一章为带孔的正交各向异性板的应力场和位移场问题;第二章及第三章是从不同的思路求解带裂纹的正交各向异性板问题;第四章是复合材料正交各向异性剪切型动、静态问题的求解;第五章是正交各向异性裂纹板动态剪切型应力强度因子 $K_{II}(t)$ 理论解的数值解;第六章是正交各向异性材质 S_{ij} 的探讨和研究;第七章是新型复合材料混合型裂纹及边裂纹问题的研究。

图书在版编目(CIP)数据

复合材料中的边界元法及数值解/田宗若著. —西安:西北工业大学出版社,2006.12

国防科工委“十五”规划专著

ISBN 7-5612-2030-8

I. 复… II. 田… III. ① 复合材料—边界元法 ② 复合材料—数值计算 IV. TB33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 072078 号

复合材料中的边界元法及数值解

田宗若 著

责任编辑 雷 军 张近乐 责任校对 季苏平

西北工业大学出版社出版发行

西安市友谊西路 127 号(710072) 发行部电话:029-88493844,88491757

<http://www.nwpup.com>

陕西向阳印务有限公司印制 各地书店经销

开本:850×1168 1/32 印张:11.875 字数:293 千字

2006 年 12 月第 1 版 2006 年 12 月第 1 次印刷 印数:1~2 000 册

ISBN 7-5612-1842-7 定价:28.00 元

国防科工委“十五”规划专著编委会

(按姓氏笔画排序)

主 任：张华祝

副主任：陈一坚 屠森林

编 委：王文生 王泽山 卢伯英 乔少杰

刘建业 张华祝 张近乐 张金麟

杨志宏 杨海成 肖锦清 苏秀华

辛玖林 陈一坚 陈鹏飞 武博祯

侯深渊 凌 球 聂 武 谈和平

屠森林 崔玉祥 崔锐捷 焦清介

葛小春



总 序

国防科技工业是国家战略性产业,是国防现代化的重要工业和技术基础,也是国民经济发展和科学技术现代化的重要推动力量。半个多世纪以来,在党中央、国务院的正确领导和亲切关怀下,国防科技工业广大干部职工在知识的传承、科技的攀登与时代的洗礼中,取得了举世瞩目的辉煌成就。研制、生产了大量武器装备,满足了我军由单一陆军,发展成为包括空军、海军、第二炮兵和其他技术兵种在内的合成军队的需要,特别是在尖端技术方面,成功地掌握了原子弹、氢弹、洲际导弹、人造卫星和核潜艇技术,使我军拥有了一批克敌制胜的高技术武器装备,使我国成为世界上少数几个独立掌握核技术和外层空间技术的国家之一。国防科技工业沿着独立自主、自力更生的发展道路,建立了专业门类基本齐全,科研、试验、生产手段基本配套的国防科技工业体系,奠定了进行国防现代化建设最重要的物质基础;掌握了大量新技术、新工艺,研制了许多新设备、新材料,以“两弹一星”、“神舟”号载人航天为代表的国防尖端技术,大大提高了国家的科技水平和竞争力,使中国在世界高科技领域占有了一席之地。党的十一届三中全会以来,伴随着改革开放的伟大实践,国防科技工业适时地实行战略转



移,大量军工技术转向民用,为发展国民经济做出了重要贡献。

国防科技工业是知识密集型产业,国防科技工业发展中的一切问题归根到底都是人才问题。50多年来,国防科技工业培养和造就了一支以“两弹一星”元勋为代表的优秀的科技人才队伍,他们具有强烈的爱国主义思想和艰苦奋斗、无私奉献的精神,勇挑重担,敢于攻关,为攀登国防科技高峰进行了创造性劳动,成为推动我国科技进步的重要力量。面向新世纪的机遇与挑战,高等院校在培养国防科技人才,生产和传播国防科技新知识、新思想,攻克国防基础科研和高技术研究难题当中,具有不可替代的作用。国防科工委高度重视,积极探索,锐意改革,大力推进国防科技教育特别是高等教育事业的发展。

高等院校国防特色专业教材及专著是国防科技人才培养当中重要的知识载体和教学工具,但受种种客观因素的影响,现有的教材与专著整体上已落后于当今国防科技的发展水平,不适应国防现代化的形势要求,对国防科技高层次人才的培养造成了相当不利的影响。为尽快改变这种状况,建立起质量上乘、品种齐全、特点突出、适应当代国防科技发展的国防特色专业教材体系,国防科工委全额资助编写、出版 200 种国防特色专业重点教材和专著。为保证教材及专著的质量,在广泛动员全国相关专业领域的专家学者竞投编著工作的基础上,以陈懋章、王泽山、陈一坚院士为代表的 100 多位专家、学者,对



经各单位精选的近 550 种教材和专著进行了严格的评审,评选出近 200 种教材和学术专著,覆盖航空宇航科学与技术、控制科学与工程、仪器科学与工程、信息与通信技术、电子科学与技术、力学、材料科学与工程、机械工程、电气工程、兵器科学与技术、船舶与海洋工程、动力机械及工程热物理、光学工程、化学工程与技术、核科学与技术等学科领域。一批长期从事国防特色学科教学和科研工作的两院院士、资深专家和一线教师成为编著者,他们分别来自清华大学、北京航空航天大学、北京理工大学、华北工学院、沈阳航空工业学院、哈尔滨工业大学、哈尔滨工程大学、上海交通大学、南京航空航天大学、南京理工大学、苏州大学、华东船舶工业学院、东华理工学院、电子科技大学、西南交通大学、西北工业大学、西安交通大学等,具有较为广泛的代表性。在全面振兴国防科技工业的伟大事业中,国防特色专业重点教材和专著的出版,将为国防科技创新人才的培养起到积极的促进作用。

党的十六大提出,进入 21 世纪,我国进入了全面建设小康社会、加快推进社会主义现代化的新的发展阶段。全面建设小康社会的宏伟目标,对国防科技工业发展提出了新的更高的要求。推动经济与社会发展,提升国防实力,需要造就宏大的人才队伍,而教育是奠基的柱石。全面振兴国防科技工业必须始终把发展作为第一要务,落实科教兴国和人才强国战略,推动国防科技工业走新型工业化道路,加快国防科技工业科技创新步伐。国防



科技工业为有志青年展示才华,实现志向,提供了缤纷的舞台,希望广大青年学子刻苦学习科学文化知识,树立正确的世界观、人生观、价值观,努力担当起振兴国防科技工业、振兴中华的历史重任,创造出无愧于祖国和人民的业绩。祖国的未来无限美好,国防科技工业的明天将再创辉煌。

张华祝



前言

1992 年作者出版了专著《复合材料中的边界元法》，并于 1999 年进行第 2 次印刷。该专著 1993 年 9 月获陕西省科技进步奖，1993 年 10 月获第七届中国图书奖；1999 年 1 月获国家教委科技进步奖。

本书是在上述研究基础上的扩展和创新，是作者近年在国内外的研究成果，其中部分内容曾在德、奥等国的多所大学进行过客座讲学，也包括了由德国 Berlin 工业大学等资助出版的德文专著 Mathematische Methoden zur Bruchmechanik von Verbundenwerkstoffen 中的内容。

作者在正交各向异性板强度研究中提出的“Equivalent Space”概念的独特思路，在这个领域研究中有理论上的突破，1992 年被吸收为中国发明协会会员，1995 年被授予“中国发明”荣誉证书（铜版 26cm×18cm）。至今，尚未发现世界各国学者有人提出此思路。

本书继续发展了作者求解正交各向异性板问题所提出的“等价空间”的概念。在等价空间中，通过多种数学解析方法求解，清晰地解决了正交各向异性板的各种裂纹（中心裂纹、斜裂纹、边裂纹）下的 Kelvin 奇异解的数学力学模型；在不同加载下动态、静态的强度问题——应力



场 $\{\sigma_{ij}\}$ 及位移场 $\{u_i\}$ 、应力强度因子及叠层结构的动态问题,还有热变形强度问题。

在这些理论问题上,本书中用到 BEM, FT, FT^{-1} , 超几何级数……在等价空间中巧妙地解决了 Hankel 积分方程组及含有指数函数、三角函数的 Bessel 积分方程的求解;还涉及到用 Laguerre 正交多项式解决 LT 逆变换;并解决了 Abel 积分方程组及第二类 Fredholm 积分方程组的求解,目的是求解正交各向异性板的强度问题。

复合材料作为 21 世纪的主导材料,目前已广泛地应用在宇航等领域,今后在军用飞机、航天等领域的用量将超过飞机总重量的 50% 以上。2002 年 6 月,美国波音公司“F—18”的可变翼、“幻影 2000”的尾翼、“AF—8B”的前机身等都使用了复合材料;俄罗斯的“S—37 金雕”前掠翼战斗机采用了高级碳纤维复合材料,其重量就比常用的铝合金轻 20%,该机已是俄罗斯未来 20 年新一代战斗机的基础;2006 年俄罗斯战略火箭导弹部队已部署了新型“白杨—M”洲际导弹,该弹头采用吸收雷达波和降低红外特征的复合材料,实现了雷达隐身和红外隐身一体化,这种机动型“白杨—M”洲际弹道导弹射程超过 1 000 km,并装有三部固体燃料巡航发动机及数十个引擎和航空电子设备,且这种新型导弹可通过改变飞行轨迹,能突破任何导弹防御系统。另外,复合材料也给民用工业带来了新的革命,如法国伊格建筑公司研制的能承受拉、压的混凝土,它已用在加拿大修建的一座长 60 m 的桥中,还用



在法国卡特农核电站冷却塔的散热装置中……另外,如美国、德国已将 SMC 材料用在汽车工业上,使制造的汽车的保险杆、弹簧、大轴等构件都优于钢材构件。德国前些年已将碳纤维复合材料用于 VW 汽车、自行车跑车、潜水的“鸭蹼”、薄壳结构等。

复合材料已日益广泛地应用在军事和民用领域,必将会有许多强度方面的问题。我将继续和同行朋友奋进在这一领域,作出贡献。

著 者

2006 年 10 月

第一章 用边界元法求解带孔的正交各向异性板问题

1.1 BEM 的基本概念

BEM 是近十余年来发展起来的一种数值解析方法。BEM 的基础是用 Fredholm 积分方程的位势积分来表示问题的解,它是将支配物理现象的微分方程转化成边界上的积分方程,然后再进行离散求解的数值计算方法。

BEM 和 FEM 两种方法的比较如下:

(1) BEM 的数学基础是积分方程,而 FEM 的数学基础是变分法。

(2) BEM 只需对物体的边界进行离散,一般不要在区域内进行单元的划分,这样可使所考虑的问题的维数降低一次,所以可节省数据的准备工作量和计算量。

(3) 由于只对边界离散,离散化的误差仅来源于边界,而区域内有关物理量的值已有解析表达式,所以计算精度可相对提高。

(4) 处理有应力奇异性问题、无限域、半无限域等问题方便,目前 BEM 已扩展到解决带时间变量、非线性等问题,涉及位势、电磁场、板与壳、断裂力学领域,已形成一独立学科。

(5) 但 BEM 对变系数、非线性等问题不如 FEM,在数值计算方面由于积分核的奇异性和离散化后得到的代数方程组的系数矩阵的非稀疏性而带来困难。

目前已有不少问题,用 BEM 和 FEM 的耦合方法去处理,对任一个求解域可将其分成子域,用 FEM 去处理在有限的无奇性的子域,问题可以是非线性的,非均匀的,这个子域可以是不规则



的;而对含奇性的,可以是无限的但几何上是规则的子域,可以运用 BEM,两者结合起来就得到整个区域的解。

1.2 BEM 的两种表达方法

将偏微分方程的定解问题化为边界积分方程的途径是多种多样的,可以从同一问题得到几个不同形式的边界积分方程,一般说来这些方程是奇异方程。根据积分方程的形式方法和积分方程中未知函数的性质,目前 BEM 中广泛使用着两种方法——直接法和间接法。

对正交各向异性体的求解,本书是采用了 BEM 的间接法之一的虚拟应力法进行了求解。

间接法是指所求的物理量是根据线性叠加原理用在边界上分布的虚拟的“源”的某种积分来表示,而这时的边界积分方程中的未知函数正是边界上虚拟“源”的分布密度,它本身不一定有什么物理意义,但它可用来表示某种物理量。

直接法是指得到的积分方程表达式是区域内的物理量与边界上的物理量之间的关系式,积分方程中的未知函数将是所拟求的物理量在边界上的值。

从数学的观点这两种方法是等价的。

下面简介从 Somigliana 公式出发,对边界元法中的直接法及由直接法所给出的间接法中的虚拟应力法和位移不连续法的结果。

一、Somigliana 的直接法表达式

当不计体力时,Somigliana 公式的一般形式为

$$\begin{aligned} C_{ji}(P)u_i(P) &= \int_{\Gamma} u_{ji}(P,Q)t_i(Q)d\Gamma(Q) \\ &\quad - \int_{\Gamma} u_i(Q)T_{ji}(P,Q)d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (1.1)$$



在无限域中取一边长为 Γ , 将其分成有限域 Ω 和无限域 Ω' 。 Γ' 为无限域的边界, P 为由 Ω', Ω, Γ 组成的无限域内的任意一点; Q 为 Γ 上的任意一点; $u_{ji}(P, Q), T_{ji}(P, Q)$ 为 Ω 域内 P 点位移及面力的 Kelvin 解 (见图 1.1)。

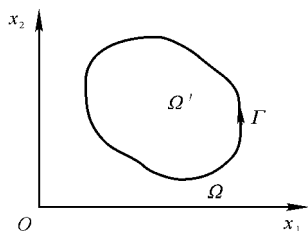


图 1.1

(1.1) 式是用面力、位移的边界值 $t_i(Q), u_i(Q)$ 表示了 P 点的位移 $u_i(P)$ 。

对各向同性弹性体, $u_{ji}(P, Q)$ 及 $T_{ji}(P, Q)$ 可表示成下式:

$$u_{ij}(P, Q) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} \ln \frac{1}{r} + r_{,j}r_{,i} \right] \quad (1.2)$$

$$T_{ji}(P, Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] - (1-2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right\} \quad (1.3)$$

式中 r 为 P, Q 两点间的距离;

$$r_{,i} = [x_i(Q) - x_i(P)]/r;$$

n 为边界 Γ 上的外法向法线;

$$\frac{\partial r}{\partial n} = n_i r_{,i};$$

$C_{ji}(P)$ 是与 P 点位置有关的函数



$$C_{ji}(P) = \begin{cases} 0 & P \in \Omega' \\ \sigma_{ji} & P \in \Omega \\ \text{与 } P \text{ 点附近边界形状有关} & P \in \Gamma \end{cases}$$

(1.1) 式即为 Somigliana 的直接法形式, BEM 的直接法就是在一定的边界条件下, 求解边界积分方程(1.1)。

二、间接法

如图 1.2 所示, 设边界 Γ 分为负侧 Γ^- (n 为外法向) 和 Γ 的正侧 Γ^+ (以 n' 为外法向)。

$t_i^-(Q), u_i^-(Q)$ 为边界 Γ 上 Q 点负侧的面力、位移分量。

$t_i^+(Q), u_i^+(Q)$ 为边界 Γ 上 Q 点正侧的面力、位移分量。

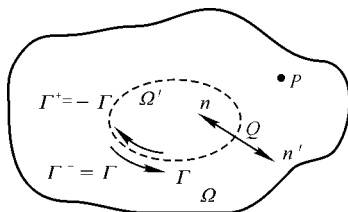


图 1.2

对 Γ^- 的边界 Q 域内, (1.2) 式可写成以下形式 (Ω 表示所考虑的区域, Ω' 是其补域, 可能有限, 可能无限):

$$\begin{aligned} u_j(P) &= \int_{\Gamma^-} u_{ji}(P, Q) t_i^-(Q) d\Gamma^-(Q) \\ &\quad - \int_{\Gamma^-} T_{ji}(P, Q) u_i^-(Q) d\Gamma^-(Q) \end{aligned} \quad (1.4)$$

对 Γ^+ 的边界 Ω' 域内, (1.1) 式可写成以下形式:

$$\int_{\Gamma^+} u_{ji}'(P, Q) t_i^+(Q) d\Gamma^+(Q) - \int_{\Gamma^+} T_{ji}'(P, Q) u_i^+(Q) d\Gamma^+(Q) = 0 \quad (1.5)$$

上式中 $u_{ji}'(P, Q)$ 及 $T_{ji}'(P, Q)$ 是以 n' 为外法向的基本解。

因为 $n_i' = -n_i$, $\Gamma^- = \Gamma$ 及 $\Gamma^+ = -\Gamma$



$$\text{所以} \quad u_{ji}'(P, Q) = u_{ji}(P, Q) \quad (1.6)$$

$$T_{ji}'(P, Q) = -T_{ji}(P, Q) \quad (1.7)$$

将上两式代入(1.5)式,并和(1.4)式相加可得下式:

$$\begin{aligned} u_j(P) = & \int_{\Gamma} u_{ji}(P, Q) [t_i^-(Q) + t_i^+(Q)] d\Gamma(Q) \\ & - \int_{\Gamma} T_{ji}(P, Q) [u_i^-(Q) - u_i^+(Q)] d\Gamma(Q), \quad P \in Q \end{aligned} \quad (1.8)$$

(1.8)式即为 Somigliana 关系式的间接法形式,在(1.8)式的基础上,即可求得虚拟应力法和不连续位移法的基本关系式。

1. 虚拟应力法的关系式

设在边界 Γ 上位移是连续的,即

$$u_i^-(Q) = u_i^+(Q)$$

$$\text{并设} \quad F_j(Q) = t_i^-(Q) + t_i^+(Q)$$

则(1.8)式可改写为

$$u_j(P) = \int_{\Gamma} F_j(Q) u_{ji}(P, Q) d\Gamma(Q) \quad (1.9)$$

并可得

$$\sigma_{ij}(P) = \int_{\Gamma} D_{Kij}(P, Q) F_K(Q) d\Gamma(Q) \quad (1.10)$$

上式中

$$D_{Kij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2r)(\delta_{Ki}r_{,j} + \delta_{Kj}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,K}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,K}] \quad (1.11)$$

2. 不连续位移法的基本公式

设在边界 Γ 两侧的面力是连续的,即

$$t_i^-(Q) = -t_i^+(Q)$$

并设

$$D_i(Q) = u_i^-(Q) - u_i^+(Q)$$

则(1.8)式可写成为



$$u_j(P) = - \int_{\Gamma} T_{ji}(P, Q) D_i(Q) d\Gamma(Q) \quad (1.12)$$

并可得到

$$\sigma_{ij}(P) = - \int_{\Gamma} S_{Kij}(P, Q) D_K(Q) d\Gamma(Q) \quad (1.13)$$

上式中

$$\begin{aligned} S_{Kij} = & \frac{2G}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,K} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) \right. \\ & - 4r_{,i}r_{,j}r_{,K}] + 2\nu(n_i r_{,j}r_{,K} + n_j r_{,i}r_{,K}) \\ & \left. + (1-2\nu)(2n_K r_{,i}r_{,j} + n_j \delta_{iK} + n_i \delta_{jK}) - (1-4\nu)n_K \delta_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (1.14)$$

在虚拟应力法中,虚拟应力 $F_j(Q) = t_i^-(Q) + t_i^+(Q)$ 为未知量,而在位移不连续法中,不连续位移 $D_i(Q) = u_i^-(Q) - u_i^+(Q)$ 为未知量,在这两种方法中,首先要解决这两个中间变量。由以上简单介绍可见,间接法的方程(1.9)和(1.12),均可由直接法方程(1.8)推导出来,所以这两种方法是等价的。

1.3 正交各向异性弹性体的基本方程

各向同性弹性力学与各向异性弹性力学的平衡方程、几何方程均完全一样,所不同的是物理方程。

对于纤维增强复合材料也可认为是连续介质的弹性体,只是要注意其各向异性的特点,其中大量的材料均为正交各向异性体。

一、平衡微分方程

$$\sigma_{ji,j} + \beta_j = 0 \quad (1.15)$$

当不计体力时,有

$$\sigma_{ji,j} = 0 \quad (1.16)$$



二、几何方程

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.17)$$

三、物理方程

对于小应变、略去初应力的正交各向异性材料的应力-应变关系为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

上式也可用柔度阵 S_{ij} 来表示, S_{ij} 是刚度阵 C_{ij} 的逆阵。

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

S_{ij} 具有 9 个独立的弹性常数, 1, 2, 3 方向分别为正交各向异性材料的三个弹性主轴, 当三个材料主轴为坐标轴 x, y, z 时, $\{\sigma\} - \{\epsilon\}$ 之间的关系式为